数学分析（三）-数项级数与函数项级数

Математический анализ-3

作者：Galois 爱求五次根

组织：深北莫数学学社分析小组

时间：2022/9/5

宗旨：执象而求，咫尺千里

无限！再也没有其他问题如此深刻地打动过人类的心灵——希尔伯特

数学分析是一门关于极限的语言，读懂它，你就找到了进入人类心智后花园的第一把钥匙。我们必须知道，我们必将知道

目录

第 1 章 级数简史

Newton 与 Leibniz 时期： 17 世纪建立微积分的同时，无穷级数也进人了数学的实践。从 1668 年在英国出现的各式各样有关对数级数的论著谈起，在这一年里 Mercator[1]发表了《对数技术》讲解对数计算法，在最后一章里讨论了求双曲线 $xy=1$，相对于渐近线的面积的问题。Mercator 令 $x=1+a$，而把双曲线方程写成

$$y=\frac{1}{1+a}$$

用除法将右端展为几何级数

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+\cdots,$$

然后依 a 逐项积分而得出双曲线面积为已知级数

$$a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\cdots.$$

关于该级数适用范围问题则末曾提及（在所附图上偶尔出现 $a>1$，而此时展开式事实上不适用!）对这问题 Wallis 在其评论中有详细的讨论。最后 Brouncker[2] 以纯几何方式导出了特殊公式

$$\ln 2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

为了实际计算 Brouncker 采用收敛较快的级数，并且与几何级数作比较而找到了余项的界限。

Newton 开始从事无穷级数的研究较早，但他在这方面的研究与其他分析领域的研究交错着进行，这方面首先有他 1676 年给 Leibniz 的信及其两本奠基性的作品：《借助无穷多项方程的分析》及《流数术及无穷级数》。

最多不晚于 1666 年，Newton 已经通晓分数或负数指数的二项式级数，最初是用类比论证得出的，而根式的展开则由乘方来验证。后来他搬用当时已知的关于十进分数理论的原理而找到幂级数的直接除法及级数的开方法。Newton 将种种式子展为级数而将求它们流数及流量问题化为方幂的同样运算，并由此大大扩展了他所创立的分析的适用范围。

牛顿常常采取所谓级数的"反转"，即由甲量依乙量方幂的展开式出发来建立乙量依甲量方幂的展开式。如此由对数级数

$$z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$$

出发他得出

$$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\cdots,$$

即实质上是指数级数（两边各加 1，则左边得 $1+x$，其自然对数恰好等于 z ）。有趣的是，两弦 x 依弧 z 的展开式即为

$$x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\cdots$$

而 Newton 是由表出弧的级数

$$z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots$$

的"反转"来求的，即由反正弦的展开式来求的，后者在 Newton 看来自然比较简单，因为它可由容易展为二项式级数的反正弦的流数 $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 通过积分得出。

Newton 广泛用无穷级数来解代数方程及微分方程，所用的该方法实质上是待定系数法。

牛顿在"分析"里叙述了关于用级数解方程的问题而证明了该级数即收敛于方程的根，但在另一些情形他预先将已知量展为级数而不考虑收敛性。可是，由于 Newton 主要着重级数在近似计算中的应用，自然感兴趣的不在形式化地确立级数收敛的事实，而是需要它迅速地收敛，例如 Newton 不是用缓慢收敛级数

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

[1]梅尔托（Nicholas Mercator,1620-1687）德国数学家，以他的对数级数 $\log(1+x)$ 而闻名

[2]布龙克尔（William Brouncker,1620-1684）爱尔兰数学家，伦敦皇家学会创始人和首任主席。研究了连分数并通过无穷级数计算对数

进行 $\ln 2$ 的计算，而是由公式 $\ln 2 = 2\ln 1.2 - \ln 0.8 - \ln 0.9$ 出发：真数 $1.2, 0.8, 0.9$ 与 1 相差不大，这就保证了对数级数的迅速收敛。至于所产生的误差的估计 Newton 并没有给出。

Leibniz 独立地得出了 Newton 早时已知的某些展开式，1693 年 Leibniz 精确地提出了用待定系数法来积分微分方程。特别是，他由对数和正弦所满足的微分方程出发，以这种方法重新得出了这两个函数的展开式。

1682 年莱布尼茨最先发表了表示 $\frac{\pi}{4}$ 的级数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

不过该级数 Leibniz 早已知道。Leibniz 顺便给出了以该级数的一节替代 $\frac{\pi}{4}$ 时误差的估计。这些指示后来他推广到各项绝对值递减为 0 的任何交错级数的情形（例如，在 1714 年给约翰. 伯努利的信里）但是，在此和的“存在”被看作是不言而喻的，实际上只是确立了它可由部分和从两边交错地无限接近而已。

莱布尼茨在较F的信里说到“收敛”于其和的级数，此处收敛性的理解和我们一样，但同时他又认为级数 $1-1+1-1+\cdots$ 有总和 $\frac{1}{2}$；这是由展开式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

取 $x=1$ 时得出的：如果它在 $x<1$ 时正确，则按“连续律”在 $x=1$ 时也该正确! 看来 Leibniz 自己也感到缺乏明确性；难怪他在一封信里说：“... 关于无穷级数的论证应该只在真理能按 Archimedes 方法用有限（数量）来证明时才可相信。”

研究无穷级数的还有 Leibniz 的两位同道 Bernoulli 兄弟，尤其是哥哥 Jacob Bernoulli [3] 关于级数的作品（1689-1704）几乎叙述了当时这方面所知的一切。值得一提的是，Johann Bernoulli [4]在前，Jacob Bernoulli 在后，两人都证明了“无穷调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

之和是无限的”，而 Jacob Bernoulli 的证明所根据原理与今天一样，并且他在结论中正确地强调：“末项消逝的无穷级数之和有时有限而有时无限。”——当然，这里“末项”应解释为通项的极限。要注意的是，Jacob Bernoulli 随便利用了发散级数甚至借此得出收敛的展开式.

形式发展时期: 在 18 世纪，原则性的问题没有引起多大的注意，但级数的实际知识却达到颇高的发展水平，这主要是出于 Euler 之手。

在 1715 年，Taylor 出版了一本不大的书：《正逆差分法》。但此书由于叙述不清楚而未能立即广泛流传。Taylor 由考虑有限差出发，然后过渡向无穷小差及其比作为极限情形，如此建立起 z 的函数 x 的增大值依变量 z 的增值 v 的方幂的展开式：

$$x+\frac{v}{1}\frac{dx}{dz}+\frac{v^2}{1\cdot 2}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3x}{dz^3}+\cdots.$$

这个展开式后来被称为 Taylor 级数。现在看来，作者当时自己没有完全估计到他的发现的价值：在书中它很少有应用之处——这公式的意义在 1742 出版的 Maclaurin 巨著《流数论》里才显露出来。Maclaurin 使用别的方法得到同样的级数：他依据带待定系数的依 x 方幂的展开式，重复微分并每次令 $z=0$，逐一定出系数。他得出二项式级数作为一个例子，在推导其他简单函数时，Maclaurin 也利用了它们所满足的微分方程。

在该论著里有两件值得一提的事情。第一，Maclaurin 明确地建立了（尽管只是以几何的方式建立）正项级数收敛性及发散性的积分判别法（后来 Cauchy 重新以分析方式证明，因此也称为 Cauchy-Maclaurin 公式），然后推出了一个以积分来计算级数和的著名公式（Euler 在几年前也得出了相同的公式，因此也称为 Euler-Maclaurin 公式）

从 1730 年起，Euler 开始了一系列关于无穷级数的辉煌工作，撰写了许多篇关于级数的论文，在大半世纪时间内陆续发表于《彼得堡科学院汇报》，在欧拉著名的分析论著中级数也占据了很多位置。在此简略列举一下

[3]雅各布 · 伯努利（Jacob.Bernoulli,1654-1705）瑞士数学家，巴黎科学院外籍院士，柏林科学协会会员。对数学最重大的贡献是在概率论研究方面。其最出名的轶事为，雅各布从 1691 年醉心于研究对数螺线，惊叹这种曲线的神奇的他在遗嘱里要求后人将对数螺线刻在自己的墓碑上，并附以颂词“纵然变化，依然故我”，用以象征死后永生不朽。

[4]约翰 · 伯努利（Johann Bernoulli,1667.8.6-1748.1.1）瑞士数学家，柏林科学协会会员，巴黎科学院、英国皇家学会、意大利波伦亚科学院和彼得堡科学院的外籍院士。其一大历史功绩为培养了一大批出色的数学家，其中包括 18 世纪最著名的数学家 Euler、瑞士数学家 Cramer、法国数学家 L'Hôpital

欧拉的成就，不遵循年代的次序。

Euler 最先用隐约的极限过程由二项式级数出发推出了指数级数及对数级数。用同样方法他由 $\cos nz$ 及 $\sin nz$ 的已知公式得出余弦及正弦的级数。他将无穷幂级数与寻常多项式对比而将它分解成因子，如此将正弦及其他函数表示为无穷积的形式。将熟悉的有相同首项的二项式相乘法则推广到无穷多个的情形，得出了值得注意的公式

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},\quad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

及其他类似的公式。$\frac{1}{\sin z}$ 及 $\cot z$ 的简单分式展开式也属于 Euler。

欧拉还讨论了复数项的级数，由 $\sin x, \cos x$ 及 e^x 的级数的比较他导出了联系这些函数的著名公式一当时 Lagrange 称之为“本世纪最美妙的分析发明之一”。

Euler 也研究了许多级数求和，他在 Maclaurin 以前就得出著名的求和公式并且屡次反复应用，特别是，他曾将其用于调和级数的部分和。欧拉以种种方式将级数与积分结合起来，如此找到并研究了一些重要的积分，这些积分后来即以他命名。另外，Euler 还有一点与 Maclaurin 契合的地方：Maclaurin 得出其积分判别法的想法，Euler 早已用来确定级数和的上下界。

在 Euler 所感兴趣的其他问题中，值得一提关于为了改善收敛性的级数变换，关于将无穷乘积化为级数的变换。最后特别要指出的是，Euler 不但将级数以种种方式应用于分析本身，也应用于代数、数论及其他方面。

不过所有这些正确的卓越成就在 Euler 当时还没有多少可靠的根据，也如大多数同时代的数学家一样，Euler 对不关心收敛性问题，并且随便利用发散级数。例如将展开式

$$\frac{n}{1-n}=n+n^2+n^3+\cdots \text{ 与 } \frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

相加，说下面这个两头无穷的级数

$$\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+n^3+\cdots \quad (1)$$

等于 0。同样，由等式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

出发，欧拉不但由此推出在 $x=-1$ 时这个 Leibniz 研究过的级数

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

并且还试图使

$$1+2+4+8+\cdots=-1$$

这一在 $x=2$ 时得出的等式有意义。但是，Euler 自已解释说，对于这类发散级数，不能按照像收敛级数那样的意义来理解其和，不能要求它各项陆续相加时可任意接近其和。欧拉认为“有些无穷级数之和乃是这样一个有限表达式, 将它展开时就产生了该级数”。在这种级数和的“广义”理解法里已经有了真理的胚胎 (而它正与最近严密奠立起来的发散级数理论相契合)。D'Alembert 曾尖锐地反对利用发散级数，在他看来，用发散级数的论证即使结果与真理符合也是“可疑的”。但是，在 D'Alembert 看来收敛性与发散性概念本身都有“局部性”，因为它们要看下一项绝对值是否小于前一项而定。如此，按他的说法, 一个级数可以收敛到某一地方然后开始发散, 反过来也行。

最后来谈谈这时期的最伟大数学家之一 Lagrange。首先应提一提 Lagrange 级数，它给出方程式 $a-x+\varphi(x)=0$ 的根 $x=p$ 的展开式，其至此根的任何函数 $\psi(p)$ 的展开式。在其《解析函数论》(1797) 这一著作里 Lagrange 试图使微分学解脱“无穷小或消逝量, 极限或流数的考虑”而化为“有限量的代数分析”。在这尝试中即以幕级数为出发点。设对函数 $f(x)$ 成立展开式

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\cdots,$$

这里 $p,q,r,\cdots$ 是 x 的函数, Lagrange 由通常关系式

$$p=f'(x),\quad q=\frac{f''(x)}{2},\quad r=\frac{f'''(x)}{2\cdot 3},\quad \ldots$$

出发, 直接以展开式系数来界定逐次“导函数”(这里最先出现这个名称!). 在这基础上 Lagrange 不但讲了分析,

也讲了它的几何及力学上的应用. 但这种观点未获流传. 它 - 恰恰处在分析史新时期的开端 - 是所有严密奠基的尝试都失败后的一种反应.

在 Lagrange 同一著作里也建立了 Taylor 公式中余项的一个著名的便利形式。但是，对于 Lagrange 级数的收敛性是默认的，而这一形式不过是级数余项的一种表达式，其用处只是便于估计由省略级数后面诸项所造成的误差而已。级数的收敛性 Lagrange (也和 Euler 及其他同时代的人一样) 理解为通项趋于 0。对收敛级数和他没有给出定义，虽然它已屡次以与我们现在差不多的形式出现过, 例如在 Maclaurin (1742 年) 及 Waring[5]（1776 年）的著作里。19 世纪初法国数学家 Fourier[6]在其名著《热的分析理论》（1811 年完成，1822 年出版）里给出了级数收敛性及其和的正确定义，在此已注意到级数各项不断减为 0 对于收敛性是完全不充分的。（已经提到，这一情况在此以前一百多年 Jacob Bernoulli 就已强调指出过，以调和级数为例）

如此，这个时期虽在级数论中有很丰富的成就，但在其逻辑奠基方面则贡献很少。

[5]爱德华 · 华林（Edward Waring，1736 - 1798.8.15）英国数学家，英国皇家学会院士

[6]让 · 巴普蒂斯 · 约瑟夫 · 傅里叶（Baron Jean Baptiste Joseph Fourier，1768.3.21-1830.5.16）法国数学家、物理学家。

第 2 章 无穷数项级数

2.1 基本概念

2.1.1 数项级数敛散性与数项级数 Cauchy 准则

定义 2.1 (形式数项级数)

形式化定义序列 $\{u_n\}$ 所有元素的无穷和为

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

称该无穷和为数项级数 (**числовой ряд**) 或级数（不与有限级数引起混淆时），称其中单独的加数为级数的一般项 (**член**)

♣

定义 2.2 (部分和)

称有限和

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的 n 阶部分和 (**n-ая частичная сумма**) 或级数节

♣

可以借助级数部分和序列的元素唯一地表示级数的项 $u_1 = S_1, u_2 = S_2 - S_1, \ldots, u_k = S_k - S_{k-1}, k = 2, 3, \ldots$

定义 2.3 (数项级数敛散性)

若数项级数的部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛，则称数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，称

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

为数项级数的和。若部分和序列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

♣

考察数列

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \cdots, \quad x_n, \cdots$$

则其有限极限的存在性问题可以转化为级数

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots$$

的敛散性问题，由此得出，无穷级数及其和的研究就是序列及其极限的研究的一种新的形式

注 （数项级数敛散性形式化定义）形式化记收敛级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$；若记

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = r_n$$

则由定义也可形式化记为

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) : |S_n - S| = |r_n| < \varepsilon$$

其中 $r_n = o(1)$，**级数余项 (n-й остаток ряда)** r_n 收敛到无穷小；级数发散则可以形式化记为

$$(\forall S \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant N) : |S_n - S| \geqslant \varepsilon$$

例题 2.1 考查等比级数（几何级数）

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}$$

已知如果 $q\neq 1$，则级数的部分和可以通过以下公式计算

$$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$$

接下来考虑几种不同的情况：

1. 当 $|q|<1$ 时，有 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-q}=S$。在这种情况下，级数收敛，可以求出级数的和。级数余项 $r_n=S-S_n=\frac{q^n}{1-q}$ 快速趋向 0, 当 $|q|<1$ 时，成立 $\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}=\frac{1}{1-q}$
2. 当 $|q|>1$ 时，$q^n\to\infty$ 成立，则 $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ 当 $|q|>1$ 时，数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}$ 发散
3. 取 $q=1$，当 $n\to\infty$ 时，有 $S_n=n\to\infty$，则级数发散
4. 取 $q=-1$，有两种可能的情况：当 n 是偶数，有 $S_n=0$；当 n 是奇数，有 $S_n=1$。部分和序列 $\{S_n\}$ 有两个极限点，则该级数发散。由此可得，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}$ 发散

例题 2.2 （余项估计）计算级数

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

其中 x 为任意固定的数。

解 由 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式有

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}=S_n(x)+R_n(x),0<\theta<1$$

由估计 $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{|x^n|}{n!}e^{|x|}$，当任意 x 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=e^x$

定理 2.1 (数项级数收敛的 Cauchy 准则)

数项级数 $u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛充要条件为

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N)(\forall p\in\mathbb{N}):\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon$$

注 本质上即 $u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 敛散性等价于数列 $\{S_n\}$ 敛散性

注 根据数项级数 Cauchy 准则，对于较大的 n 值，差值 $S_{n+p}-S_n$ 不会改变，从 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 中丢弃任何有限数量首项，添加任何有限数量首项不会影响其敛散性

注 由证明过程显然有，若 $c\neq 0$，则数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛当且仅当数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(cu_k)$ 收敛。两个级数的敛散性相同且其部分和序列 $\{S_n\}$ 与 $\{cS_n\}$ 敛散性相同

注 两个收敛级数逐项施行加或减运算，所得级数依旧收敛

命题 2.1

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的各项在不变更其先后次序的情况下分别组合起来，所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\text{其中}A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\,(p_1=1,p_1<p_2<\cdots)\right)$$

也收敛且有相同的和

证明 记 $S_n=a_1+\cdots+a_n(n=1,2,\cdots)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列，则有 $A_1=a_1+\cdots+a_{p_2-1}=S_{p_2-1},\cdots,A_1+\cdots+A_n=a_1+\cdots+a_{p_{n+1}-1}=S_{p_{n+1}-1},\cdots$，可见组合所得的级数的部分和数列为 $S_{p_2-1},\cdots,S_{p_{n+1}-1},\cdots$，

它是 $\{S_n\}$ 的子列，则当 $\{S_n\}$ 收敛时，这个子列也收敛到相同极限，因此命题成立，逆命题不成立

命题 2.2

如果级数 $(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots$ 在同一括号中的项都有相同的符号，那么从级数 $(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots$ 收敛可以得到原级数收敛，并且两者有相同的和

证明 记级数 $(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots$ 的部分和为

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

假定 $\lim_{n\to\infty} A_n = S$，由于新级数的每一个括号中的项都同号，故当 k 由 $k_{n-1}+1$ 变到 k_n 时，相应的原级数的部分和 S_k 将单调地在 A_{n-1} 和 A_n 之间变动，即

$$A_{n-1} \leqslant S_k \leqslant A_n \quad 或 \quad A_n \leqslant S_k \leqslant A_{n-1} \quad (k_{n-1} < k \leqslant k_n)$$

令 $k\to\infty$，这时 $n\to\infty$，而 $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = S$，所以

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S$$

推论 2.1（数项级数收敛必要条件）

数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛必要条件为 $\lim\limits_{k\to\infty}(u_k)=0$，即级数的一般项趋于零

证明 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛，则由数项级数 Cauchy 准则 (2.1) 有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_0\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N_0)(\forall p\in\mathbb{N}):\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon$$

令 $p=1, N=N_0+1$，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}):[n\geqslant N\Rightarrow |u_n|<\varepsilon]$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}(u_k)=0$，则该条件为数项级数收敛必要条件，上述推论也可以从级数的部分和序列元素作差求极限的角度完成证明

例题 2.3 （数项级数收敛的必要条件并不充分）考察调和级数 (гармонический ряд)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

当 $p=n$ 时，对任意的 $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，考察级数和 $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$：

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}>\varepsilon$$

例题 2.4 （2553/三角级数敛散性）研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的敛散性

证明 [解法一：利用数项级数收敛必要条件 (**2.1**) 反证] 若 x 为 π 整数倍，则级数每项为 0，级数收敛。当 x 不为 π 整数倍时，考虑证级数通项当 $n\to\infty$ 时不为无穷小量，级数发散。反证：设对某个 $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 级数收敛，则由数项级数收敛必要条件 (2.1) 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)x=0$，则有

$$\sin x=\sin[(n+1)x-nx]=\sin(n+1)x\cos nx-\cos(n+1)x\sin nx\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

但当 $x\neq k\pi$ 时，左边 $\sin x\neq 0$，矛盾。综上级数仅在 x 为 π 整数倍时收敛

证明 [解法二：直接求和] 利用和差化积公式可计算得

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, x\neq 0$$

由此级数显然在 x 为 π 整数倍时收敛，x 不为 π 整数倍时发散

注 三角函数敛散性研究经常利用其周期性

注 给出一个解法二利用 Euler 公式的简单证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos k x+i\sum_{k=1}^{n}\sin kx&=\sum_{i=1}^{n}(\cos x+i\sin x)^k=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=\frac{e^{ix}\left(e^{inx}-1\right)}{e^{ix}-1}=\frac{e^{ix}e^{\frac{inx}{2}}2i\sin\frac{nx}{2}}{e^{\frac{ix}{2}}2i\sin\frac{x}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}e^{\frac{i(n+1)x}{2}}=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right)\end{aligned}$$

命题 2.3 (数值级数分组求和)

若数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的各项在不变更其先后次序的情况下分别组合起来，所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\text{其中}A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\,(p_1=1,p_1<p_2<\cdots)\right)$$

也收敛且有相同的和。逆命题不真

证明 记 $\{S_n\}$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和序列，则有

$$A_1=a_1+\cdots+a_{p_2-1}=S_{p_2-1},\cdots,A_1+\cdots+A_n=a_1+\cdots+a_{p_{n+1}-1}=S_{p_{n+1}-1},\cdots$$

则组合所得的级数的部分和序列为 $S_{p_2-1},\cdots,S_{p_{n+1}-1},\cdots$，其为 $\{S_n\}$ 子序列，则当 $\{S_n\}$ 收敛时，这个子列也收敛到相同极限，则正命题成立。

逆命题不成立，例如将级数 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 按照以下两种方式重新组合：

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)+\cdots$$

则分别得二收敛无穷级数，和分别为 0 和 1。由此用正命题结论知原无穷级数必发散

命题 2.4 (数值级数 Sandwich 定理)

设 $(\forall n\in\mathbb{N}):a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，若数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收敛，则数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛。若数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 敛散性不定

证明 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则由数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(\forall p\in\mathbb{N}):[(|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon)\wedge(|b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}|<\varepsilon)]$$

由这两个不等式和条件 $(\forall n\in\mathbb{N}):a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ 有

$$-\varepsilon<a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}\leqslant c_{n+1}+\cdots+c_{n+p}\leqslant b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon$$

则有 $|c_{n+1}+\cdots+c_{n+p}|<\varepsilon$。再由数值级数 Cauchy 准则 (2.1)，推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛。

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则不能推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 敛散性，例如：设对所有 n 令 $a_n=-1\leqslant b_n=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，但这时对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 仅知对每一个 n 有 $|c_n|\leqslant 1$

2.1.2 Euler 常数与 Riemann 函数

定义 2.4 (Euler 常数-调和级数近似)

设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$，计算级数部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} =$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

得当 $n \to \infty$ 时 $S_n = \ln(n+1) \to +\infty$，则原级数发散。由定义有调和级数发散，利用 $S_n = \ln(n+1)$，则有调和级数估计被记为 H_n：

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \alpha_n, \alpha_n = o(1), n \to \infty$$

其中 $\gamma = 0,577\ldots$ 被称为 Euler 常数

定义 2.5 (Riemann 函数)

有估计

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\sigma}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}} < \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{n^{\sigma}} \tag{2.1}$$

(Dirichlet 方法) 为了描述黎曼函数

$$\zeta(1+\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

(它仅仅对 $\sigma > 0$ 有定义) 当 σ 趋于零时的性态，应用估计式 (2.1) 首先在 (2.1) 的第一个不等式中令 $n = 0$, 然后在第二个不等式中令 $n = 1$, 得

$$1 \leqslant \sigma \cdot \zeta(1+\sigma) \leqslant 1 + \sigma$$

由此有

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma \cdot \zeta(1+\sigma) = 1$$

如果从显然的等式

$$\zeta(1+\sigma) = 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}}$$

出发, 可以得到更精确的结果, 对任意的 n 应用不等式 (2.1):

$$1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{(n+1)^{\sigma}} - 1\right] < \zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma}$$
$$< 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{n^{\sigma}} - 1\right)$$

令 $\sigma \to 0$ 而取极限, 得

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \leqslant \underline{\lim}_{\sigma \to 0}[\zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma}]$$
$$\leqslant \overline{\lim}_{\sigma \to 0}\left[\zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma}\right] \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

随后由于 n 的任意性，使 n 趋于无穷，因为由 $H_n = \ln n + C + \gamma_n$ 式, 上式中第一个和最末一个式子同

趋于欧拉常数 C, 于是上极限与下极限重合, 因而普通极限存在并等于

$$\lim_{\sigma\to 0}\left[\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}\right]=C$$

♣

2.2 同号级数及其敛散性判别法

2.2.1 比较定理与 Cauchy 缺项判别法

定理 2.2 (非负项数项级数（正项级数）审敛准则)

非负项数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k, p_k\geqslant 0$ 收敛的充要条件为其部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界

♡

证明

必要性：若序列 $\{S_n\}$ 收敛，显然其有界。

充分性：由级数项非负得 $\{S_n\}$ 不减，则由 Weierstrass 定理知任意不减有上界序列必收敛

命题 2.5 (正项数项级数收敛必要条件)

设正项数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，若把级数各项分别组合，则得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛

♠

证明 由原级数部分和序列 $\{S_n\}$ 单调，由收敛则必有上界，则由定理 (2.2) 即证

定理 2.3 (第一比较定理/первый признак сравнений)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为二非负项数项级数, 若 $(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N): a_n\leqslant b_n$, 则当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散。

♡

证明 由数项级数有限多项不影响数项级数的敛散性，不失一般性，设 $(\forall n\in\mathbb{N}): a_n\leqslant b_n$，则有 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=B_n$；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则不减序列 $\{B_n\}$ 趋于极限 B，则有 $(\forall n\in\mathbb{N}): A_n\leqslant B_n\leqslant B$，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 部分和序列 $\{A_n\}$ 有界。由非负项数项级数审敛准则 (2.2) 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。定理后半部分由反证法即得。

定义 2.6 (强级数)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为两个正项级数，且 $(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N): a_n\leqslant b_n$，则称数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的强级数，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 强于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，而称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的弱级数，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 弱于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$。

♣

定理 2.4 (第二比较定理/второй признак сравнения)

设二正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_k$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p'_k$，且 $(\exists k_0\in\mathbb{N})(\forall k\geqslant k_0): [(p'_k>0)\wedge(p_k>0)]$，若存在有限非零极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{p_k}{p'_k}=L$，则二级数敛散性相同

- 若 $0<L<+\infty$，则两个级数同敛散性
- 若 $L=0$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p'_k$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_k$ 收敛

- 若 $L=+\infty$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p'_k$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_k$ 发散

证明 由定义有

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall k\geqslant N): L-\varepsilon<\frac{p_k}{p'_k}<L+\varepsilon$$

取 $\varepsilon<L$，则最后的不等式意味着从号码 $n\geqslant \max\{k_0,N\}$ 满足不等式 $(L-\varepsilon)p'_k<p_k<(L+\varepsilon)p'_k$ ，由第一比较定理 (2.2.1) 即证

定理 2.5 (第三比较定理/третий признак сравнения)

设二正项级数 $(A):\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_k,(B):\sum\limits_{n=1}^{\infty} p'_k$，且 $(\exists k_0\in\mathbb{N})(\forall k\geqslant k_0):[(p'_k>0)\wedge(p_k>0)]$ ，并且满足不等式

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant\frac{p'_{k+1}}{p'_k}, k\geqslant k_0>0$$

则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p'_k$ 收敛性得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_k$ 收敛性，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_k$ 发散性得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p'_k$ 发散性

证明 可认为不等式在有限首项上成立，则当 $k=1,k=2$ 到 $k=n$ 有 n 个不等式：

$$\frac{p_2}{p_1}\leqslant\frac{p'_2}{p'_1},\frac{p_3}{p_2}\leqslant\frac{p'_3}{p'_2},\dots,\frac{p_n}{p_{n-1}}\leqslant\frac{p'_n}{p'_{n-1}}$$

由每个不等式左边都为正，则累乘这 n 个不等式，则有

$$\frac{p_n}{p_1}\leqslant\frac{p'_n}{p'_1}\Leftrightarrow p_n\leqslant\frac{p_1}{p'_1}p'_n \quad n\geqslant 1$$

由第一比较定理 (2.2.1) 得证

注 第三比较定理从级数收敛于 0 的速率快慢来判断级数的收敛性

命题 2.6 (Cauchy 缺项判别法/Признак разрежения Коши)

若非负项序列 $\{p_n\}$ 不增，则数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n p_{2^n}$ 敛散性相同

证明 由 $p_n\geqslant 0$，则级数 $\sum p_n$ 部分和序列 $\{s_n\}$ 不减，且它的任何子列 $\{s_{n_k}\}$ 都与 $\{s_n\}$ 敛散性相同。自然地有 $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists k\in\mathbb{Z}):2^{k-1}<n\leqslant 2^k$，对于这样的 n 和 k 定义 $b_n=p_{2^k}$，则由条件有 $b_n=p_{2^k}\leqslant p_n\leqslant p_{2^{k-1}}=b_{n-1}$，对 n 累加得 $2^{k-1}p_{2^k}\leqslant p_{2^{k-1}+1}+\cdots+p_{2^k}\leqslant 2^{k-1}p_{2^{k-1}}$ 因此对于级数 $\sum b_n$ 部分和 $\sigma_{2^{k-1}}$ 和 σ_{2^k} 有

$$\sigma_{2^k}=\sum_{n=1}^{2^k} b_n=\sum_{m=1}^{k} 2^{m-1}p_{2^m}\leqslant\sum_{n=1}^{2^k} p_n=s_{2^k}\leqslant\sum_{m=2}^{k} 2^{m-1}p_{2^{m-1}}=2\sum_{m=1}^{k-1} 2^{m-1}p_{2^m}=2\sigma_{2^{k-1}}$$

这表明，$\{\sigma_{2^k}\}$ 是 $\{s_{2^k}\}$ 的弱序列而 $\{2\sigma_{2^{k-1}}\}$ 是 $\{s_{2^k}\}$ 的强序列，于是级数 $\sum p_n$ 和 $\sum 2^k p_{2^k}$ 敛散性相同。

2.2.2 Cauchy 根值判别法与 D'Alembert 比值判别法

选取收敛的几何级数

$$\sum q^n=q+q^2+\cdots+q^n+\cdots \quad (0<q<1)$$

或发散级数

$$\sum 1=1+1+\cdots+1+\cdots$$

作为标准级数 (B)，把受检验的级数 (A) 与上述两个级数作比较，即可得到 Cauchy 根值判别法与 D'Alembert 比值判别法

定理 2.6 (Cauchy 根值判别法)

设正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geqslant 0$，若

$$(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k_0 \geqslant 1) : \sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1\,(\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1)$$

则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ 收敛（发散）

证明 设满足不等式 $\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1$，k 次幂即得 $k \geqslant k_0 : p_k \geqslant 1$，则不满足级数收敛必要条件 (2.1)，则级数发散。设满足不等式 $\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1$，k 次幂即得 $k \leqslant k_0 : p_k \leqslant q^k$。通项为 q^k 的级数当 $0 < q < 1$ 收敛，则由第一比较定理 (2.2.1) 级数收敛。

注 Cauchy 根值判别法 (2.6) 的条件 $\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1$ 不可以减弱为 $\sqrt[k]{p_k} < 1$，例如对于调和级数通项满足条件 $p_k = \dfrac{1}{k}$，满足当 $k > 1$ 时 $\sqrt[k]{p_k} = \dfrac{1}{\sqrt[k]{k}} < 1$，但调和级数是发散的

定理 2.7 (极限形式 Cauchy 根值判别法)

设非负项数值级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geqslant 0$，若存在（有限或无穷）极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$，则当 $L < 1$ 时级数收敛，当 $L > 1$ 或 $L = \infty$ 时级数发散。

证明 由极限存在并等于 L 及序列的 Cauchy 准则 (2.1) 有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant N) : |\sqrt[k]{p_k} - L| < \varepsilon$$

则从某个序号开始有二重不等式 $L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$。设 $L < 1$，取 ε 使 $L + \varepsilon < 1$，记 $q = L + \varepsilon$，这时二重不等式右端有 $\sqrt[k]{p_k} < q < 1$，则由 Cauchy 根值判别法 (2.6) 得级数收敛。

设 $L > 1$，取 ε 使 $L - \varepsilon > 1$，这时二重不等式左端有 $\sqrt[k]{p_k} > 1$，则由 Cauchy 根值判别法 (2.6) 得级数发散。当 $L = \infty$ 从某项开始有不等式 $\sqrt[k]{p_k} > M$，其中 M 为任意正数。不妨取 $M = 1$ 由 Cauchy 根值判别法 (2.6) 得级数发散。

注 若极限 L 等于 1，则不能得出关于级数敛散性的结论，此时判别法失效

推论 2.2 (广义 Cauchy 根值判别法)

设正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geqslant 0$，若存在上极限 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{p_k} = L$，则当 $L < 1$ 时级数收敛；若存在（有限或无穷）上极限 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{p_k} = L$，则当 $L > 1$ 或 $L = \infty$ 时级数发散。

例题 2.5 (2597/广义 Cauchy 根值判别法）研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$ 敛散性

解 由 $\cos n \in (-1, 1)$，利用函数 $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$ 在 $(-1, 1)$ 上严格单调递增（从 $f'(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2} > 0$ 可知）得 $0 < \dfrac{1+\cos n}{2+\cos n} < \dfrac{2}{3}$，又利用 $2 - \dfrac{\ln n}{n} > 1$，就有

$$0 < \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} < \frac{1+\cos n}{2+\cos n} < \frac{2}{3}$$

可见 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$，由广义 Cauchy 根值判别法 (2.2.2) 得级数收敛

定理 2.8 (D'Alembert 比值判别法)

(D'Alembert[a]比值判别法) 设非负项数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$，若 $(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k_0): p_k > 0$，且

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1 \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1\right), k \geqslant k_0 \geqslant 1$$

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ 收敛（发散）

[a]让 · 勒朗 · 达朗贝尔 (Jean le Rond d'Alembert,1717.11.17- 1783.10.29) 法国著名的数学家、物理学家、哲学家和天文学家。他是数学分析的主要开拓者和奠基人，也是十八世纪为 Newton 力学体系的建立作出卓越贡献的科学家之一。

证明 设满足不等式 $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1$，则这时序列 $\{p_k\}$ 为不减正项序列，则不收敛于零，不满足级数收敛必要条件 (2.1)，则级数发散。

设满足不等式 $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1$，利用 $q = \frac{q^{k+1}}{q^k}$ 得到条件可以记为 $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{q^{k+1}}{q^k}$ 通项为 q^k 的级数在 $0 < q < 1$ 上收敛，则由第三比较定理 (2.2.1)，级数收敛。

注 D'Alembert 比值判别法条件 $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1$ 不可以减弱为 $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$，例如调和级数通项 $p_k = \frac{1}{k}$ 满足 $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k}{k+1} < 1$，但该级数发散

定理 2.9 (极限形式 D'Alembert 比值判别法)

设非负项数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geqslant 0$，若存在（有限或无穷）极限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

则当 $L < 1$ 时级数收敛，当 $L > 1$ 或 $L = \infty$ 时级数发散。

证明 类比极限形式 Cauchy 根值判别法 (2.2.2) 证明，替换 $\sqrt[k]{p_k}$ 为 $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ 即证。

注 若极限 L 等于 1，则不能得出关于级数敛散性的结论，此时判别法失效

推论 2.3 (广义 D'Alembert 比值判别法)

设非负项数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geqslant 0$，若存在上极限 $\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$，则当 $L < 1$ 时级数收敛；若存在下极限 $\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$，则当 $L > 1$ 或 $L = \infty$ 时级数发散

命题 2.7 (Cauchy 根值判别法与 D'Alembert 比值判别法可解性)

若正项数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 存在极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ 也存在。逆命题不成立。

证明 设 $\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$，记 $a_1 = p_1, a_2 = \frac{p_2}{p_1}, \ldots, a_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$ 显然当 $k \to \infty$ 时 $a_k \to L$ 由引理 (2.5.1) 得

$$\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\frac{p_k}{p_{k-1}} \cdot \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} \cdots \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1} = \sqrt[k]{a_k \cdot a_{k-1} \cdots a_1} \to L, k \to \infty$$

即证。由反例 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^k}{2^k}$ 即有逆命题不成立。

注 这意味着 Cauchy 根值判别法强于 D'Alembert 比值判别法。但计算中 D'Alembert 比值判别法往往更方便，Cauchy 根值判别法常需借助沃利斯 (Wallis) 公式和斯特林 (Stirling) 公式。

例题 2.6 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$$

的绝对收敛与条件收敛性

解 借助 Taylor 展开和 Cauchy 根值判别法即可求解，或使用 Gauss 比值判别法

命题 2.8 (Wallis 公式)

关于双阶乘 $(2n)!!$ 和 $(2n-1)!!$ 之比有

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}(n\to\infty)$$

♠

证明 写出积分不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}x\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x$$

就得到

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

将上式加以整理就得到夹逼不等式:

$$\frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{\pi n}<\frac{2n+1}{2n}$$

然后令 $n\to\infty$ 即得.

注 这里的 Wallis 公式是一种便于使用的形式，在文献中常见 Wallis 公式为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\frac{\pi}{2}$$

命题 2.9 (Stirling's approximation)

关于阶乘有

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n(n\to\infty)$$

♠

引理 2.1

设 $\{a_n\}$ 是任意的正数列，那么

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

♡

证明 只证明最右端的不等式，其他不等式的证法是一样的。设

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

如果 $q=+\infty$，不等式当然成立。故不妨设 $q<+\infty$。于是对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$a_{n+1}/a_n<q+\varepsilon$。特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon,\quad\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon,\quad\cdots,\quad\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}<q+\varepsilon$$

把这些不等式的两边分别乘起来，得 $a_{N+k}<(q+\varepsilon)^k a_N$，或者

$$a_n<a_N(q+\varepsilon)^{-N}(q+\varepsilon)^n$$

于是

$$\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(q+\varepsilon)^{-N}}(q+\varepsilon)$$

由此即得

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant q+\varepsilon$$

该引理指出：凡是用 D'Alembert 判别法能判别的，用 Cauchy 判别法也一定能判别；存在 Cauchy 判别法可以判别收敛而 D'Alembert 判别法无法判别的级数。故 Cauchy 比 D'Alembert 适用范围更广

2.2.3 Kummer 判别法及其推论 (Raabe 判别法,Bertrand 判别法,Gauss 判别法)

定理 2.10 (Kummer 判别法)

(Kummer[a]判别法) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 为二正项数值序列

1) 若存在 $\alpha>0$ 和号码 n_0，使得对于一切 $n>n_0$ 有

$$c_n-c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant \alpha$$

则级数 $\sum a_n$ 收敛。

2) 若存在数 n_0 使得对于一切 $n\geqslant n_0$ 成立不等式

$$c_n-c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 0$$

且级数 $\sum\dfrac{1}{c_n}$ 发散，则级数 $\sum a_n$ 也发散。

[a]库默尔 (Kummer,Ernst Eduard,1810.1.29-1893.5.14) 德国数学家，生于索拉乌（Sorau，今波兰扎雷），卒于柏林。在 Kummer 和 Weierstrass 的共同努力下，1861 年柏林大学开办了德国第一个纯粹数学讨论班。Kummer 主要贡献在函数论、数论和几何三个方面。他研究了超几何级数，首次对这些级数的单值群的代换进行计算，其发明的级数变换法在级数的数值计算中有广泛应用；研究了一般射线系统，并用纯代数方法构造了 Kummer 曲面并在研究费马大定理时创立了理想数理论。

证明 不失一般性，由号码为 $n<n_0$ 的项可去除，设 $n_0=1$

1) 由条件有 $c_na_n-c_{n+1}a_{n+1}\geqslant \alpha a_n$，对 $n=1,2,\cdots,m$ 累加得 $c_1a_1-c_{m+1}a_{m+1}\geqslant\alpha\left(a_1+\cdots+a_m\right)$，则有

$$S_m=a_1+\cdots+a_m\leqslant\frac{c_1a_1-c_{m+1}a_{m+1}}{\alpha}<\frac{c_1a_1}{\alpha}$$

则级数 $\sum a_n$ 的一切部分和的集合有界，由定理 (2.2) 有级数收敛

2) 不等式可改写成

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$$

但由条件有级数 $\sum\dfrac{1}{c_n}$ 发散，故根据第三比较定理 (2.2.1) 有级数 $\sum a_n$ 亦发散

注 关于收敛性的结论是对一个级数 $\sum a_n$ 作出的，而同时第二个数列 $\{c_n\}$ 是不固定的，这就使我们能在应用 Kummer 判别法来研究具体的数值级数的收敛性时来根据各种情况作出不同的选择

推论 2.4 (D'Alembert 比值判别法)

在 Kummer 判别法 (2.10) 中对于一切 n 令 $c_n=1$，则级数 $\sum a_n$ 收敛条件为

$$1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\alpha \text{ 或 } \frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1-\alpha$$

发散条件为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\geqslant 0 \text{ 或 } \frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$$

推论 2.5 (Raabe 判别法)

在 Kummer 判别法 (2.10) 中令 $c_n = n - 1$，则当条件
$$n - 1 - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha, \quad \text{即} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha+1}{n}$$
成立时级数 $\sum a_n$ 收敛，而在条件
$$n\frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-1) \geqslant 0 \quad \text{即} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$
成立时级数 $\sum a_n$ 发散

证明 设在 n 充分大时，有
$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1 \text{ 或} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{r}{n}.$$
现在，在 1 与 r 之间取任意一数 $s : 1 < s < r$。因为按一个已知的极限关系有
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} = s$$
于是对充分大的 n 有
$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} < r \text{ 或 } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s > 1 - \frac{r}{n}$$
所以
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s$$
该不等式也可写成
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^s = \frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}$$
右边是收敛级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) (s > 1)$ 的两个相邻项之比；根据第三比较定理，即可证明了级数 (A) 的收敛性

如果在某项以后
$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$$
则立即可得
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$
应用第三比较定理到级数 (A) 上与发散级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ 上，可以得出级数 (A) 发散的结论

推论 2.6 (Raabe 检验法的极限形式)

设 $\mathscr{R}_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 有极限（有限或无限）
$$\lim \mathscr{R}_n = \mathscr{R}$$
于是在 $\mathscr{R} > 1$ 时该级数收敛，而在 $\mathscr{R} < 1$ 时该级数发散

注 Raabe 判别法的实质是将所给的级数与调和级数作比较

注 Raabe 判别法比 D'Alembert 比值判别法好，原因是：如果极限 $\mathscr{D} = \lim \mathscr{D}_n$ 存在且异于 1，则 $\mathscr{R}_n = n(1 - \mathscr{D}_n)$ 有一极限 $\mathscr{R}$，在 $\mathscr{D} < 1$ 时它等于 $+\infty$ 而在 $\mathscr{D} > 1$ 时它等于 $-\infty$。如此，若达朗贝尔检验法能对一给定级数收敛与否给出答案，则拉比检验法更不成问题能给出答案；进一步说，所有这些情形都被 $\mathscr{R}$ 的两个可能值即 $\pm\infty$ 所包括了，如此，所有其他 $\mathscr{R}$ 值（除 $\mathscr{R} = 1$）外也能给出收敛性问题的答案（相应于达朗贝尔检验法不能给出答案的那些情形，因为此时 $\mathscr{D} = 1$）

推论 2.7 (Bertrand 判别法)

下列命题成立:

1) 设正项数值级数 $\sum a_n$, 若存在 $\alpha>0$ 和号码 n_0, 使得时对一切 $n>n_0$ 成立不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1+\alpha}{n\ln n}$$

则正项数值级数 $\sum a_n$ 收敛

2) 设正项数值级数 $\sum a_n$, 若对 f 一切足够大的 n 都成立不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}$$

则正项数值级数 $\sum a_n$ 发散

证明 1) 在 Kummer 判别法 (2.10) 中令 $c_n=(n-1)\ln(n-1), n>2$ 则收敛条件变为

$$(n-1)\ln(n-1)-(n\ln n)\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\alpha$$

即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1-\frac{1}{n}+\frac{(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\ln n}-\frac{\alpha}{n\ln n}\tag{2.2}$$

进而由

$$(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}>-1$$

及不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1+\alpha}{n\ln n}\leqslant 1-\frac{1}{n}+\frac{(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\ln n}-\frac{\alpha}{n\ln n}$$

推出不等式 (2.2)

2) 在 Kummer 判别法 (2.10) 中令 $c_n=(n-2)\ln(n-1)$, 级数 $\sum a_n$ 发散的条件为

$$(n-1)\ln n\frac{a_{n+1}}{a_n}-(n-2)\ln(n-1)\geqslant 0$$

则只需证此不等式为 Bertrand 判别法中发散条件

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}$$

的推论即可, 亦即只需证对于一切大于某 n_0 的 n 成立

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}\geqslant\frac{n-2}{n-1}\quad\frac{\ln(n-1)}{\ln n}\tag{2.3}$$

由下列不等式 $(n\geqslant 3)$:

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<-\frac{1}{n}$$

$$1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}\geqslant\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n\ln n}\right)\geqslant\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)$$

则有不等式 (2.3) 成立

注 证明指出, Bertrand 判别法 (2.7) 的收敛条件蕴含 Kummer 判别法 (2.10) 收敛条件

推论 2.8 (极限形式 Raabe 判别法)

设正项数值级数 $\sum a_n, a_n>0$, 若

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$$

则有

(a) 当 $p>1$ 时级数收敛

(b) 当 $p<1$ 时级数发散

推论 2.9 (Gauss 判别法)

设正项数值级数 $\sum a_n, a_n>0$，若

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

其中 $|\theta_n|<C, \varepsilon>0$，则有

(a) 当 $\lambda>1$ 时级数收敛；(b) 当 $\lambda<1$ 时级数发散；

(c) 当 $\lambda=1$ 时，在 $\mu>1$ 时级数收敛，而在 $\mu\leqslant 1$ 时级数发散

命题 2.10 (极限形式 Gauss 判别法)

设正项数值级数 $\sum a_n, a_n>0$，若

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)(n\to\infty)$$

则有

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)(n\to\infty)$$

其中 $\varepsilon>0$ 为无穷小量，并且若 $p>0$，则当 $n\to\infty$ 时 $a_n\downarrow 0$（即从 $n\geqslant n_0$ 开始，a_n 单调递减，且在 $n\to\infty$ 时 $a_n\to 0$）

证明 只需证 $a_n n^{p-\varepsilon}\to 0(n\to\infty)$，有

$$a_n n^{p-\varepsilon}=a_1\prod_{k=1}^{n-1}\left[\frac{a_{k+1}}{a_k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{p-\varepsilon}\right]=a_1\mathrm{e}^{b_n}$$

其中

$$\begin{aligned}b_n&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[(p-\varepsilon)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln\frac{a_k}{a_{k+1}}\right]\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[(p-\varepsilon)\left(\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)-\left(\frac{p}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right]\\&=-\varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\end{aligned}$$

又由 $\varepsilon>0$ 有 $b_n\to-\infty(n\to\infty)$，即 $\mathrm{e}^{b_n}\to 0(n\to\infty)$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n n^{p-\varepsilon}=0$

当 $p>0$ 时，从条件可知当 n 充分大时有 $a_n>a_{n+1}$，即单调递减，又由 $\varepsilon>0$ 可取任意小，只要取 $\varepsilon<p$ 即有 $a_n\to 0$

例题 2.7 （2600/极限形式 Gauss 判别法）研究级数 (2.4) 敛散性。

$$\sum_{n=1}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}} \tag{2.4}$$

解 [方法一：极限形式 **Guass** 判别法] 对比值 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 分析如下

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}=\exp\left[(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]\\&=\exp\left[(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\right]\\&=\exp\left[\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=1+\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to\infty)\end{aligned}$$

由极限形式 Guass 判别法 (2.10) 可见，当 $p > \frac{3}{2}$ 时级数收敛，而当 $p \leqslant \frac{3}{2}$ 时级数发散。

解 [方法二：**Stirling 公式**] 利用 Stirling 公式 (2.2.2) 就有

$$a_n \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{1}{n^p} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}} (n \to \infty)$$

即得。

推论 2.10 (极限形式 Kummer 判别法)

设 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 为二正项数值序列，设 Kummer 序列

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

假定 Kummer 序列 $\mathcal{K}_n$ 具有极限（有限的或无穷的）：$\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$，则当 $\mathcal{K} > 0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，而当 $\mathcal{K} < 0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

注 Gauss 判别法是 D'Alembert 比值判别法，Raabe 判别法及 Bertrand 判别法推论，即是 Kummer 判别法推论。但 Gauss 判别法仅在有 Maclaurin 分解时可用，如例题 (2.7)。因此 Kummer 判别法并不适用所有情况。另外已证明序列 $\{c_n\}$ 并没有统一的初等计算方式。这时往往在实际应用中都选用 Cauchy-Maclaurin 积分判别法 (2.11)。

2.2.4 Cauchy-Maclaurin 积分判别法与 Ermakov 判别法

定理 2.11 (Cauchy-Maclaurin 定理)

设 $f(x)$ 非负且在 $x \geqslant 1$ 上不增，则数值级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + f(2) + \dots \tag{2.5}$$

收敛当且仅当序列 $\{a_n\}$：

$$a_n = \int_1^n f(x)dx \tag{2.6}$$

收敛

证明 固定任意 $k \geqslant 2$，观察 $x \in [k-1; k]$，由条件 $f(x)$ 在该区间上不增，有不等式

$$\forall x \in [k-1, k] : f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1) \tag{2.7}$$

由函数在区间上有界性和单调性意味着函数在该区间上可积性。在区间 $[k-1, k]$ 上整合不等式 (2.7) 则有 $\int_{k-1}^k f(k)dx \leqslant \int_{k-1}^k f(x)dx \leqslant \int_{k-1}^k f(k-1)dx$。这相当于双重不等式 $f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(x)dx \leqslant f(k-1)$。该不等式在 $k \geqslant 2$ 上成立。取任意 $n > 2$，则对 $k = 2, k = 3, \dots k = n$ 有不等式

$$f(2) \leqslant \int_1^2 f(x)dx \leqslant f(1), \cdots, f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(x)dx \leqslant f(n-1)$$

累加得 $\sum_{k=2}^n f(k) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$。记级数 (2.5) 的 n 阶部分和为 S_n，有不等式

$$S_n - f(1) \leqslant a_n \leqslant S_{n-1} \tag{2.8}$$

由条件 $f(x)$ 非负，则由公式 (2.6) 知 $\{a_n\}$ 为不减序列，则其当且仅当其有界时收敛。另一方面由非负项级数审敛准则 (2.2) 有级数 (2.5) 收敛等价于 S_n 有界。由不等式 (2.8) 有序列 $\{a_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 同时有界或者同时无界。

推论 2.11 (Cauchy-Maclaurin 积分判别法的几何解释)

级数的敛散性取决于其对应的函数的反常积分的敛散性。如果用曲线表出函数 $f(x)$（如图），则积分 $F(x)$ 将表示这曲线与 x 轴及两纵坐标线所围的面积，积分 $F(\infty)$ 则在某种意义上可以看作整个向右伸展的曲线下图形的面积。另一方面，级数的项 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 表示在 $x = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 各点上的纵坐标，也可以说是以 1 为底、以上述各纵坐标为高的各矩形的面积。如此，级数之和无非就是外矩形面积之和，而与内矩形之和相差只在第一项。这使得上面所建立的结果成为一目了然的事情：如果曲线图形的面积是有限的，则更不待言，其所包含的阶梯状图形面积也是有限的，故该级数收敛；若曲线面积无限，则包含它的阶梯状图形面积也无限，故在此情形该级数发散 ♡

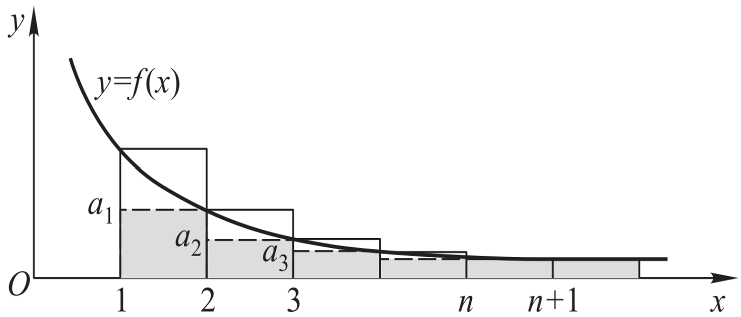


图 2.1: Cauchy-Maclaurin 几何解释

推论 2.12

（Cauchy-Maclaurin 积分判别法推广）固定正整数 m，设 $f(x)$ 非负且在 $x \geqslant m$ 不增，则数项级数

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(1) + f(2) + \dots$$

收敛当且仅当序列 $\{a_n\}$：

$$a_n = \int_m^n f(x)dx, n > m$$

收敛 ♡

注 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ 和 $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln \alpha}$ 对于任意 α，Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法失效，这时应当使用 Cauchy-Maclaurin 积分判别法，例如例题 (2.8)。

例题 2.8 （Cauchy-Maclaurin 积分判别法）研究几何级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ 敛散性

解 当 $\alpha \leqslant 0$ 时显然不满足数值级数收敛必要条件 (2.1)，则级数发散；当 $\alpha > 0$ 时观察 $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$，由 Cauchy-Maclaurin 定理 (2.11) 有当 $x \geqslant 1$ 时级数敛散性等价于序列 $\{a_n\}$ 敛散性，这里

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{n^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}, \alpha \neq 1 \\ \ln n, \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

$\{a_n\}$ 在 $\alpha > 1$ 时收敛，在 $\alpha \leqslant 1$ 时发散，则级数 $\{a_n\}$ 在 $\alpha > 1$ 时收敛，在 $\alpha \leqslant 1$ 时发散

命题 2.11 (Ermakov 判别法)

（Ermakov[a]判别法）[b]设数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$，其中 $f(n)$ 为当 $x = n$ 时对任意 $x \geqslant 1$ 所确定的某

一函数 $f(x)$ 的值。设该函数为连续的正的单调递减函数，若对充分大的 x（例如 $x \geqslant x_0$）成立不等式

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \leqslant q < 1$$

则级数收敛；若（对 $x \geqslant x_0$）成立不等式

$$\frac{f\left(e^x\right)\cdot e^x}{f(x)} \geqslant 1$$

则级数发散

[a]叶尔马科夫 (1845-1922) 俄罗斯数学家。

[b]叶尔马科夫 (1845-1922) 俄罗斯数学家

证明 设第一个不等式成立，对任意 $x \geqslant x_0$ 有（代换 $t = e^u$ ）

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f\left(e^u\right)e^u du \leqslant q\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

由此

$$\begin{aligned}(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt &\leqslant q\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt\right] \\ &\leqslant q\left[\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt - \int_{x}^{e^x} f(t)dt\right] \leqslant q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt\end{aligned}$$

因为

$$e^x > x \tag{2.9}$$

在后一方括号内被减项为正，在这种情况下有

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \leqslant \frac{q}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$$

在不等式两端加上 $\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$ 得到

$$\int_{x_0}^{e^x} f(t)dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt = L$$

考虑到式 (2.9)，从而更有

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt \leqslant L \quad (x \geqslant x_0)$$

因为随 x 的增加, 积分值增加, 则当 $x \to \infty$ 时存在有限的极限 $\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$ ，按照 Cauchy-Maclaurin 积分判别法，级数收敛。

假设现在是第二个不等式成立，则

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \geqslant \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

并且若在不等式两端加上 $\int_{x}^{e^{x_0}} f(t)dt$ 则

$$\int_{x}^{e^x} f(t)dt \geqslant \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt = \gamma > 0$$

(因为由 (2.9) 式，$x_0 < e^{x_0}$)，现定义序列 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, \cdots$ ，其中令 $x_n = e^{x_{n-1}}$；按照已证明的

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt \geqslant \gamma$$

于是

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_2} f(t)dt \geqslant n\gamma$$

由此显然有

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = +\infty$$

由 Cauchy-Maclaurin 积分判别法，级数发散

注 Ermakov 判别法在 Cauchy-Maclaurin 积分判别法的应用范围内效果很好，而且该判别法陈述中并不包含积分概念。另外，连续性的要求可以省略

2.3 变号级数及其敛散性判别法

2.3.1 变差与有界变差序列

定义 2.7 (有界变差序列)

设序列 $\{v_k\}$，若序列

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}-v_k| = |v_2-v_1|+|v_3-v_2|+\dots \tag{2.10}$$

收敛则称 $\{v_k\}$ 为有界变差序列 (последовательность с ограниченным изменением)，称序列 (2.10) 的极限 V 为序列 $\{v_k\}$ 的全变差 (полное изменение)。

命题 2.12 (有界变差充分条件)

单调有界序列必为有界变差序列

证明 易知任意单调有界序列必收敛。记 $v=\lim\limits_{n\to\infty} v_n$，记级数 (2.10) 的 n 阶部分和为 S_n。由单调性有 $\forall k$ 都满足 $v_{k+1}-v_k$ 要么不大于零要么不小于零，则当 $n\to\infty$ 时有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}|v_{k+1}-v_k| = \left|\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k)\right| = |v_{n+1}-v_1| \to |v-v_1|$$

则级数 (2.10) 收敛性得证，则序列 $\{v_k\}$ 有界变差

命题 2.13 (有界变差必要条件)

有界变差序列必收敛

证明 设序列 $\{v_k\}$，若序列 (2.10) 收敛，则去掉绝对值，级数 (2.11) 也收敛。观察

$$\sum_{k=1}^{\infty}(v_{k+1}-v_k) \tag{2.11}$$

并设 (2.11) 收敛于 S，其部分和序列为 $\{S_n\}$。由 $S_n=(v_2-v_1)+(v_3-v_2)+\dots+(v_{n+1}-v_n)=v_{n+1}-v_1$，则有当 $n\to\infty$ 时 $v_{n+1}=S_n+v_1\to S+v_1$，则 $\{v_n\}$ 收敛性得证

2.3.2 Abel 恒等式与 Dirichlet-Abel 判别法

定理 2.12 (Abel 恒等式)

(Abel[a]恒等式) 设给定二序列 $\{u_n\},\{v_n\}$，取二任意序号 n 和 p，记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，则有 Abel 恒等式

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k\left(v_k-v_{k+1}\right)+S_{n+p}v_{n+p}-S_nv_{n+1} \tag{2.12}$$

也可记为

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k \Delta S_k = S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k \Delta v_k$$

其中 $\Delta S_k = S_k - S_{k-1} = u_k, \Delta v_k = v_{k+1} - v_k$

[a]尼尔斯 · 亨利克 · 阿贝尔 (Niels Henrik Abel,1802.8.5-1829.4.6) 挪威数学家，最著名的一个成果是首次完整地给出了高于四次的一般代数方程没有一般形式的代数解的证明。他也是椭圆函数领域的开拓者，Abel 函数的发现者。

证明

当 $p=1$，等式 (2.12) 右端和为零，得 $u_{n+1}v_{n+1} = S_{n+1}v_{n+1} - S_n v_{n+1}$。由 $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 显然成立。当 $p \geqslant 2$，由 $u_k = S_k - S_{k-1}$ 代入到等式 (2.12) 左端，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k\left(v_k - v_{k+1}\right) + S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}\end{aligned}$$

则等式 (2.12) 得证

注： 从 Abel 恒等式记法可以看出，它本质上是分部积分的差分近似。

定理 2.13 (Abel 变换-Abel 恒等式的另一种表述)

设给定二序列 $\{a_n\},\{b_n\}$，记 $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i (k=1,2,\cdots)$，则

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1}\left(a_{k+1} - a_k\right) B_k$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} a_k b_k &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{p} a_k\left(B_k - B_{k-1}\right) = a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{p} a_k B_k - \sum_{k=2}^{p} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k+1} B_k + a_p B_p = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1}\left(a_{k+1} - a_k\right) B_k\end{aligned}$$

其中 $\sum_{k=2}^{p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=1}^{p-1} a_{k+1} B_k$

注 Abel 变换公式又称为分布求和公式

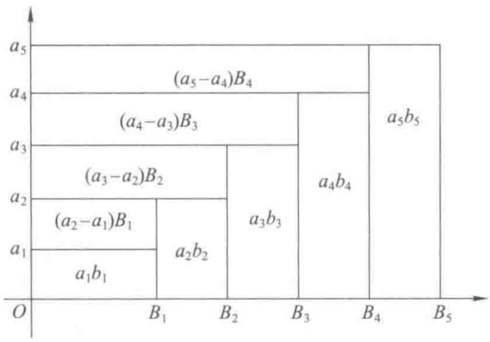


图 2.2: Abel 变换直观示意

上图是当 $a_n > 0, b_n > 0$，且 $\{a_n\}$ 单调增加时，Abel 变换的一个直观的示意。图中矩形 $[0,B_5]\times[0,a_5]$ 被

分割成 9 个小矩形，根据所标出的各小矩形的面积，即得到 $p=5$ 的 Abel 变换：

$$\sum_{k=1}^{5} a_k b_k = a_5 B_5 - \sum_{k=1}^{4} \left(a_{k+1} - a_k\right) B_k$$

事实上，Abel 变换就是离散形式的分布积分公式，记 $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，则分部积分公式可以写成

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)G(b) - \int_a^b G(x)\mathrm{d}f(x)$$

将数列的通项类比于函数，求和类比于求积分，求差类比于求微分，$a_{k+1}-a_k$ 对应于 $\mathrm{d}f(x)$

引理 2.2 (Abel 引理)

设

(1) $\{a_k\}$ 为单调数列

(2) $\{B_k\}\left(B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i, k=1,2,\cdots\right)$ 为有界数列，即存在 $M>0$，对一切的 k，成立 $|B_k|\leqslant M$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leqslant M\left(|a_1| + 2|a_p|\right)$$

证明 由 Abel 变换得

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leqslant |a_p B_p| + \sum_{k=1}^{p-1} |a_{k+1}-a_k|\,|B_k| \leqslant M\left(|a_p| + \sum_{k=1}^{p-1} |a_{k+1}-a_k|\right)$$

由于 $\{a_k\}$ 单调，所以

$$\sum_{k=1}^{p-1} |a_{k+1}-a_k| = \left|\sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1}-a_k)\right| = |a_p - a_1|$$

于是得到

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leqslant M\left(|a_1| + 2|a_p|\right)$$

定理 2.14 (Abel 第一判别法)

设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ 满足条件

1) 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 具有有界部分和序列 $\{S_n\}$

2)$\{v_k\}$ 为有界变差的无穷小序列

则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ 收敛

证明 由 $\{S_n\}$ 有界得 $(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N}):|S_n|\leqslant M$。由 $\{v_k\}$ 为有界变差无穷小序列，则

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_1(\varepsilon))(\forall n\geqslant N_1)(\forall p\in\mathbb{N}):|v_n|<\frac{\varepsilon}{3M} \tag{2.13}$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_2(\varepsilon))(\forall n\geqslant N_2)(\forall p\in\mathbb{N}):\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k-1}-v_k| < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{2.14}$$

由 Abel 恒等式 (2.12) 与三角不等式有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k\left(v_k - v_{k+1}\right)\right| + |S_{n+p}v_{n+p}| + |S_n v_{n+1}| \leqslant$$

利用 $|S_n|\leqslant M$ 以及当 $\forall n\geqslant N=\max\{N_1,N_2\}$ 时估计 (2.13)(2.14) 有

$$\leqslant M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_{n+p}| + |v_{n+1}|\right) < M\left(\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon$$

则由数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 即证级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ 收敛

定理 2.15 (Abel 第二判别法)

设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ 满足条件：

1) 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛

2) $\{v_k\}$ 为有界变差序列

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ 收敛。

♡

证明 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ 收敛有其部分和序列 $\{S_n\}$ 有界，则 $(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N}):|S_n|\leqslant M$。又序列 $\{v_n\}$ 有界变差则有估计 (2.15)

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N_1(\varepsilon))(\forall n\geqslant N_1)(\forall p\in\mathbb{N}):\sum_{k=n+1}^{n+p}|v_{k-1}-v_k|<\frac{\varepsilon}{3M} \tag{2.15}$$

记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ 和为 S，由有界变差必要条件 (2.13) 有 $\{v_k\}$ 收敛，设其收敛向 v，这时有当 $n\to\infty$ 时有 $S_{n+p}v_{n+p}-S_{n-1}v_n\to Sv-Sv=0$ ，则进一步有

$$(\exists N_2(\varepsilon))(\forall n\geqslant N_2)(\forall p\in\mathbb{N}):|S_{n+p}v_{n+p}-S_nv_{n+1}|<\frac{2\varepsilon}{3} \tag{2.16}$$

由 Abel 恒等式 (2.12) 和三角不等式有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k\left(v_k-v_{k+1}\right)\right|+|S_{n+p}v_{n+p}-S_nv_{n+1}|\leqslant$$

利用 $|S_n|\leqslant M$ 以及 $\forall n\geqslant N=\max\{N_1,N_2\}$ 时估计 (2.15)(2.16) 有

$$\leqslant M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|v_k-v_{k+1}|\right)+|S_{n+p}v_{n+p}-S_nv_{n+1}|<M\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

由数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 即得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k v_k$ 收敛

定理 2.16 (Dirichlet-Abel 判别法/признак Дирихле-Абеля)

若下列条件满足：

1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ 具有有界部分和序列

2) $\{v_k\}$ 不增且为无穷小序列

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k v_k$ 收敛。

♡

证明 条件 1 已经满足 Abel 第一判别法 (2.14) 的第一个条件。由 $\{v_k\}$ 不增且为无穷小序列有序列 $\{v_k\}$ 单调有界，又由命题 (2.3.1) 为有界变分序列，则满足 Abel 第一判别法 (2.14) 的第二个条件，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k v_k$ 收敛。

定理 2.17 (一般意义 Dirichlet-Abel 判别法)

下列命题成立

(A) (Abel 判别法) 若数列 b_n 单调有界而级数 $\sum a_n$ 收敛，则级数 $\sum a_n b_n$ 也收敛。

(D) (Dirichlet 判别法) 若数列 b_n 单调且当 $n\to\infty$ 时 $b_n\to 0$，而级数 $\sum a_n$ 部分和序列 s_n 有界，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。

♡

证明

证法一：

仅考虑 $b_n \geqslant 0$ 且 b_n 单调递减的情形（若 $b_n \leqslant 0$，则改变一切 a_n 和 b_n 的符号即可。而若 $b_n \uparrow$，则 b_n 必可表为 $b_n = b_0 - d_n$，其中 $b_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$。则定理归结为研究级数 $\sum a_n d_n$ ，此时已有 $d_n \downarrow$）

由 Abel 恒等式 (2.12)，使用记号 $A_k = s_k - s_n$ 并由 $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$ 得

$$\begin{aligned}|T_{n,p}| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|A_{n+p}b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k\left(b_k - b_{k+1}\right)\right| \\ &\leqslant |A_{n+p}|\, b_{n+p} + \max_{n<k<n+p} |A_k| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \leqslant \max_{n<k\leqslant n+p} |A_k|\, b_{n+1}\end{aligned}$$

考虑情形 (A), 由序列 b_n 有界，则 $(\exists c>0)(\forall n): |b_{n+1}| < c$，又由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall k > n): |A_k| = |\sum_{m=n+1}^{k} a_m| = |s_k - s_n| \leqslant |s_k| + |s_n| < \varepsilon$$

则对于上述 n 和 p，有关于 $T_{n,p}$ 估计

$$|T_{n,p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant c\varepsilon$$

而由 ε 任意而 c 固定，则上面的不等式表明级数 $\sum a_n b_n$ 满足数值级数 Cauchy 准则 (2.1)，则级数收敛，Abel 判别法得证。

在情形 (D)，级数 $\sum a_n$ 部分和序列 $\{A_k\}$ 有界，则 $(\exists c)(\forall k \in \mathbb{N}): |A_k| < c$。注意到 $b_n \to 0$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，足够大的 $n > n_0(\varepsilon)$ 和任意的 $p \geqslant 1$ 有估计式

$$|T_{n,p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant c\varepsilon$$

同情形 (A)，由数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 有级数 $\sum a_n b_n$ 收敛

证法二：

证 (A)：若 Abel 判别法条件满足，设 $|a_n| \leqslant M$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得对于一切 $n > N$ 和 $p \in \mathbf{N}^+$，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon$$

对 $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$ 应用 Abel 引理，即得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon\left(|a_{n+1}| + 2\,|a_{n+p}|\right) \leqslant 3M\varepsilon$$

(D) 若 Dirichlet 判别法条件满足，由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，因此对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得对于一切 $n > N$，成立

$$|b_n| < \varepsilon$$

设 $|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leqslant M, \quad (\forall n)$，令 $A_k = \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i (k = 1, 2, \cdots)$，则

$$|A_k| = \left|\sum_{i=1}^{n+k} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant 2M$$

应用 Abel 引理，同样可得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant 2M\left(|b_{n+1}| + 2\,|b_{n+p}|\right) < 6M\varepsilon$$

对一切 $n > N$ 与一切正整数 p 成立

根据 Cauchy 收敛原理 (2.1), 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

注 Leibniz 级数的收敛性和 Abel 判别法都是 Dirichlet 判别法的特殊情况

例题 2.9 （2668/Dirichlet 判别法）研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 敛散性

解 由分解

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{(-1)^n}{2n}-\frac{(-1)^n}{2n}\cos 2n$$

将原级数分解为收敛级数 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 与级数 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos 2n}{n}$ 之和。对第二个级数，下证 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k$ 关于 n 有界。利用积化和差有 $2\cos 1\cos 2k=\cos(2k+1)+\cos(2k-1)$，进一步得

$$\begin{aligned}&2\cos 1\left[-\cos 2+\cos 4-\cdots+(-1)^n\cos 2n\right]\\&=-[\cos 1+\cos 3]+[\cos 3+\cos 5]-\cdots+(-1)^n[\cos(2n-1)+\cos(2n+1)]\\&=(-1)^n\cos(2n+1)-\cos 1\end{aligned}$$

则 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k\right|\leqslant\dfrac{1}{\cos 1}$ 有界，由 Dirichlet 判别法知第二个级数收敛，则原级数收敛

注 将原级数的各项取绝对值后，可利用 $\dfrac{\sin^2 n}{n}=\dfrac{1}{2n}(1-\cos 2n)$，将绝对值级数分解为发散级数 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 与另一个级数 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$ 之和。同理即证证明第二个级数收敛

2.3.3 交错级数与 Leibniz 判别法

定义 2.8 (Leibniz 级数)

若一个序列相邻项异号，则称序列为交错 (знакочередующимся) 序列；若交错级数项的模为收敛于零的不增序列，则称该交错级数为 Leibniz 级数（或 Leibniz 型级数）♣

定理 2.18 (Leibniz 判别法)

Leibniz 级数必收敛 ♡

证明 观察 Leibniz 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k=p_1-p_2+p_3+\ldots,p_k>0 \tag{2.17}$$

记 $u_k=(-1)^{k-1},v_k=p_k$，则这时级数 $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ 有有界部分和序列，满足 Abel 第一判别法 (2.14) 所有条件 (以及 Dirichlet-Abel 判别法 (2.16) 所有条件)，则级数 (2.17) 收敛

注 亦称 Leibniz 判别法为：若 $a_n=(-1)^n b_n,b_n\geqslant 0$，且 $\{b_n\}$ 从某项 n_0 开始，单调地趋向零，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。称满足该条件的级数为 Leibniz 级数

注 （偏差估计）讨论 Leibniz 级数 (2.17) 部分和与其总和 S 的偏差幅度问题。考虑部分和的两个子序列。

$$S_{2n}=(p_1-p_2)+(p_3-p_4)+\ldots+(p_{2n-1}-p_{2n})$$

序列 $\{S_{2n}\}$ 不降且当 $n\to\infty$ 时 $S_{2n}\to S$

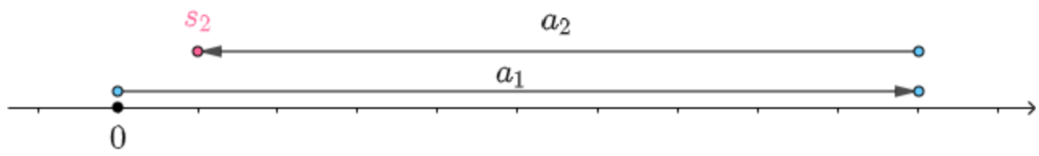
$$S_{2n-1}=p_1-(p_2-p_3)-(p_4-p_5)\ldots-(p_{2n-2}-p_{2n-1})$$

序列 $\{S_{2n}\}$ 不增且当 $n\to\infty$ 时 $S_{2n-1}\to S$，则 $\forall n\in\mathbb{N}:S_{2n}\leqslant S\leqslant S_{2n-1}$。利用 $S_{2n-1}-S_{2n}=p_{2n}$ 得

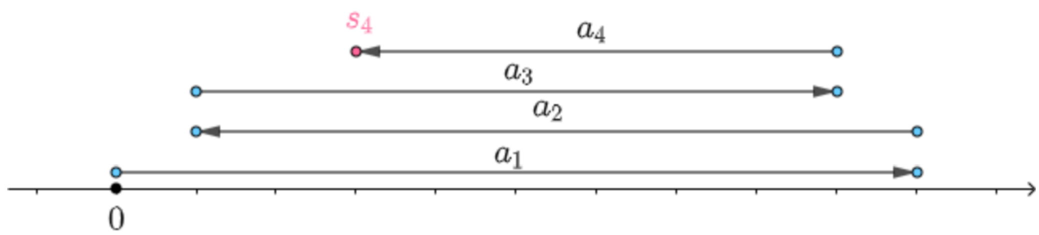
$$S-S_{2n}\leqslant S_{2n-1}-S_{2n}=p_{2n},S_{2n-1}-S\leqslant S_{2n-1}-S_{2n}=p_{2n}\leqslant p_{2n-1},$$

则证明了估计 $|S_n-S|\leqslant p_n$ 该估计意味着级数 (2.17) 的部分和与其总和最多相差部分和的最后一项的模

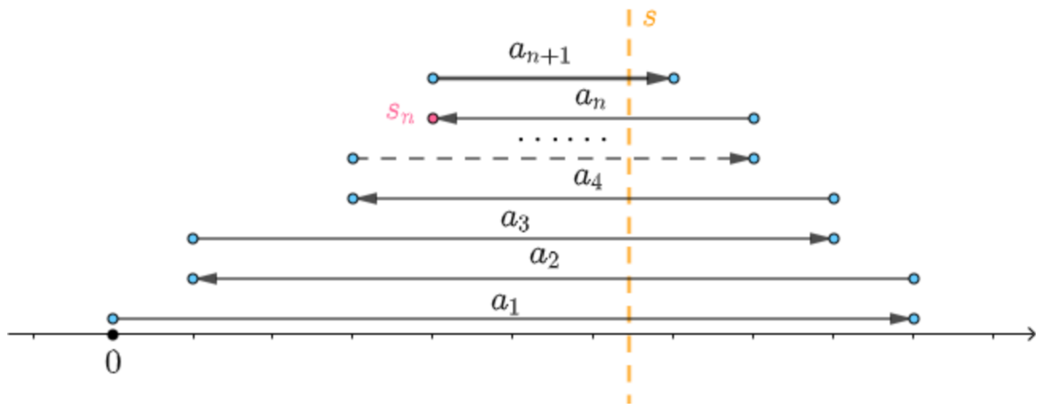
假设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 符合莱布尼兹判别法的三个条件，那么它的部分和 $s_2=a_1-a_2$，因为 $a_1>a_2>0$，所以画在数轴上如下所示（向右的箭头表示“加”，向左的箭头表示“减”）：



同理，部分和 $s_4=a_1-a_2+a_3-a_4$ 可以表示如下：



因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，所以部分和 s_n 会越来越靠近极限 s，也就是收敛于 s：



命题 2.14 (级数分组求和)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，若级数满足：
(a) 当 $n \to \infty$ 时，此级数通项 a_n 趋向 0；
(b) 在不变更各项顺序的情况下分别组合级数各项所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛；
(c) 在项 $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \, (1 = p_1 < p_2 < \cdots)$ 中相加项 a_i 数目有界
则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

证明 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 定义知，若记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和序列为 $\{S_n\}$，则问题等价于从 $\{S_n\}$ 的一个子序列 $\{S_{p_{n+1}-1}\}$ 收敛推出序列收敛。设上述子列极限为 S，则只需证明 $S_n \to S(n \to \infty)$。将条件 (c) 中的项数上界记为 M，由条件 (a) 有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1)(\forall n > N_1) : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

然后由条件 (b) 有

$$(\exists N_2)(\forall k \geqslant N_2) : |A_1 + \cdots + A_k - S| = \left|S_{p_{k+1}-1} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是只要取 $N = \max\{p_{N_2+1} - 1, N_1\}$，对于 $n > N$ 的 S_n，就存在 $k \geqslant N_2$，使得 $p_{k+1} \leqslant n \leqslant p_{k+2} - 1$。则有

$$\begin{aligned} |S_n - S| = |a_1 + \cdots + a_n - S| &\leqslant \left|a_1 + \cdots + a_{p_{k+1}-1} - S\right| + \left|a_{p_{k+1}} + \cdots + a_n\right| \\ &\leqslant \left|S_{p_{k+1}-1} - S\right| + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon \end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ 得证。

注 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为同号级数，则其部分和序列单调，则可以从其一个子列收敛推出部分和数列收敛，因此本题结论主要用于交错级数

命题 2.15 (Leibniz 判别法)

设在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ 中 $b_n > 0$，且当 $n \to \infty$ 时 $b_n \to 0$。由此是否可知该级数收敛？考察例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

证明 从通项如下分解：

$$(-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{2}{n} + \frac{1}{n}$$

则可从调和级数发散推出该级数发散

注 该例说明 Leibniz 判别法中，b_n 单调趋于 0 的条件不能减弱为 $b_n \to 0(n \to \infty)$

例题 2.10 (2701) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 不一定收敛

解 对于通项为 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} (n \geqslant 2)$，级数发散；而用与这个通项等价的 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为通项构成的级数由 Leibniz 判别法收敛

2.4 绝对值级数及其敛散性判别法

2.4.1 绝对收敛与 Weierstrass 比较判别法

定义 2.9 (绝对收敛)

设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \in \mathbb{R}$ ，若对应绝对值级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \in \mathbb{R}$ 绝对收敛

♣

推论 2.13 (Weierstrass 比较判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为二级数。设 $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) : |a_n| \leqslant b_n$。则若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

♡

证明 实际上，由第一比较定理 (2.2.1) 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

注 可简述为若一级数项（绝对值）受控于收敛数项级数项，则原级数绝对收敛

命题 2.16 (数值级数绝对收敛必要不充分条件)

绝对收敛级数必收敛。逆命题不成立

♠

证明 由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ 收敛及数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall p \in \mathbb{N}) : \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

对 p 使用三角不等式有：

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \tag{2.18}$$

由 (2.18) 及数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 则有级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛

下举反例证逆命题不成立。观察级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{2.19}$$

注意级数 (2.19) 项取绝对值为调和级数，已证明调和级数发散。下证级数 (2.19) 收敛。任意 $x \in [0;1]$ 上对 $f(x) = \ln(1+x)$ 由 Maclaurin 公式有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

对余项 $R_{n+1}(x)$ 有估计 $(\forall x \in [0;1]) : |R_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ 。代入 $x = 1$ 得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + R_{n+1}(1), |R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \tag{2.20}$$

记 S_n 为等式 (2.20) 右端前 n 项和，则有估计 $|S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(1)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$。等式右部为无穷小序列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$，由定义，序列 (2.19) 收敛向 $\ln 2$

注 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 的敛散性可以采用正项级数敛散性的判别法来判定。需要指出，虽然一般说来，由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 发散并不能得出 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散，但若用 Cauchy 判别法或 D'Alembert 判别法判断出 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 本身一定发散，这是因为这两个判别法判定发散的依据是级数的通项不趋于 0 ，即不满足收敛的必要条件

推论 2.14 (绝对值级数 Cauchy 根值判别法)

设数值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，且 $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ，则以下命题成立：

a) 若 $\alpha < 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

b) 若 $\alpha > 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

c) 若 $\alpha = 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 既有绝对收敛的，也有发散的

♡

证明 a) 若 $\alpha < 1$，则能选出一数 $q \in \mathbb{R}$，使得 $\alpha < q < 1$。固定数 q，由上极限定义，能求得号码 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时有 $\sqrt[n]{|a_n|} < q$。因此，当 $n > N$ 时有 $|a_n| < q^n$。又因当 $|q| < 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛，则由 Weierstrass 比较判别法 (2.13)，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

b) 由 α 为序列 a_n 的部分极限，找出使 $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \alpha$ 的子数列 a_{n_k}。当 $\alpha > 1$ 时可求得号码 $K \in \mathbb{N}$，使当 $k > K$ 时有 $|a_{n_k}| > 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不满足数值级数收敛必要条件 (2.1)，则级数发散

c) 注意到

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

且

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

而已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，级数 $\frac{1}{n^2}$ 收敛（显然绝对收敛，因为 $\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$）

推论 2.15 (绝对值形式 D'Alembert 比值判别法)

设数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，且极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$ 存在，则以下命题成立

a) 若 $\alpha < 1$ ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

b) 若 $\alpha > 1$ ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

c) 若 $\alpha = 1$ ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 既有绝对收敛的也有发散的

♡

证明 a) 设 $\alpha < 1$，则有 q 使 $\alpha < q < 1$。固定 q，由极限的性质，存在号码 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$。由改变级数的有限多项不会影响级数收敛性，不失一般性，可认为对一切 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$。由

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\cdots\left|\frac{a_2}{a_1}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right|$$

则 $|a_{n+1}| \leqslant |a_1| q^n$。但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ 收敛（其和显然为 $\frac{|a_1|}{1-q}$），则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

b) 若 $\alpha > 1$，则从某个号码 $N \in \mathbb{N}$ 开始，只要 $n > N$ 就有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$，即 $|a_n| < |a_{n+1}|$。因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不满足级数收敛必要条件 $a_n \to 0$

c) 类似 Cauchy 根值检验法中证明，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 可以作为这样的例子

2.4.2 条件收敛与级数重排

定义 2.10 (条件收敛)

若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \in \mathbb{R}$ 收敛，但 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ 发散，则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 条件收敛

命题 2.17 (级数分组求和)

可把条件收敛级数各项在不变更其顺序的情况下分别组合，使所得新级数绝对收敛

证明 若级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，记其部分和序列为 $\{S_n\}$，则在组合后的新级数部分和序列即为 $\{S_n\}$ 的子序列。若将该子序列记为 $\{S_{p_n}\}$，则由该子序列即可确定新级数各项为 $S_{p_1}, S_{p_2} - S_{p_1}, \cdots$。则新级数绝对值级数为

$$|S_{p_1}| + |S_{p_2} - S_{p_1}| + |S_{p_3} - S_{p_2}| + \cdots + \left|S_{p_n} - S_{p_{n-1}}\right| + \cdots \tag{2.21}$$

于是命题等价于能找到部分和序列 $\{S_n\}$ 的一个子序列 $\{S_{p_n}\}$，使得级数 (2.21) 收敛

若取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$，则 $(\exists p_1 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geqslant p_1) : |S_m - S_n| < \dfrac{1}{2}$，这时无论 $p_2 > p_1$ 如何取，总能保证在 (2.21) 中的第二项 $|S_{p_2} - S_{p_1}| < \dfrac{1}{2}$。然后对 $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$，有 $(\exists p_2 > p_1)(\forall m, n \geqslant p_2) : |S_m - S_n| < \dfrac{1}{4}$，这时无论 $p_3 > p_2$ 如何取，总能保证在 (2.21) 中的第三项 $|S_{p_3} - S_{p_2}| < \dfrac{1}{4}$；以此类推，可选出子序列 $\{S_{p_n}\}$，使得 (2.21) 中的第 n 项 $\left|S_{p_n} - S_{p_{n-1}}\right| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$，$n = 2, 3, \cdots$，则由数值级数 Cauchy 准则 (2.1)，级数 (2.21) 收敛。

这表明，只要在原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中按照 $\{p_n\}$ 重新组合得到新级数为 $(a_1 + \cdots + a_{p_1}) + (a_{p_1+1} + \cdots + a_{p_2}) + \cdots + (a_{p_{n-1}+1} + \cdots + a_{p_n}) + \cdots$，则该级数绝对收敛

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是任意项级数，令

$$x_n^+ = \frac{|x_n| + x_n}{2} = \begin{cases} x_n, & x_n > 0, \\ 0, & x_n \leqslant 0, \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$x_n^- = \frac{|x_n| - x_n}{2} = \begin{cases} -x_n, & x_n < 0, \\ 0, & x_n \geqslant 0, \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$$

则

$$x_n = x_n^+ - x_n^-, \quad |x_n| = x_n^+ + x_n^-, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 是由 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的所有正项构成的级数，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 是由 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的所有负项变号后构成的级数，都是正项级数

引理 2.3

若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都发散到 $+\infty$

证明 先设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，由于 $0 \leqslant x_n^+ \leqslant |x_n|$，$0 \leqslant x_n^- \leqslant |x_n|$，$n = 1, 2, \cdots$，则由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 的收敛性，立刻得到 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 的收敛性。

现设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$(或 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$) 也收敛，则由

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\text{或} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right)$$

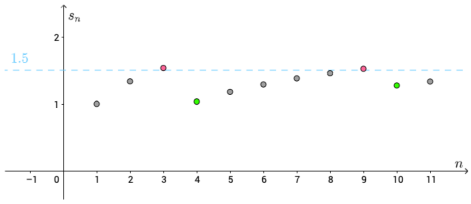
可知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$(或 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$) 也收敛，于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$$

的收敛性，从而产生矛盾

定理 2.19 (Riemann 重排定理)

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \in \mathbb{R}$ 条件收敛，则对任意给定实数 L，都可以重排级数项，使得变换后级数收敛到 L。



证明 用 $p_1, p_2, \cdots$ 表示原级数序列非负项，顺序与原级数序列中相同，用 $q_1, q_2, \cdots$ 表示原级数负项绝对值，顺序与原级数中相同，则原序列包含无穷多正项和无穷多负项（反证：假设仅有有限数量负项。则可从序列中去掉有限数量首项以去掉所有负项，得到一个非负项序列。若非负项级数收敛，则其绝对收敛。另一方面，从序列中去掉有限数量首项不影响其敛散性，则原级数绝对收敛，与原级数条件收敛矛盾）。

由原级数收敛有当 $k \to \infty$ 时 $u_k \to 0$，则 $\{p_k\}$ 和 $\{q_k\}$ 也为无穷小序列。研究级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ 绝对项级数的收敛性。第一个级数记为 P，第二个记为 Q，下证二级数发散。记 S_n 为原级数 n 阶部分和，P_n 为 S_n 中所有正项和，Q_n 为 S_n 中所有负项绝对值和。显然有 $S_n = P_n - Q_n$ 。由原级数收敛，则存在某个数 S 满足

$$\lim_{n\to\infty} (P_n - Q_n) = S \tag{2.22}$$

另一方面，原级数条件收敛，则有

$$\lim_{n\to\infty} (P_n + Q_n) = +\infty \tag{2.23}$$

由式 (2.22)(2.23) 成立当且仅当 $\lim_{n\to\infty} P_n = +\infty$ 且 $\lim_{n\to\infty} Q_n = +\infty$，$P$ 与 Q 发散得证。

由序列 P 和 Q 发散，因此可以去掉有限数量首项，从序列 P 和序列 Q 剩余项中取出大量项，并使它们的和预先超过任何给定数。欲用其证明原序列的项可以重排，并得到一个收敛到正数 L 的序列。构造算法如下：

STEP1：首先选取原级数中非负项 $p_1, p_2, \ldots, p_{k_1}$ 并使其和恰好大于 L，即 $S_{k_1} = p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} > L$，但是 $S_{k_1 - 1} = p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1 - 1} \leqslant L$ 由这两个不等式有

$$0 < |S_{k_1} - L| = |S_{k_1-1} + p_{k_1} - L| = |(S_{k_1-1} - L) + p_{k_1}| \leqslant p_{k_1}$$

STEP2：增添一些负项 $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{k_2}$ 使和恰好小于 L，即 $S_{k_1+k_2} = p_1 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - \ldots - q_{k_2} < L$ 但是 $S_{k_1+k_2-1} = p_1 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - \ldots - q_{k_2-1} \geqslant L$ ，这时同理有估计 $|S_{k_1+k_2} - L| \leqslant -q_{k_2}$

STEP3：增添一些正项 $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \ldots, p_{k_3}$ 使和恰好大于 L，即 $S_{k_1+k_2+k_3} = p_1 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - \ldots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \ldots + p_{k_3} > L$ 但是 $S_{k_1+k_2+k_3-1} = p_1 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - \ldots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \ldots + p_{k_3-1} \leqslant L$ ，这时再次有估计 $|S_{k_1+k_2+k_3} - L| \leqslant p_{k_3}$ 。

在 L 为负的情况下，第一组必须取负项。以此类推，因为每步算法将至少添加一个正序列或一个负序列，则得到包括原级数所有项的级数。下证得到的级数确实收敛向 L。由级数的构造过程，正负项组相互交替，由结果序列得到部分和 $\{S_{k_1}\}, \{S_{k_1+k_2}\}, \{S_{k_1+k_2+k_3}\}, \ldots$，分别为偏离 L 不超过 $p_{k_1}, -q_{k_2}, p_{k_3}, \ldots$ 的和，亦即不超过组最后一项的模。若考虑其余不完全完成组的结尾的和，即为偏离 L 不超过倒数第二个组的最后一项的模。这意味着 $|S_n - L| = a_n$，其中 $\{a_n\} = \{p_1, p_2, \ldots, p_{k_1}, \ldots\}$ 由原级数收敛的条件即得序列 $\{a_n\}$ 收敛

注 类似可以构建算法，使重排后获得的序列发散。

注 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ 都发散，而数列 p_k 和 q_k 都是无穷小量，那么上述算法总是可行的

定理 2.20 (Cauchy 重排定理)

绝对收敛级数重排所得级数也绝对收敛，且级数和不变

证明

证法一：设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k \in \mathbb{R}$ 绝对收敛且级数和为 S，设重排后得到级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$，欲证重排后级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$ 绝对收敛且级数和为 S

由原级数绝对收敛，任意固定 $\varepsilon > 0$，总可以找到 $N_0(\varepsilon)$ 满足估计

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.24}$$

然后可以选择 N，使得当 $n > N$ 时任何新级数的部分和 S'_n 包含所有原级数前 N_0 项。这时 $S'_n - \sum\limits_{k=1}^{N_0} u_k$ 仅包含原级数序号大于 N_0 的项。注意到 $S - \sum\limits_{k=1}^{N_0} u_k$ 也仅包含原级数序号大于 N_0 的项。需证明

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N): \left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - S\right| < \varepsilon \tag{2.25}$$

考虑最后一个不等式中带模的表达式，对其进行变换并使用估计 (2.24)：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - S\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right| \leqslant \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \varepsilon$$

则关系 (2.25) 得证，则有新级数收敛且级数和为 S。

证明新级数绝对收敛方法同上，仅需将二级数项换为绝对值项

证法二：(1) 先设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，则对一切 $n \in \mathbf{N}^+$

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

反过来，也可以将 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 看成是 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ 的更序级数，又有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x'_n$$

结合上述两式即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

(2) 现设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是任意项级数，则由引理 (2.3)，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$$

对于更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$，同样构作正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^-$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^+$ 即为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 的更序级数，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^-$ 即为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 的更序级数，根据 (1) 的结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n'^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$$

于是得到 $\sum_{n=1}^{\infty} |x'_n| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n'^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n'^-$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ 绝对收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n'^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n'^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

定义 2.11 (无条件收敛)

称任意重排所得级数均收敛的级数为无条件收敛 (безусловно сходящимися) 级数。♣

推论 2.16

绝对收敛级数无条件收敛。♡

命题 2.18 (重排改变级数和必要条件)

若将收敛级数各项重排，使每一项离开原有位置不超过 m 个位置（m 为预先给定的数），则级数和不变 ♠

证明 设原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，其部分和序列为 $S_n(n = 1, 2, \cdots)$。又将重排后级数的部分和序列记为 $S_n'(n = 1, 2, \cdots)$。

由条件，当 $n > m$ 时在 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ 中的前 $n - m$ 项，即 $a_1, \cdots, a_{n-m}$，一定在 S_n' 的被加项之中，即没有被更换。不妨设 S_n 中的其余 m 项在重排后为原级数中的 $a_{n_1}, \cdots, a_{n_m}$ 项所更换，且有 $n < n_1 < \cdots < n_m$。这为在 S_n 中的后 m 项完全被更换的情况。于是可估计

$$|S_n - S_n'| \leqslant |a_{n-m+1}| + \cdots + |a_n| + |a_{n_1}| + \cdots + |a_{n_m}|$$

由 $a_n \to 0(n \to \infty)$，对给定的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $k > N$ 时有 $|a_k| < \varepsilon$。令 $n > N + m$，则得 $|S_n - S_n'| < 2m\varepsilon$。

除了上述极端情况之外，另一个极端是在 S_n 中的后 m 项没有更换（但可以有次序变更），此外还有介于两个极端之间的情况。可以看出，对于所有其他情况，上面所得的估计式仍然成立。这样即证两个部分和序列的极限相同

注 本题表明虽对条件收敛级数有 Riemann 定理，但级数和在有限制的重排下仍然不变。即重排改变级数和必要条件为：各项在重排前后的位置之间距离无界

2.5 发散级数广义求和法

2.5.1 Cesaro 算术平均法与 Poisson-Abel 幂级数法

定义 2.12 (线性求和法)

若级数 Σa_n 取广义和 A，级数 Σb_n 取广义和 B，则级数 $\Sigma(pa_n + qb_n)$，其中 p 与 q 是两个任意常数，必须取数 $pA + qB$ 作为广义和。称满足这种条件的求和法为线性的。♣

定义 2.13 (正则求和法)

在通常意义下收敛于和 A 的级数必须有广义和，并且广义和同样等于 A。称具有这种性质的求和法为正则 (регулярная) 求和法。♣

定义 2.14 (广义求和法)

定义线性正则求和法为广义求和法 (Обобщённые методы суммирования)。♣

定义 2.15 (Cesaro 广义和)

设数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的部分和为 S_n，作出逐步算术平均

$$\alpha_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$$

若变量 α_n 当 $n \to \infty$ 时有极限 S，则称该数为级数的 Cesaro 意义下广义和 (обобщенная в смысле

Чезаро сумма ряда)（Cesaro[a]广义和）。称 α_n 为数值级数的 Cesaro 平均值 (Чезаровское средние)

[a]恩纳斯托 · 切萨罗（Ernesto Cesàro,1859.3.12 - 1906.9.12）意大利数学家，贡献主要集中在微分几何方面，因在发散级数领域提出 Cesaro 平均和 Cesaro 求和而闻名。

命题 2.19 (Cesaro 算术平均法线性性)

Cesaro 算术平均法为线性求和法

证明 记 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 部分和序列为 U_k，U 为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 的 Cesaro 广义和，α_n' 为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 部分和算术平均序列。同样记 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 对应量为 V_k, V, α_n''。记 S_k 为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k)$ 部分和，α_k 为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k)$ 部分和算术平均序列。则有当 $n \to \infty$ 时，$\alpha_n' \to U, \alpha_n'' \to V$。但 $S_k = \alpha U_k + \beta V_k$，所以当 $n \to \infty$ 时，$\alpha_n = \alpha\alpha_n' + \beta\alpha_n'' \to \alpha U + \beta V$。

引理 2.4 (Cauchy 命题)

设序列 $\{a_n \in \mathbb{R}\}$ 趋向极限 a（可为 $+\infty$ 或 $-\infty$），则序列项的算术平均值序列

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right\}$$

也趋向于 a，亦可形式化记为

$$(\{a_n \in \mathbb{R}\} \to a \in \mathbb{R}^*) \Rightarrow \left(\left\{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right\} \to a \in \mathbb{R}^*\right)$$

证明 设极限有限且 $a = 0$，则序列 $\{a_n\}$ 有界，则 $(\exists C > 0)(\forall n) : |a_n| \leqslant C$。另一方面由定义有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

取任意 $\varepsilon > 0$，计算对应 $N_1 = N(\varepsilon)$。显然序列 $\left\{\frac{CN}{n}\right\}$ 趋向于 0，则

$$(\exists N_1)(\forall n \geqslant N_1(\varepsilon)) : \frac{CN}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

考虑 $n \geqslant \max\{N, N_1\}$，则满足估计

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| = \left|\frac{a_1 + \ldots + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + \ldots + a_n}{n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{a_1 + \ldots + a_N}{n}\right| + \left|\frac{a_{N+1} + \ldots + a_n}{n}\right| \leqslant \frac{CN}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-N}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此当 $n \to \infty$ 有 $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to 0$

设极限有限且 $a \neq 0$。考虑序列 $\{a_n - a\}$ 收敛向 0。由上一种情况，序列

$$\left\{\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \ldots + (a_n - a)}{n}\right\}$$

当 $n \to \infty$ 有趋向于 0，则当 $n \to \infty$ 时 $\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to a$。

设 $a = +\infty$，则有当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to +\infty$。由序列 $\{a_n\}$ 下有界有

$$(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n > -C$$

即为

$$(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) : a_n > A$$

若取 $n>2N$，则有 $\frac{N}{n}<\frac{1}{2}, -\frac{N}{n}>-\frac{1}{2}$，则算术平均值序列有估计

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=\frac{a_1+\ldots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\ldots+a_n}{n}>$$
$$>-\frac{CN}{n}+\frac{A(n-N)}{n}>-\frac{C}{2}+A\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{A-C}{2}$$

由估计可取任意大的数 A，则可取任意大的 $\frac{A-C}{2}$。则当 $n\to\infty$ 时有 $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\to+\infty$，负无穷的情况同理可证。

注 由引理 (2.4) 可以推出，若 $\{S_n\}$ 为正无穷大序列，则 α_n 也为正无穷大序列。这表明 Cesaro 算术平均法不能对非负项发散级数使用。例如级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}, \sum\limits_{k=1}^{\infty}1, \sum\limits_{k=1}^{\infty}k$

引理 2.5（正项级数收敛关于几何平均值序列的必要条件）

若正项序列 $\{a_n\}$ 收敛向极限 a，则其项的几何平均值序列 $\tau_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}$ 同样趋向于极限 a。♡

证明 设 $a>0$，在连续函数 $f(x)=\ln x$ 情形满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$，由引理 (2.4) 有

$$\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_n}{n}\to\ln a\right)\Leftrightarrow(\ln\tau_n\to\ln a)$$

而在连续函数 $f(x)=a^x$ 的情形有当 $n\to\infty$ 时 $\tau_n\to a$。

设 $a=0$，则序列有界得 $\{a_n\}$ 有

$$(\exists C>0)(\forall n\in\mathbb{N})a_n<C$$
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N):a_n<\varepsilon$$

这时当 $n\geqslant N$ 有估计

$$\tau_n=\sqrt[n]{a_1\ldots a_N}\cdot\sqrt[n]{a_{N+1}\ldots a_n}<\sqrt[n]{C^N}\cdot\sqrt[n]{\varepsilon^{n-N}}=\varepsilon\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{N}{n}}<\varepsilon$$

当 $n\geqslant N_1(\varepsilon)$ 时最后的不等式成立。则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{N}{n}}=1$。

命题 2.20（Cesaro 算术平均法正则性）

Cesaro 算术平均法为正则求和法 ♠

证明 由引理 (2.4) 及 $S_n\to S$ 即推出原数值级数收敛到 S

例题 2.11 （Cesaro 广义和）观察级数 $1-1+1-1+1-1+\cdots$，由 $\alpha_{2k}=\frac{k+1}{2k+1}, \alpha_{2k-1}=\frac{1}{2}$ 得 $\alpha_n\to\frac{1}{2}$

例题 2.12 观察级数 $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\theta(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$，其部分和为（$\theta\neq0$ 时）

$$A_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

计算算术平均得

$$(n+1)\alpha_n=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=0}^{n}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=0}^{n}[\cos m\theta-\cos(m+1)\theta]$$
$$=\frac{1-\cos(n+1)\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

则有

$$\alpha_n=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

显然 $\alpha_n\to0$。则当 $\theta\neq0$ 时，0 为级数 Cesaro 广义和

定义 2.16 (Poisson 广义和)

设数值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$，作出幂级数（数值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 的母函数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2.26}$$

若该幂级数在 $0 < x < 1$ 收敛到函数 $f(x)$ 且级数和 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = S$，则称数 S 为已给级数 Poisson 意义下广义和[a]（Poisson[b]广义和）

[a]实际上这种方法是 Poisson 发现的，而且他首先企图将它应用到三角级数

[b]西莫恩 · 德尼 · 泊松（Simeon-Denis Poisson 1781.6.21-1840.4.25）法国数学家、几何学家和物理学家，巴黎科学院院士。对积分理论、行星运动理论、热物理、弹性理论、电磁理论、位势理论和概率论都有重要贡献。他是 19 世纪概率统计领域里的卓越人物，建立了描述随机现象的一种概率分布——泊松分布，推广了“大数定律”，并导出了在概率论与数理方程中有重要应用的 Poisson 积分。

♣

命题 2.21 (Poisson-Abel 幂级数法线性性)

Poisson-Abel 幂级数法为线性求和法

♠

证明 记幂级数级数和与级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 的 Poisson-Abel 广义和分别为 $U(x), U$，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 对应量记为 $V(x), V$，则有

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) x^{k-1} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} v_k x^{k-1} = \alpha U(x) + \beta V(x)$$

当 $x \to 1-0$ 时有 $\alpha U(x) + \beta V(x) \to \alpha U + \beta V$

定理 2.21 (Abel 定理/Poisson-Abel 幂级数法正则性)

（Abel 定理/Poisson-Abel 幂级数法正则性[a]）若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛且有级数和 S（在通常意义下），则当 $0 < x < 1$ 时，幂级数 (2.26) 收敛且有 $\lim\limits_{x \to 1-0} S(x) = S$

[a]这个定理是 Abel 在研究二项级数理论时证明的，即是该定理导致广义求和法的一般表述。Poisson 仅仅是把广义求和法应用到特殊情形。由此虽然发散级数求和法的观念与 Abel 无关，方法本身却常常被称为 Abel 方法，于是称该套理论为 Poisson-Abel 幂级数法。

♡

证明 由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛，则有 $\{u_k\}$ 为无穷小序列且有界，即有 $(\exists M > 0)(\forall k \in \mathbb{N}) : |u_k| < M$。估计幂级数 (2.26) 第 k 项的模有

$$(\forall x \in (0;1)) : \left|u_k x^{k-1}\right| \leqslant M x^{k-1}$$

由通项为 x^{k-1} 的级数在 $x \in (0;1)$ 收敛，则由第一比较定理 (2.2.1) 有幂级数收敛，记其级数和为 $S(x)$。另外记原级数 n 阶部分和为 S_n，其级数和为 S，级数 n 阶余项为 $r_n = S - S_n$。利用 Abel 恒等式 (2.12) 有

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}$$

设其中 $n = 1, v_k = x^{k-1}, S_0 = 0, p \to \infty$，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}$$

计算即得 $S = (1-x) \sum\limits_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}$，进一步得到

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1} - (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

则有级数余项

$$S - S(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1} \tag{2.27}$$

欲证 $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = S$，即

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(1-\delta;1)):|S-S(x)|<\varepsilon \tag{2.28}$$

又因为原级数余项当 $k\to\infty$ 有 $r_n\to 0$，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists k_0\in\mathbb{N})(\forall k\geqslant k_0):|r_k|<\frac{\varepsilon}{2}$$

则考虑在公式 (2.27) 右部估计余项

$$(\forall x\in(0;1)):\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-x}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}$$

估计公式 (2.27) 右部前 k_0-1 项和。计算得 $c=\sum\limits_{k=1}^{k_0-1}|r_k|$ 且令 $x\in\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2c};1\right)$，则满足

$$\left|(1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1}|r_k| = c(1-x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

将这些估计代回不等式 (2.27)，则公式 (2.28) 成立，则 $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = S$，则 Poisson-Abel 幂级数法正则性得证。

定理 2.22

若级数在 Cesaro 意义下有广义和，那么该级数在 Poisson-Abel 意义下也有广义和，且二者一致

♡

注 存在 Poisson-Abel 意义下有广义和而 Cesaro 意义下没有广义和的级数，也就是说 Poisson-Abel 广义和的条件比 Cesaro 更严格

2.5.2 Tauber 定理与 Frobenius 定理

定理 2.23 (Tauber 定理)

(Tauber[a]定理) 设数值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 当 $0<x<1$ 时收敛，并且极限等式

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

成立。若幂级数各项满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = 0$$

则有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$

[a]陶伯 (A. Tauber, 1866-1942) 奥地利数学家，主要研究数论和函数论。

♡

注 该定理表明，在对幂级数项满足上述约束时，由 Poisson-Abel 幂级数法求得的 Poisson-Abel 广义和即为一般意义的级数和

定理 2.24 (Frobenius 定理)

(Frobenius[a]) 如果用 Cesaro 算术平均法可求得级数 (A) 的有限广义和 A，则同时用 Poisson-Abel 幂级数法也可求得相同的和。

[a]弗罗贝尼乌斯 · F. G. (Frobenius.Ferdinand Georg,1849.10.26-1917.8.3) 德国数学家，柏林普鲁士科学院院士。其主要数学贡献在

群论方面，尤其是群表示论。Schur 是 Frobenius 的学生，被认为是抽象群表示论的初创者之一。定理

注 该定理表明 Poisson-Abel 幂级数法强于 Cesaro 算术平均法法，但当同时可应用两种方法时，彼此并不矛盾

2.6 数值级数运算

2.6.1 数值级数加法，乘积与 Cauchy 积

定理 2.25

（数值级数加法定义正确性）设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$，且 $u_k, v_k \in \mathbb{R}$，对应的 n 阶部分和序列记为 U_n 和 V_n。若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛且对应级数和为 U 与 V，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$ 收敛，且级数和为 $U \pm V$

证明 由当 $n \to \infty$ 时有 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k) = U_n \pm V_n \to U \pm V$ 即证

给定两个收敛级数

$$(A): A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$(B): B = \sum_{m=1}^{\infty} b_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_m + \cdots$$

将两级数的项全都一对一对地乘起来，将所有可能的乘积 $a_i b_k$ 列成无限矩阵，如下述所示

$$\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_ib_1 & \cdots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots & a_ib_2 & \cdots \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_ib_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \cdots & a_ib_k & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots .
\end{array}$$

定理 2.26 (Cauchy 定理/无穷级数乘法定义正确性)

设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$，且 $u_k, v_k \in \mathbb{R}$，若二级数绝对收敛且对应级数和为 U 与 V，则由所有可能形式的乘积 $u_k v_l, k, l \in \mathbb{N}$ 构成的级数任意重排均绝对收敛且级数和为 UV。

证明 记乘积 $u_k v_l, k, l \in \mathbb{N}$ 经重排后为 $w_1, w_2, w_3, \ldots$。下证级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|w_i|$ 收敛，记该级数 n 阶部分和为级数 S_n，以下固定 n，并令加数指标 k 和 l 包含在 S_n 中，选择其中最大的指标记为 p，于是有估计

$$S_n \leqslant (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_p|) \cdot (|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_p|) \tag{2.29}$$

在不等式 (2.29) 右端有非负项收敛级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_k|$ 的 p 阶部分和。由二级数收敛性得部分和收敛，得部分和有界性，则有 $\{S_n\}$ 有界，则级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|w_i|$ 收敛。

下证 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i$ 绝对收敛。记级数和为 S，下证 $S = UV$，由 Cauchy 重排定理 (2.20) 有绝对收敛级数的和不

依赖于求和的顺序。因此，足以证明存在这样的求和顺序，使得一个序列或至少一个序列的部分和的子序列收敛到 UV。考虑以下形式和

$$W_{m^2} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_m)(v_1 + v_2 + \ldots + v_m)$$

$\{W_{m^2}\}$ 为级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i$ 重排后部分和序列，其收敛到 UV。由序列收敛即知子序列收敛

注 该定理包含一个级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$，且 $u_k, v_k \in \mathbb{R}$ 关于绝对收敛的严格条件

定义 2.17 (Cauchy 积)

设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$，且 $u_k, v_k \in \mathbb{R}$，有级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right) = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_k + u_2v_{k-1} + \ldots u_kv_1) + \ldots \tag{2.30}$$

其中 $w_k = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i v_{k+1-i}$。则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ 为二级数 Cauchy 规则下的积。

♣

注

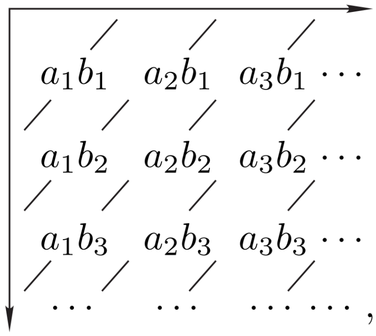


图 2.3: Cauchy 积的图解

例题 2.13 (Steinitz 定理) 设 $\{\bar{c}_n\}$ 是由 k 维空间 $\mathbb{R}^k$ 中的向量组成的序列，$k \geqslant 2$。设对于任意的向量 $\bar{f} \in \mathbb{R}^k, \bar{f} \neq 0$, 级数 $\sum(\bar{c}_n, \bar{f}_n)$ 都条件收敛，其中 $(\bar{c}_n, \bar{f}_n)$ 表示向量 $\bar{c}_n$ 和 $\bar{f}$ 的标量积。则对于任何 $\bar{b} \in \mathbb{R}^k$，都存在一个重排 $\sum \bar{c}_{\sigma(n)}$，使得 $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \bar{c}_{\sigma(n)} = \bar{b}$

定理 2.27 (Mertens 定理)

设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$，且 $u_k, v_k \in \mathbb{R}$，设二级数收敛，并且至少有一个绝对收敛。则二级数 Cauchy 规则积得到的级数收敛到相乘级数之和的乘积

♡

证明 不妨设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 绝对收敛，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 至少条件收敛，记对应 n 阶部分和为 U_n, V_n，对应级数和为 U 和 V。若记 $W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ 为序列 (2.30) 的 n 阶部分和，则只需证 $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = UV$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛，则其余项 $\alpha_n = V - V_n$ 为有界无穷小序列，则 $(\exists M)(\forall n \in \mathbb{N}) : |\alpha_n| \leqslant M$，对部分和 W_n 变换表达式得

$$W_n = u_1V_n + u_2V_{n-1} + \ldots + u_nV_1 = u_1(V - \alpha_n) + u_2(V - \alpha_{n-1}) + \ldots + u_n(V - \alpha_1) = U_nV - \beta_n$$

其中 $\beta_n = u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \ldots + u_n\alpha_1$

注意到，当 $n \to \infty$ 时 $U_n \to U$，则定理仅需证 $\{\beta_n\}$ 为无穷小，由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ 收敛，则其部分和序列为

有界无穷小序列

$$(\exists M_1>0)(\forall n\in\mathbb{N}):\sum_{k=1}^{n}|u_k|\leqslant M_1 \tag{2.31}$$

且级数余项趋近于零

$$(\exists m\in\mathbb{N}):\sum_{k=m+1}^{\infty}|u_k|<\frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.32}$$

估计 (2.32) 中常数 M 由估计 $(\forall n\in\mathbb{N}):|\alpha_n|\leqslant M$ 得，由有当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to 0$。则有

$$(\exists n_1\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant n_1):|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2M_1} \tag{2.33}$$

取任意 $n>m+n_1$ 或 $n-m>n_1$，变换 β_n :

$$\beta_n=(u_1\alpha_n+\ldots+u_m\alpha_{n-m+1})+(u_{m+1}\alpha_{n-m}+\ldots+u_n\alpha_1) \tag{2.34}$$

在公式 (2.34) 右端有两组加数。将估计 (2.33) 应用于第一组，则有估计 (2.31)，对于第二组加数应用估计 $|\alpha_n|\leqslant M$ 和估计 (2.32)。于是得到

$$|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2M_1}\sum_{k=1}^{m}|u_k|+M\sum_{k=m+1}^{n}|u_k|<\frac{\varepsilon}{2M_1}M_1+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

其中 $n>N=m+n_1$。得证 $\{\beta_n\}$ 为无穷小。

注 若二级数条件收敛，则二级数 Cauchy 规则乘积发散

例如级数通项为 $u_k=v_k=\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$。这时由 Cauchy 规则乘积有

$$w_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}}\right)$$

只要 $(\forall k=\overline{1;n}):\dfrac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}\geqslant\dfrac{1}{n}$，则有估计 $(\forall n\in\mathbb{N}):|w_n|\geqslant 1$，则不满足数值级数收敛必要条件 (2.1)，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}w_n$ 收敛

定理 2.28 (级数乘积的收敛性)

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则将 $a_ib_j(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$ 按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛，且其和等于 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)$

证明 设 $a_{i_k}b_{j_k}(k=1,2,\cdots)$ 是所有 $a_ib_j(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$ 的任意一种排列，对任意的 n，取

$$N=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{i_k,j_k\}$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{i_k}b_{j_k}|\leqslant\sum_{i=1}^{N}|a_i|\cdot\sum_{j=1}^{N}|b_j|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$$

因此 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{j_k}$ 绝对收敛，由 Cauchy 重排定理 (2.20)，$\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{j_k}$ 的任意更序级数也绝对收敛且和不变设 $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 按正方形排列所得的乘积，则 $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ 是 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{j_k}$ 更序后添加括号所成的级数，于是得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{j_k}=\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)$$

2.6.2 无穷乘积

定义 2.18 (无穷乘积)

给定序列 $\{v_n\}$，形式化定义数列所有元素（或无穷可列个数）的乘积为 $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k$ ，称该积为原序列的无穷乘积，称 v_k 为无穷乘积的通项（或一般项）。称无穷乘积的前 n 项的积为 n 阶有限积（或称 n 阶部分积），记为 $P_n = v_1 \cdot v_2 \dots v_n = \prod_{k=1}^{n} v_k$ ♣

定义 2.19 (无穷乘积收敛)

设无穷乘积 $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k$ 及其有限积序列 $\{P_n\}$，若存在非零有限极限 $\exists \lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$ ，则称无穷乘积收敛。收敛时称 P 为无穷乘积的值，则可记为 $P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k$ ♣

注 （无穷乘积与序列对应关系）无穷乘积提供了研究序列的新形式，每一个无穷乘积唯一对应一个序列 $\{P_n\}$。每一个数项级数 $\{P_n\}$ 所有非零元素唯一对应无穷乘积的项 $v_1 = P_1, (k > 1) : v_k = \dfrac{P_k}{P_{k-1}}$。

注 若从无穷乘积中去除任意有限数量非零项，不影响无穷乘积收敛性。以下不考虑至少有一项为零的无穷乘积

定理 2.29 (无穷乘积收敛必要条件)

若无穷乘积 $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛，则当 $k \to \infty$ 时 $v_k \to 1$ ♡

证明 设无穷乘积收敛向 $P \neq 0$，当 $k \geqslant 2$ 时成立 $v_k = \dfrac{P_k}{P_{k-1}}$，计算极限

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{P_{k-1}} = 1$$

即得

推论 2.17

若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则余积满足

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=m+1}^{\infty} v_n = 1$$

♡

证明

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=m+1}^{\infty} v_n = \lim_{m\to\infty} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} v_n}{\prod_{n=1}^{m} v_n} = 1 \tag{2.35}$$

注 该定理说明所有项从某个项开始都是正数。删除有限数量的第一个项不影响无穷乘积的收敛（无穷乘积的敛散性与其前有限项非零因子无关），因此，进一步考虑所有项都为正的无穷乘积

注 记 v_n 为 $1 + a_n$，则无穷乘积收敛必要条件 (2.29) 可以表达为：如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

定理 2.30 (无穷乘积收敛充要条件)

正项无穷乘积 $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k$ 收敛。当无穷乘积收敛到 P，级数和为 S 时有 $P = e^S$ ♡

证明 由极限的定义可知，除去前有限项外，总有无穷多项因子大于零，不妨假设所有因子都大于零。

记 P_n 和 S_n 为无穷乘积的 n 阶部分积与级数的 n 阶部分和。有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln v_k=\ln\prod_{k=1}^{n}v_k=\ln P_n\Leftrightarrow P_n=e^{S_n}$$

利用指数函数和正参数的对数函数的连续性去除 $n\to\infty$ 的限制。由此得 $\{P_n\}$ 收敛当且仅当 $\{S_n\}$ 收敛。若当 $n\to\infty$ 时有 $S_n\to S$，则 $P_n\to e^S$。

注 有时可以表达无穷乘积为 $(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)\ldots=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$。当所有 $u_k>-1$，由定理即得无穷乘积收敛性等价于级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k)$ 收敛性

定理 2.31 (保号情形无穷乘积收敛充要条件)

设无穷乘积

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$$

所有 u_k 从某项开始定号（即对充分大的 n，有 $u_k>0$ 或 $u_k<0$），那么无穷乘积收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛

证明

必要性：由无穷乘积收敛必要条件 (2.6.2) 有当 $k\to\infty$ 时 $u_k\to 0$。

充分性：显然有当 $t\to 0$ 时 $\ln(1+t)=t+\bar{o}(t)$，则有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+u_k)}{u_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{u_k+\bar{o}(u_k)}{u_k}=\lim_{k\to\infty}(1+\bar{o}(1))=1 \tag{2.36}$$

因此级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k)$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 所有项从某一项开始同号，利用第二比较定理 (2.2.1) 及公式 (2.36)，得级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k)$ 收敛

注 如果 $\{u_n\}$ 不保持定号，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性并不能保证无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 的收敛性

推论 2.18

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛的充分必要条件是：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

证明 由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，可知 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，由 $\ln(1+a_n)\leqslant a_n$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-\ln(1+u_n)}{u_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}u_n^2+o(u_n^2)}{u_n^2}=\frac{1}{2},$$

根据正项级数的第一比较判别法知，当 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，必有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛。反过来，当 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛时，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性必可得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$ 的收敛性

定理 2.32 (Abel 定理)

若对两个收敛的级数 (A) 与 (B) 其所取 Cauchy 形式乘积也收敛，则乘积级数和 C 等于 $A\cdot B$

证明 记 $AB=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots$，容易得到：

$$C_1+C_2+\cdots+C_n=A_1B_n+A_2B_{n-1}+\cdots+A_nB_1$$

该等式逐项地除以 n，令 $n\to\infty$ 取极限。由 $C_n\to C$，则由引理 (2.4)，算术平均值

$$\frac{C_1+C_2+\cdots+C_n}{n}\to C$$

另一方面，根据特普利茨定理（令 $x_n=A_n,y_n=B_n$）

$$\frac{A_1B_n+A_2B_{n-1}+\cdots+A_nB_1}{n}\to AB$$

由此 $C = A \cdot B$ 即证

定义 2.20

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln v_n$ 绝对收敛时，称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛

♣

注 绝对收敛的无穷乘积必定收敛

注 由于绝对收敛的级数具有可交换性，可以得到绝对收敛的无穷乘积也具有可交换性

定理 2.33

设 $a_n > -1, n = 1, 2, \cdots$，则下面三个命题等价：

(1) 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 绝对收敛

(2) 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$ 收敛

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

♡

证明 首先命题 (1),(2),(3) 的必要条件都是 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。而在 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 的条件下，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(1 + a_n)|}{|a_n|} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + |a_n|)}{|a_n|} = 1$$

由正项级数的第一比较判别法，即得到定理的结论

2.6.3 二重级数与累次级数

定义 2.21 (二重级数与累次级数的定义)

观察可数序列 $\{a_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$，其中 k 为序列号，l 为序列元素编号，考虑一个具有无穷行数和列数的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kl} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

若先将矩阵每一行元素分别相加，则得到级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}, k = 1, 2, \ldots$，现在对这个序列求和并得到总和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right)$，称该和为累次级数 (повторный ряд)。对称地，也称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right)$ 为累次级数。另外，称 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 为二重级数 (двойной ряд)

♣

定义 2.22 (累次级数收敛)

设累次级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right)$，若级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}, k = 1, 2, \ldots$ 对 $k = 1, 2, \ldots$ 趋近于值 A_k 且级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛，则称该累次级数收敛

♣

定义 2.23 (二重级数的和)

设二重级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$，若两个独立指标 m, n 趋向无穷有有限极限，称 $S_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}$ 为矩形部分和 (прямоугольные частичные суммы)，由此产生的极限 $S = \lim\limits_{n,m\to\infty} S_{mn}$ 称为二重级数的和

♣

注 若二重级数级数的项等于两个收敛级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(a_{kl}=b_kc_l)$ 的项的乘积，则二重级数收敛，其和等于这些级数的和的乘积：

$$S_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_kc_l=\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} c_l\right)\to\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l\right)=S$$

其中极限过程为 $m,n\to\infty$

命题 2.22 (二重级数收敛必要条件)

若二重级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 收敛，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}=0$

证明 通过矩形部分和来表达级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 通项

$$a_{mn}=S_{mn}-S_{m(n-1)}-S_{m(n-1)}+S_{(m-1)(n-1)}\to S-S-S+S=0$$

其中，极限过程为 $m,n\to\infty$

定理 2.34 (收敛二重级数按行收敛的必要条件)

若二重级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 收敛，且行级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}, k=1,2,\ldots$ 收敛，则累次级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right)$ 收敛到与二重级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 相同的和

证明 设 $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}, k=1,2,\ldots$ 收敛到 A_k ： $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}=A_k, k=1,2,\ldots$ ，然后取和 $\{S_{mn}\}$ 的矩形部分和序列，固定 m 并取极限过程 $n\to\infty$：

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}=\sum_{k=1}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\right)=\sum_{k=1}^{m} A_k$$

记得到的极限为 $\lim_{n\to\infty} S_{mn}=\varphi_m$，由累次级数定义，当 $m\to\infty$ 时有极限 $\{\varphi_m\}$:

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m=\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{mn}\right)$$

需证极限存在性，由定理条件知存在极限 $S=\lim\limits_{n,m\to\infty} S_{mn}$，则

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists m_0,n_0\in\mathbb{N})(\forall m\geqslant m_0)(\forall n\geqslant n_0):|S_{mn}-S|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $n\to\infty$，得

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists m_0\in\mathbb{N})(\forall m\geqslant m_0):|\varphi_m-S|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

则证明了极限存在性 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m=\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} S_{mn}=S$

定理 2.35 (非负项二重级数收敛充要条件)

若矩阵中所有元素非负，则对于由该矩阵组成的二重级数收敛的充要条件为其部分和序列 $\{S_{mn}\}$ 有界

证明 必要性：显然有 $0\leqslant S_{mn}\leqslant S$，其中 S 为二重级数的和。充分性：由序列 $\{S_{mn}\}$ 有界有序列存在上确界，记为 S: $S=\sup\limits_{n,m\in\mathbb{N}} S_{mn}$ ，由上确界定义有 $\forall\varepsilon>0$，有部分总和 $S_{m_0n_0}$，则有 $S-\varepsilon<S_{m_0n_0}\leqslant S$ ，由矩阵元素非负有 $\forall m\geqslant m_0,\forall n\geqslant n_0$ 满足 $S_{mn}\geqslant S_{m_0n_0}$，在相反的情况得到 $S-\varepsilon<S_{m_0n_0}\leqslant S_{mn}\leqslant S\quad\forall m\geqslant m_0,\forall n\geqslant n_0$ ，这意味着 $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn}=S$ ，则二重级数收敛性得证

定义 2.24 (二重级数绝对收敛)

设二重级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$，若二重级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|$ 收敛，则称二重级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 绝对收敛

定理 2.36

绝对收敛二重级数必收敛

证明 设级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 绝对收敛，由定理 (2.6.3) 推出下列级数部分和有界性，记为

$$p_{kl} = \frac{|a_{kl}| + a_{kl}}{2}, q_{kl} = \frac{|a_{kl}| - a_{kl}}{2}$$

显然有 $0 \leqslant p_{kl} \leqslant |a_{kl}|, 0 \leqslant q_{kl} \leqslant |a_{kl}|$，这时有 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} p_{kl}$，$\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} q_{kl}$ 部分和序列有界，这意味着由定理 (2.6.3) 有这些级数收敛，记它们对应的的和为 P 和 Q 。因为 $a_{kl} = p_{kl} - q_{kl}$，则二重级数 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ 收敛到 $P - Q$。

定义 2.25 (线性编号)

以某种方式给自然数对 (m,n) 所成可数集编号。于是得到两个自然数序列 $m(k)$ 和 $n = n(k)$。称这样的编号为数对的线性编号。若 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 是两个数项级数，而 $h_k = a_{m(k)} b_{n(k)}$，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ 是它们对应于所给角标对 (m,n) 的线性编号或对应于所给的两两乘积 $a_m b_n$ 的按列的乘积。

定义 2.26 (线性重排)

设 $(m(k), n(k))$ 是全体数对 (m,n) 集合某个线性编号，$d_k = a_{m(k)n(k)}$，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ 为二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 相应于它的项的给定编号的线性重排。

定理 2.37 (二重级数与对应累次级数和线性重排的收敛关系)

设对于一切数对 (m,n) 有 $a_{mn} \geqslant 0$，并设 $\sum d_k$ 为二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 某个线性重排，则下列三级数

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}, \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right), \sum_{k=1}^{\infty} d_k$$

之中的一个收敛可导出其他两个也收敛到同一个和。

证明 用 A, B 和 D 代表相应的三个级数的和。只需证明三个命题：

1) 若 A 存在则 B 亦存在且 $B \leqslant A$

2) 若 B 存在则 D 亦存在且 $D \leqslant B$

3) 若 D 存在则 A 亦存在且 $A \leqslant D$

下证这三个命题：

1) 数 A 存在表明级数 $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 的部分和 A_{mn} 当 $m \to \infty, n \to \infty$ 时收敛到 A. 先前曾证明, 在这种情况下，$A = \sup_{m,n} A_{mn}$，由此推出 $A_{mn} \leqslant A$ 对于一切自然数 m, n 成立。显然，此时成立不等式

$$b_m(n) = \sum_{l=1}^{n} a_{ml} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} = A_{mn} \leqslant A$$

因此，对于任意的 m，存在数

$$b_m = \sup_n b_m(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}$$

又由于

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(n) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} = A_{mn} \leqslant A$$

则令 $n \to \infty$，对于任何 m 都有

$$A \geqslant \sum_{k=1}^{m} b_k = B_m$$

但 B_m 不减，故当 $m \to \infty$ 时数列 $\{B_m\}$ 收敛到某数 B，且 $B \leqslant A$。命题 1）获证。

2) 设 B 存在. 那么对于任意的部分和 $D_k = \sum_{r=1}^{k} d_r$ 存在数对 (m_0, n_0) 满足条件: $m(r) \leqslant m_0$ 和 $n(r) \leqslant n_0$ 对于一切 $r \leqslant k$ 成立. 这时, 一切被加数 d_r 都包括在和式 $A_{m_0n_0}$ 之中, 同时

$$A_{m_0n_0} = \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{n_0} a_{kl} \leqslant \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=1}^{m_0} b_k = B_{m_0} \leqslant B$$

这表明, 部分和 D_k 以数 B 为上界, 从而对于某个数 D 当 $k \to \infty$ 时有 $D_k \to D \leqslant B$. 命题 2) 获证.

3) 设 D 存在. 那么对于任何 A_{mn} 皆存在号码 k_0 使得和 $D_{k_0} = \sum_{k=1}^{k_0} d_k$ 包含了全部进入和 A_{mn} 中的被加数 a_{kl}. 于是对于一切 m, n 有 $A_{mn} \leqslant D_{k_0} \leqslant D$. 因此存在 $A = \sup_{m,n} A_{mn}$ 且 $A \leqslant D$, 这就是所要证的.

推论 2.19

设数对 (m, n)，并设 $\sum d_k$ 是级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 某个线性重排，则下列三级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}), \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}, \sum_{k=1}^{\infty} d_k$$

之中的一个绝对收敛可导出其他两个也绝对收敛到同一个和。♡

证明 把数 a_{mn} 表示成 $a_{mn} = p_{mn} - q_{mn}$ 其中

$$p_{mn} = \frac{|a_{mn}| + a_{mn}}{2} \geqslant 0, q_{mn} = \frac{|a_{mn}| - a_{mn}}{2} \geqslant 0$$

接下来只要把定理 (2.6.3) 使用于以 p_{mn} 和 q_{mn} 为通项的级数而后考察它们的差即可。

定理 2.38 (二重级数和累次级数的收敛性判别准则)

观察级数 $(B) - (E)$:

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|, k = 1, 2, \ldots \qquad (A, A')$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \cdots \qquad (B, B')$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}, \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}|, \cdots \qquad (C, C')$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}, \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \cdots \qquad (D, D')$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \sum_{r=1}^{\infty} |a_r|, \cdots \qquad (E, E')$$

若其中至少一个绝对值级数 $(B') - (E')$ 收敛，则级数 $(B) - (E)$ 收敛且级数和相同。♡

证明 首先证明级数 $(B') - (E')$ 其中一个收敛导出 $(B) - (E)$ 收敛。对于累次级数 (B) 和 (C) 推理是相似的 (只有索引的顺序发生了变化)，进一步只考虑级数 (B)。沿着以下链证明级数的收敛性 (箭头表示左侧级数的收

敛性意味着右侧级数的收敛性)：

$$(B')\longrightarrow(E'),(E)\longrightarrow(D'),(D)\longrightarrow(B'),(B)$$

1. $(B')\longrightarrow(E'),(E)$。设累次级数 (B') 收敛，记其和为 S'，其部分和序列为 S'_{mn}。记级数 (E') 的 p 阶部分和序列为 S'_p。由项的非负性，对于 $\forall m,n\in\mathbb{N}:S'_{mn}\leqslant S'$。固定任意号码 p，找到足够大的号码 m 和 n，使得级数 (E) 所有项包含在对应级数 p 阶部分和中，即包含矩阵前 m 行和前 n 列。但是这时满足不等式 $S'_p\leqslant S'_{mn}\leqslant S'$，则有 $\forall p:S'_p\leqslant S'$。由非负项级数 (E') 部分和序列有界，则有级数 (E') 收敛。得证级数 (E) 绝对收敛，则 (E) 收敛。

2. $(E')\longrightarrow(D'),(D)$。设级数 (E') 收敛。则它的部分和序列 $\left\{S'_p\right\}$ 有界：$\exists M>0,\forall p\in\mathbb{N}:S'_p\leqslant M$。固定级数 (D') 的任意部分和 S'_{mn}，找到足够大的号码 p 使得级数 (E) 的 p 阶部分和包含级数 (D) 的部分和序列 S_{mn} 中所有项。但这时有不等式 $S'_{mn}\leqslant S'_p\leqslant M$，则有 $\forall m,n:S'_{mn}\leqslant M$ 。则序列 $\{S'_{mn}\}$ 有界且由定理 (2.6.3) 级数 (D') 收敛。由定理 (2.6.3) 推出 (D) 收敛性。

3. $(D')\longrightarrow(B'),(B)$。设二重级数 (D') 收敛，则由定理 (2.6.3) 推出级数 (D) 收敛性。对于累次级数 $(B'),(B)$ 的证明，由定理 (2.6.3) 只需证明级数 (A') 和 (A) 的收敛性。级数 (A) 对每一个 k 的收敛性由级数 (A') 收敛性推出。对于级数 (A') 收敛性只需证级数有有界部分和序列。显然由二重级数 (D') 收敛有其部分和序列有界则有 (A') 的部分和序列有界性。由级数 (D') 和 (A') 收敛性及定理 (2.6.3)（以及二重级数和累次级数等式）推出级数 (B') 收敛性，再由 (D) 和 (A) 收敛性由定理 (2.6.3) 推出级数 (B) 收敛性及级数和等于 (D)。

注 由该定理还可以推出，若级数 $(B')-(E')$ 至少一个收敛，则所有级数 $(B')-(E')$ 收敛且有相同的和

第 3 章 函数级数基础

值得考虑的问题：如果趋于极限的函数是连续、可微或可积的，那极限函数是否也是连续、可微或可积的；函数列的导数或积分是否收敛的极限函数的导数或积分？

3.1 基本概念

3.1.1 函数项序列逐点收敛性与一致收敛性

定义 3.1 (空间中的点)

设 $\{x\}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上任意集合。若 $m=1$，则 $\{x\}$ 的项为数 $x\in\mathbb{R}$，若 $m\geqslant 2$，则 $\{x\}$ 的元素为带有坐标 $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ 的点

♣

定义 3.2 (函数序列及其定义域)

若任意 $n\in\mathbb{N}$ 都按照法则对应某个在 $\{x\}$ 上定义的函数 $f_n(x)$，这时称编号的函数集合 $f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$ 为函数序列 (ΦΠ) 且记为 $\{f_n(x)\}$。称函数 $f_n(x)$ 为函数序列的项。称在所有函数 $f_n(x)$ 上有定义的 $\{x\}$ 为函数序列的定义域

♣

定义 3.3 (参变函数族参变域)

若两个变量 x,t 的函数 $(x,t)\mapsto F(x,t)$ 定义于集合 $X\times T$，且可把变量 $t\in T$ 分离出来，则称上述函数为依赖于参数（参变量）t 的函数族，称 $t\in T$ 为参数或参变量。称 T 为参数集（参变量集）或参数域（参变量域），而函数族本身常记为 $f_t(x)$ 或 $\{f_t|t\in T\}$

♣

定义 3.4 (函数序列在一点收敛)

若函数 $f_n:X\to\mathbb{R}$ 在点 $x\in X$ 的值的数值序列 $\{f_n(x),n\in\mathbb{N}\}$ 上收敛，则称函数序列 $\{f_n(x),n\in\mathbb{N}\}$ 在点 x 收敛

♣

定义 3.5 (函数序列的收敛集（收敛域）)

称使函数 $f_n:X\to\mathbb{R}$ 的序列 $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合 $E\subset X$ 为函数序列的收敛域

♣

定义 3.6 (参变函数族沿基收敛域)

设 $\{f_t:X\to\mathbb{R},t\in T\}$ 为依赖于参数 t 的函数族，$\mathcal{B}$ 为参数集 T 中的基。若极限 $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x)$ 对于固定值 $x\in X$ 存在，则称该函数族在点 x 收敛。称全部收敛点的集合为该函数族在给定基 $\mathcal{B}$ 上的收敛域

♣

定义 3.7 (函数序列的极限函数)

在函数序列 $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ 收敛域上有由关系式 $f(x):=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 给出的函数 $f:E\to\mathbb{R}$，称它为函数序列 $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ 的极限（或极限函数）

♣

定义 3.8 (参变函数族沿基极限函数)

若一个函数族在集合 $E\subset X$ 的每一个点 x 在基 $\mathcal{B}$ 上收敛，那么就说，该函数族在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上收敛. 集合 E 上的函数 $f(x):=\lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x)$ 称为函数族 f_t 在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上的极限函数或极限.

♣

定义 3.9 (函数序列逐点收敛)

若 $f: E \to \mathbb{R}$ 为序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 极限函数，称该函数序列在集合 E 上收敛（或逐点收敛）到函数 f，记为：在 E 上 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，或当 $n \to \infty$ 时在 E 上 $f_n \to f$ ♣

定义 3.10 (参变函数族沿基逐点收敛)

设函数 $f_t: X \to \mathbb{R}$ 构成函数序列 $\{f_t | t \in T\}$, $\mathcal{B}$ 为集合 $E \subset X$ 中的基。若 $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x) = f(x)$ 在每一个点 $x \in E$ 成立，称该函数序列在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上逐点收敛到函数 $f: E \to \mathbb{R}$，记为：在 E 上 $f_t \underset{\mathcal{B}}{\to} f$ ♣

注

记法：在 E 上 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$，表示当 $m \to \infty$ 时在 E 上 $S_m(x) \to s(x)$；级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 E 上一致收敛到 $s(x)$，表示当 $m \to \infty$ 时在 E 上 $S_m(x) \rightrightarrows s(x)$

定义 3.11 (函数级数与和函数)

形式化记集 $\{x\}$ 上函数序列 ФП $\{u_n(x)\}$ 的无穷多项和为函数级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

称函数 $S_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} u_k(x)$ 为函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 的前 m 阶部分和函数。称函数级数的部分和函数序列的极限为级数的和（或和函数） ♣

注 （逐点收敛性与数值级数收敛性对应关系）

研究函数级数的逐点收敛性（Сходимость в точке）其实就是研究数值级数的收敛性

定义 3.12 (函数级数绝对收敛)

若在集合 E 的任何一个点 x，函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的相应数值级数绝对收敛，则称函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集合 E 上绝对收敛 ♣

例题 3.1 （2724/Lambert[1]级数）求函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ 的绝对收敛域和条件收敛域

解 当 $|x| = 1$ 时级数无意义。当 $|x| > 1$ 时级数通项当 $n \to \infty$ 时不是无穷小量，因此级数发散。当 $|x| < 1$ 时，$\left|\dfrac{x^n}{1-x^n}\right| \sim |x^n| \, (n \to \infty)$，因此级数绝对收敛

例题 3.2 （2732/二元函数级数）求函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n y^n}{x^n + y^n} (x > 0, y > 0)$ 绝对收敛域和条件收敛域

解 由通项关于 x, y 对称，不妨设 $x \geqslant y$，即 $y = \min\{x, y\}$。若 $x = y > 0$，则通项为

$$u_n = \frac{y^{2n}}{2y^n} = \frac{y^n}{2}$$

因此当 $y < 1$ 时级数收敛，而当 $y \geqslant 1$ 时级数发散；

若 $0 < y < x$，则通项

$$u_n = \frac{y^n}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n} \sim y^n (n \to \infty)$$

因此当 $y < 1$ 时级数收敛，而当 $y \geqslant 1$ 时级数发散。

综上，当 $0 < \min\{x, y\} < 1$ 时级数收敛，其余情况级数发散

注 （一致收敛性的引入）假设对集合 $\mathscr{X}$ 内的所有 X 的值，极限函数都存在。按极限定义也就是说：只要指定了 $\mathscr{X}$ 内的一个 x 的值（处理固定的数值序列），对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总可以找到一个序号 N，使得对一切

[1]朗伯（Lambert.J.H,1728.8.26-1777.9.25）德国数学家、天文学家、物理学家。1764 年进入柏林科学院，成为 Euler 与 Lagrange 的同事

$n > N$，不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

恒成立，其中 x 为预先指定的集合中的那个值。

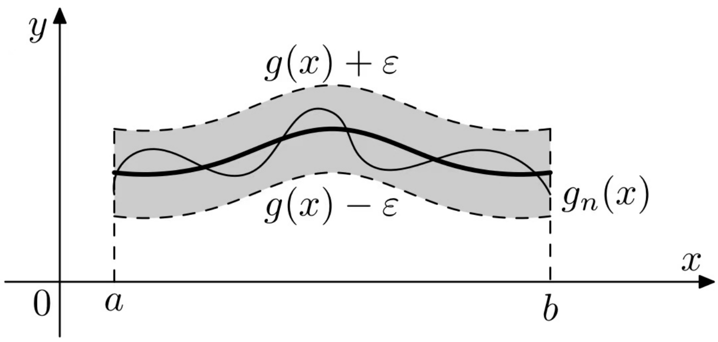
如果取另一 x 值，则得另一数值序列，而对同一 ε 所找到的序号 N 可能已不适用。于是必须代之以更大的。但 x 可取无穷多个值，那么有无穷多个不同的收敛于极限的数序列，对于每一序列要分别找它的一个 N。于是发生这样的问题：是否存在这样一个序号 N，它在所给 ε 之下能同时适用于所有这些序列呢，即不依赖于 x 的选取

定义 3.13 (序列的一致收敛)

如果

(1) 序列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 在集合 $\mathscr{X}$ 上有定义

(2) 对每一数 $\varepsilon > 0$ 都存在这样一个与 x 无关的序号 N，使得在 $n > N$ 时不等式 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 同时对 $\mathscr{X}$ 内所有的 x 都成立，则称序列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ （或函数 $f_n(x)$）对区域 $\mathscr{X}$ 内的 x 一致地收敛于函数 $f(x)$ ♣



定义 3.14 (函数项序列的一致收敛)

设函数 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 构成函数族 $\{f_t \mid t \in T\}, \mathcal{B}$ 是集合 $E \subset X$ 中的基。如果对于任何 $\varepsilon > 0$，可以找到基 $\mathcal{B}$ 的元素 B，使关系式 $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$ 对于任何值 $t \in B$ 和任何点 $x \in E$ 都成立，称该函数族在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛到函数 $f : E \to \mathbb{R}$, 并且经常记之为：（在 E 上 $f_t \underset{B}{\rightrightarrows} f$ ） ♣

注 定义可以形式化地记为

$$\left(\text{在}E f_t \underset{B}{\to} f\right) := \forall\varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists B \in \mathcal{B}, \forall t \in B : (|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon)$$

$$\left(\text{在}E\text{上}f_t \underset{B}{\rightrightarrows} f\right) := \forall\varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}, \forall x \in E, \forall t \in B : (|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon\ )$$

定义 3.15 (参变函数的一致收敛)

如果由函数 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 构成的函数族 $\{f_t \mid t \in T\}$ 在集合 $E \subset X$ 和基 $\mathcal{B}$ 上收敛，由此出现的极限函数是 $f : E \to \mathbb{R}$，并且在定义 (3.14) 意义下，该函数族在集合 E 上一致收敛到函数 f，那么就说该函数族在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛 ♣

定义 3.16 (函数项级数的一致收敛)

假设一收敛的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$，考察其和函数 $f(x)$、部分和 $f_n(x)$ 及其第 n 项后的余项

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x)$$

对任意固定的 x:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\text{并且} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

如果部分和 $f_n(x)$ 对区域 $\mathscr{X}$ 内的 x 一致地趋于级数之和 $f(x)$ (也就是说, 级数 $\varphi_n(x)$ 的余项一致趋于 0), 则称函数项级数在这区域内一致收敛。

定义显然等价于:

一个在区域 $\mathscr{X}$ 内所有 x 值上都收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 如果对每一 $\varepsilon > 0$ 恒存在这样一个与 x 无关的序号 N, 使在 $n > N$ 时不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\text{或} |\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

对 $\mathscr{X}$ 内所有的 x 都成立, 则称为在此区域内是一致收敛的

♣

定义 3.17 (参变函数族沿基一致收敛第一定义)

设函数 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 构成函数族 $\{f_t | t \in T\}$, 集合 $E \subset X$, $\mathcal{B}$ 为基。若对于任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到基 $\mathcal{B}$ 的元素 B, 使关系式 $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$ 对于任意 $t \in B$ 和任何点 $x \in E$ 都成立, 称该函数族在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛到函数 $f : E \to \mathbb{R}$, 经常记为: 在 E 上 $f_t \underset{B}{\rightrightarrows} f$

♣

注 (参变函数族逐点收敛性和一致收敛性的形式一致性) 定义可形式化记为:

在 E 上 $f_t \underset{B}{\to} f := (\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in E)(\exists B \in \mathcal{B})(\forall t \in B) : |f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$

在 E 上 $f_t \underset{B}{\rightrightarrows} f := (\forall\varepsilon > 0)(\exists B \in \mathcal{B})(\forall x \in E))(\forall t \in B) : |f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$

联想函数在集合上连续与一致连续之间的关系, 引入量 $\Delta_t(x) = |f(x) - f_t(x)|$ 来度量 f_t 与 f 这两个函数在点 $x \in E$ 的值之间的偏差, 再考虑一个量 $\Delta_t = \sup\limits_{x\in E} \Delta_t(x)$, 粗略地说, 它表征在所有的点 $x \in E$ 的范围内函数 f_t 的值与函数 f 的相应值之间的最大偏差 (虽然它也可能不存在)。因此, 在任何一个点 $x \in E$ 有 $\Delta_t(x) \leqslant \Delta_t$。在这些记号下, 上述定义改写为:

$$\text{在}E\text{ 上}f_t \underset{B}{\to} f := (\forall x \in E)(\text{ 在}\mathcal{B}\text{ 上}\Delta_t(x) \to 0)$$

$$\text{在}E\text{ 上}f_t \underset{B}{\rightrightarrows} f := (\text{ 在}\mathcal{B}\text{ 上}\Delta_t \to 0)$$

则显然有

$$(\text{在}E\text{上}f_t \underset{B}{\rightrightarrows} f) \Rightarrow (\text{在}E\text{ 上}f_t \underset{B}{\to} f)$$

即若参变函数族 f_t 在集合 E 上一致收敛到函数 f, 则它在该集合上也逐点收敛到 f。一般而言, 逆命题不成立

定义 3.18 (参变函数族沿基一致收敛第二定义)

若由函数 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 构成的参变函数族 $\{f_t | t \in T\}$ 在集合 $E \subset X$ 和基 $\mathcal{B}$ 上收敛到极限函数 $f : E \to \mathbb{R}$, 且在定义 (3.17) 意义下, 该函数族在集合 E 上一致收敛到函数 f, 则称该函数族在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛

♣

3.1.2 函数序列一致收敛 Cauchy 准则

定理 3.1 (函数序列一致收敛 Cauchy 准则)

设 $\{f_t, t \in T\}$ 为由函数 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 构成的依赖于参数 $t \in T$ 的函数族, $\mathcal{B}$ 为 T 中的基。函数族 $\{f_t, t \in T\}$ 在集合 $E \subset X$ 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛的充要条件为: 对于任何一个 $\varepsilon > 0$, 可找到基 $\mathcal{B}$ 的元素 B, 使不等式 $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$ 对于任任意参数值 $t_1, t_2 \in B$ 和任何点 $x \in E$ 都成立。形式化记为:

$$(\text{在}E\text{上}f_t \underset{B}{\rightrightarrows}) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists B \in \mathcal{B})(\forall t_1, t_2 \in B)(\forall x \in E) : |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$$

♡

证明

必要性：上述条件必要性显然，因为若 $f: E \to \mathbb{R}$ 为极限函数且在 E 和基 $\mathcal{B}$ 上 $f_t \rightrightarrows f$，则可找到基的元素 B，使 $|f(x) - f_t(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 对于任何 $t \in B$ 和任何 $x \in E$ 都成立。这时，对于任意 $t_1, t_2 \in B$ 和任意 $x \in E$，有

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant |f(x) - f_{t_1}(x)| + |f(x) - f_{t_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

充分性：对于每一个固定的 $x \in E$，可认为量 $f_t(x)$ 为参变量 $t \in T$ 的函数。若定理条件成立，即该函数在基 $\mathcal{B}$ 上的极限存在的 Cauchy 准则的条件成立。因此函数族 $\{f_t, t \in T\}$ 在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上至少逐点收敛到某个函数 $f: E \to \mathbb{R}$

不等式 $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$ 对于任何 $t_1, t_2 \in B$ 和任何 $x \in E$ 都成立。在这个不等式中对 t_1 取极限可得 $|f(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant \varepsilon$ 对于任何 $t_2 \in B$ 和任何 $x \in E$ 都成立，在无关本质的记号变化并用非严格不等式代替严格不等式的情况下，恰好与函数族 $\{f_t, t \in T\}$ 在集合 E 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛到函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 的定义一致

注 对实值函数族 $f_t: X \to \mathbb{R}$ 引入的收敛和一致收敛的定义也适用于在任何度量空间 Y 中取值的函数族 $f_t: X \to Y$。这时，在上述定义中自然应当把 $|f(x) - f_t(x)|$ 改为 $d_Y(f(x), f_t(x))$，其中 d_Y 表示空间 Y 中的度量。对于赋范向量空间 Y，特别地，对于 $Y = \mathbb{C}$, 或 $Y = \mathbb{R}^m$，或 $Y = \mathbb{C}^m$，甚至连这种形式上的改变也不需要

注 Cauchy 准则当然也适用于在度量空间 Y 中取值的函数族 $f_t: X \to Y$，只要 Y 是完备度量空间。从证明可见，仅仅在准则的充分条件中才需要 Y 的完备性

命题 3.1 (函数序列一致收敛充要条件)

函数序列 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在集合 X 上一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充要条件为

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sup_{x \in X} r_n(x) \right\} = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \right\} = 0$$

♠

证明

充分性：记 $a_n = \left\{ \sup\limits_{x \in X} r_n(x) \right\} (n = 1, 2, \cdots)$，则有 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N): |a_n| < \varepsilon$$

即 $|f(x) - f_n(x)| = r_n(x) < \varepsilon$ 于 $\forall x \in X$ 上都成立，因此 $f_n(x)$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$

必要性：若函数序列 $f_n(x)$ 于 X 上一致收敛，则有极限函数 $f(x)$，且

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(\forall x \in X): |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

则就有 $\sup\limits_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$，根据极限的定义即为 $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ \sup\limits_{x \in X} r_n(x) \right\} = 0$

注 对于给定集 X 和在其上有定义的函数序列 $\{f_n(x)\}$，用本命题的结论来验证它是否一致收敛的一般做法为：

(1) 求出极限函数 $f(x)$

(2) 求出 $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ 在 X 上的上确界，如果这个确界能够达到，则就是最大值

注 **一致收敛的判断**：研究在集合 **X** 上一致收敛的函数项序列 $\{f_n(x)\}$

(1) 找到极限函数

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)(\text{对收敛域中任意取定的}x)$$

(2) 写出余和函数项序列 $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$，必要时展开绝对值

(3) 找处数列 $a_n = \sup_{x \in \mathbf{X}} r_n(\chi)$（在这里，$n$ 是固定的）

(4) 检验极限 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ 是否成立。若命题为真，则一致收敛；为假则不一致收敛

定义 3.19 (函数级数收敛与一致收敛)

设 $\{a_n : X \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ 为函数序列，若部分和函数序列

$$\left\{S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(x), m \in \mathbb{N}\right\}$$

在集合 $E \subset X$ 上收敛（对应地，一致收敛），称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集合 E 上收敛（对应地，一致收敛）

定理 3.2 (函数项级数一致收敛 Cauchy 准则)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集合 E 上一致收敛充要条件为：对于任何一个 $\varepsilon > 0$，可找到一个数 $N \in \mathbb{N}$，使不等式

$$|a_n(x) + \cdots + a_m(x)| < \varepsilon \tag{3.1}$$

对于任何满足 $m \geqslant n > N$ 的自然数 m, n 在任何点 $x \in E$ 都成立

形式化记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{x\in E}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \geqslant n > N)(\forall x \in E) : |a_n(x) + \cdots + a_m(x)| < \varepsilon$$

证明 由函数序列在集 $E \subset X$ 上一致收敛 Cauchy 准则 (3.1)，则对 $\{S_n : X \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ 有

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n_1, n_2 > N)(\forall x \in E) : (|S_{n_1}(x) - S_{n_2}(x)| < \varepsilon) \tag{3.2}$$

在 (3.2) 中取 $n_1 = m, n_2 = n - 1$，并认为 $S_n(x)$ 为该级数的部分和，则得不等式 (3.1)，在定理的同样记号和条件下，从不等式 (3.1) 得关系式 (3.2)

注 没有在定理表述中指明函数 $a_n(x)$ 的值域，但认为它为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。事实上，任意完备赋范向量空间，例如 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$，均可以为该函数的值域

注 若所有函数 $a_n(x)$ 都为常函数，则得数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 Cauchy 准则

推论 3.1 (函数项级数一致收敛必要条件)

若函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集合 E 上一致收敛，则当 $n \to \infty$ 时，在 E 上 $a_n(x) \rightrightarrows 0$，形式化记为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{x\in E}{\rightrightarrows}\right) \Rightarrow \left(a_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0\right)$$

证明 由函数序列一致收敛到零的定义及不等式 (3.1)（取 $n = m$）即证

例题 3.3 (2773) 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

在下列区间上的一致收敛性（其中 $\varepsilon > 0$）: (a) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$; (b) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$

解 （命题 **(3.1)** 方法）利用通项 $u_n(x)$ 的裂项分解有

$$u_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

则得部分和函数序列：

$$S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

则得函数级数和为 $S(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, +\infty), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(a) 在区间 $[0,\varepsilon]$ 上，有

$$\sup_{x\in[0,\varepsilon]}|S(x)-S_n(x)|=\sup_{x\in(0,\varepsilon]}\left|\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right|=1$$

则函数级数不一致收敛

(b) 在区间 $[\varepsilon,+\infty)$ 上有

$$\sup_{x\in[\varepsilon,+\infty]}|S(x)-S_n(x)|=\frac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)\cdots(1+n\varepsilon)}\leqslant\frac{1}{n!\varepsilon^n}$$

由函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\varepsilon^n}$ 可用 D'Alembert 判别法 (2.16) 知其收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!\varepsilon^n}=0$，利用函数序列一致收敛充要条件 (3.1)，则级数在 $[\varepsilon;+\infty)$ 上一致收敛

例题 3.4 （2768）研究级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在区间 $(0;+\infty)$ 上的一致收敛性

解

解一：（命题 **(3.1)** 方法）级数和显然为 e^x，利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式就有

$$R_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1$$

由余项表达式可以看出，在 $0<x<+\infty$ 上，只要令 $x=n+1$ 代入，就有 $R_n(x)>1$. 因此根据命题 (3.1) 可见级数在 $(0;+\infty)$ 上不一致收敛

解二：（利用函数级数一致收敛必要条件 **(3.1)**）反证：若函数级数通项在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛于 0，则对 $\varepsilon_0=1$ 有

$$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(\forall x>0):\frac{x^n}{n!}<1$$

不等式显然对每一个 n 都不能在 $(0;+\infty)$ 上成立，矛盾，则通项在 $(0;+\infty)$ 上不一致收敛于 0，不满足函数级数一致收敛必要条件 (3.1)

3.2 函数级数敛散性判别法

3.2.1 Weierstrass 强函数判别法

引理 3.1 (推广 Weierstrass 比较判别法)

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的项对于任何 $x\in E$ 和所有足够大的序号 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $|a_n(x)|\leqslant b_n(x)$，则从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在 E 上一致收敛可以推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 E 上绝对收敛且一致收敛

♡

证明 由条件对所有足够大序号 n 和 m（设 $n\leqslant m$）和任何点 $x\in E$ 成立：

$$|a_n(x)+\cdots+a_m(x)|\leqslant|a_n(x)|+\cdots+|a_m(x)|\leqslant b_n(x)+\cdots+b_m(x)=|b_n(x)+\cdots+b_m(x)|$$

则根据函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2)，对于任意 $\varepsilon>0$，可以利用函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的一致收敛性指出序号 $N\in\mathbb{N}$，使 $|b_n(x)+\cdots+b_m(x)|<\varepsilon$ 对于任何 $m\geqslant n>N$ 和任何 $x\in E$ 都成立。这时，从上述不等式可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ 按照函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) 都一致收敛

定理 3.3 (Weierstrass 强函数判别法)

设函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$，若可以找到一个收敛数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$，使 $\sup\limits_{x\in E}|a_n(x)|\leqslant M_n$ 对于所有足够大的序号 $n\in\mathbb{N}$ 都成立，则函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在集合 E 上绝对收敛且一致收敛

♡

证明 可以认为收敛的数值级数为由集合 E 上的常函数组成的级数。由数值级数收敛 Cauchy 准则 (2.1)，进一步即有它在 E 上一致收敛。则在引理 (3.1) 中取 $b_n(x) = M_n$ 即证

注 Weierstrass 强函数判别法 (3.3) 为函数级数一致收敛最简单也最常用的充分条件

命题 3.2 (Weierstrass 强函数判别法可解性定理)

能够用 Weierstrass 强函数判别法 (3.3) 判定函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 于集合 X 上一致收敛的充要条件为非负项强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，其中 $a_n = \sup\limits_{x\in X} |u_n(x)|\,(n = 1, 2, \cdots)$

证明

充分性：显然。因为非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，从其通项可见该级数可以用作强级数

必要性：若能用 Weierstrass 强函数判别法 (3.3) 证明题中函数级数于 X 上一致收敛，则存在收敛非负项强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，且对每个 n 和 $x \in X$ 满足条件：$|u_n(x)| \leqslant b_n$。这表明对每一个 n 有 $0 \leqslant a_n = \sup\limits_{x\in X} |u_n(x)| \leqslant b_n$，因此根据第一比较定理 (2.2.1) 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

注 用 Weierstrass 强函数判别法 (3.3) 判定在 X 上的级数一致收敛时，该级数还必定在 X 上处处绝对收敛。该命题仅给出了 Weierstrass 强函数判别法 (3.3) 能够成功应用的充要条件，但并不是函数项级数在 X 上绝对一致收敛的充分必要条件。若命题中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则命题只表明不能用 Weierstrass 强函数判别法 (3.3)，然而该级数仍然可能在 X 上绝对收敛且一致收敛

例题 3.5 (2767/几何级数一致收敛性) 研究级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在下列区间上的一致收敛性：(a) $|x| < q$，其中 $q < 1$；(b) $|x| < 1$

解

解一：(命题 **(3.1)** 方法) 该几何级数收敛域为 $|x| < 1$，在 $x \neq 1$ 时有

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

且可由此得到和函数 $S(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

(a) 当 $|x| < q < 1$ 时有

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{x^n}{1 - x}\right| < \frac{q^n}{1 - q}$$

则当 $n \to \infty$ 时有 $\sup\limits_{|x|<q} |S_n(x) - S(x)| \to 0$，即函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在区间 $|x| < q < 1$ 上一致收敛

(b) 当 $|x| < 1$ 时，在 $|S_n(x) - S(x)| = \left|\dfrac{x^n}{1 - x}\right|$ 的表达式中，令 $x \to 1 - 0$，则仅能得无穷大量，则函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在区间 $(-1; 1)$ 上不一致收敛

解二：(**a**) **Weierstrass** 强函数判别法 **(3.3)**：当 $|x| < q < 1$ 时有 $|x|^n < q^n (n = 1, 2, \cdots)$，则令 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 为强级数，即得函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < q < 1$ 时一致收敛性

(**b**) 利用函数级数一致收敛必要条件 (**3.1**)：由函数序列 $\{x^n\}$ 在 $[0; 1]$ 上不一致收敛，且它在 $[0; 1)$ 上不一致收敛于 0，则它在 $(-1; 1)$ 上也不一致收敛于 0，则知以 x^n 为通项的函数级数在 $(-1; 1)$ 上不一致收敛

3.2.2 Abel-Dirichlet 判别法

定义 3.20 (函数序列一致有界)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上定义，若

$$(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\{x\}):|f_n(x)|\leqslant M$$

则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界 ♣

定义 3.21 (函数序列单调性)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上定义，若对每一个 $x_0\in\{x\}$ 数值序列 $\{f_n(x_0)\}$ 不增，或对每一个 $x_0\in\{x\}$ 数值序列 $\{f_n(x_0)\}$ 不减，称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上单调 ♣

注 （函数序列单调性）对在集 $\{x\}$ 上单调的函数序列 $\{f_n(x)\}$，其中每个函数 $f_n(x)$ 不一定在集 $\{x\}$ 上单调。例如序列 $\left\{\dfrac{\sin x}{n}\right\}$ 在 $[0;\pi]$ 上单调，但序列每个函数 $f_n(x)=\dfrac{\sin x}{n}$ 在 $[0;\pi]$ 上不单调。

引理 3.2 (关于 Abel 恒等式的引理)

设 $a_n,a_{n+1},\cdots,a_m$ 为复数或某个赋范空间中的向量，其中 $a_k=A_k-A_{k-1},k=n,\cdots,m$，若 $b_n,b_{n+1},\cdots,b_m$ 为单调实数列，则有估计

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\leqslant 4\max_{n-1\leqslant k\leqslant m}|A_k|\cdot\max\{|b_n|,|b_m|\}\tag{3.3}$$

♡

证明 由 Abel 恒等式 (2.12) 即 $\sum\limits_{k=n}^{m}a_kb_k=A_mb_m-A_{n-1}b_n+\sum\limits_{k=n}^{m-1}A_k(b_k-b_{k+1})$ 有

$$\begin{aligned}&|A_mb_m|+|A_{n-1}b_n|+\left|\sum_{k=n}^{m-1}A_k(b_k-b_{k+1})\right|\\ \leqslant&\max_{n-1\leqslant k\leqslant m}|A_k|\cdot\left(|b_m|+|b_n|+\sum_{k=n}^{m-1}|b_k-b_{k+1}|\right)\\ =&\max_{n-1\leqslant k\leqslant m}|A_k|\cdot(|b_m|+|b_n|+|b_n-b_m|)\leqslant 4\max_{n-1\leqslant k\leqslant m}|A_k|\cdot\max\{|b_n|,|b_m|\}\end{aligned}$$

定理 3.4 (函数级数一致收敛 Abel-Dirichlet 判别法)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 的各项为复值函数 $a_n:X\to\mathbb{C}$ 与实值函数 $b_n:X\to\mathbb{R}$ 之积，则该级数在集合 E 上一致收敛的充要条件为下列两组条件中的任何一组：

第一组条件（Dirichlet 判别法）：

α_1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和 $s_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{k}a_n(x)$ 在 E 上一致有界

β_1）函数序列 $b_n(x)$ 在 E 上单调并且一致趋于零

第二组条件（Abel 判别法）：

α_2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 E 上一致收敛

β_2）函数序列 $b_n(x)$ 在 E 上单调并且一致有界

♡

解

证明一：（利用关于 **Abel** 恒等式的引理 **(3.2)** 估计单调数列）由序列 $b_n(x)$ 单调性，能够对每一个 $x\in E$

写出类似于 (3.3) 的估计式

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 4 \max_{n-1\leqslant k\leqslant m} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\} \tag{3.4}$$

其中取 $s_k(x)-s_{n-1}(x)$ 作为 $A_k(x)$

若第一组条件 α_1), β_1) 成立，则一方面

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall k\in N)(\forall x\in E): |A_k(x)|\leqslant M$$

另一方面，无论取怎样的数 $\varepsilon>0$，不等式 $\max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}<\dfrac{\varepsilon}{4M}$ 对所有足够大的 n, m 和任何 $x\in E$ 都成立。因此从估计 (3.4) 可知，

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right|<\varepsilon$$

对所有足够大的 n, m 和任何 $x\in E$ 都成立，即函数级数一致收敛 Cauthy 准则 (3.2) 对所考虑函数级数成立。

在第二组条件 α_2), β_2) 下，量 $\max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}$ 有界，又由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛，根据函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2)，对于任意 $\varepsilon>0$ 以及任何足够大的值 n 和 $k>n$，在任何点 $x\in E$ 都有 $|A_k(x)|=|S_k(x)-S_{n-1}(x)|<\varepsilon$。因此从估计 (3.4) 得函数级数一致收敛 Cauthy 准则 (3.2) 对所考虑函数级数成立

注 当 a_n 和 b_n 为常值函数时，命题退化为数项级数收敛性 Abel-Dirichlet 检验法

例题 3.6 （2775/Dilichlet 判别法）研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在下列区间上一致收敛性：(a)$\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$;(b)$0\leqslant x\leqslant 2\pi$

解

(a) 在区间 $[\varepsilon; 2\pi-\varepsilon]$ (这里要求 $0<\varepsilon<\pi$) 上有估计

$$|\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|}$$

因此用 Dilichlet 判别法 (3.4) 知级数在 $[\varepsilon; 2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛

(b) 由函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) 有：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$于$X$上不一致收敛 $\Longleftrightarrow$

$$(\exists\varepsilon_0>0)(\forall N)(\exists n>N, p>0)(\forall x\in X): |u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\geqslant\varepsilon_0$$

以下固定取 $p=n$，于是要求成立不等式

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\cdots+\frac{\sin 2nx}{2n}\right|\geqslant\varepsilon_0$$

若取 $x=\dfrac{\pi}{4n}$，则在上式左边的绝对号内的每一个分式的分子都大于 $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此这 n 项之和就大于 $n\cdot\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。取定 $\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，则对任意给定的 N，就可取 $n=p=N+1$, $x=\dfrac{\pi}{4n}$ 得

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\cdots+\frac{\sin 2nx}{2n}\right|>\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{n}{2n}=\varepsilon_0$$

则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $[0; 2\pi]$ 上不一致收敛得证

注 该级数在 $[0; 2\pi]$ 上处处收敛，在 $x\neq 0, \pi, 2\pi$ 时条件收敛，函数级数 Weierstrass 强级数判别法 (3.3) 失效，故考虑使用函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2)

3.2.3 一致有界变差函数序列与变差形式 Abel 第一，第二判别法

定义 3.22 (一致有界变差)

设函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上定义，若函数级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}(x)-v_k(x)| \tag{3.5}$$

在集 $\{x\}$ 上一致收敛，称函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界变差 (последовательность, обладающая на множестве$\{x\}$равномерно ограниченным изменением) ♣

注 （一致有界变差与一致有界）函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界变差并不能推出函数序列在集 $\{x\}$ 上一致有界。例如通项为 $v_n(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{n}, x\in(0;1]$ 且 $v_n(0)=0$ 的函数序列在 $[0;1]$ 一致有界变差（级数 (3.5) 部分和为 $S_n(x)=1-\dfrac{1}{n+1}, x\in(0,1]$），但该序列在 $[0;1]$ 非一致有界

命题 3.3 (一致有界变差必要条件)

若函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界变差，则函数级数在集 $\{x\}$ 上一致收敛 ♠

证明 由变差级数 (3.5) 在集 $\{x\}$ 上一致收敛及函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) 有级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(v_{k+1}(x)-v_k(x)) \tag{3.6}$$

在集 $\{x\}$ 上收敛。则由定义有函数级数 (3.6) 部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛。而由通项 $\{v_n(x)\}$ 可以表达为 $v_n(x)=S_{n-1}(x)+v_1(x)$ 有序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛

命题 3.4 (一致有界变差充分条件)

若单调函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛，则函数序列在集 $\{x\}$ 上一致有界变差 ♠

证明 设函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛向 $v(x)$。由 $\{v_n(x)\}$ 在 $\{x\}$ 上单调性有对于任意 n，差 $v_{n+1}(x)-v_n(x)$ 在集 $\{x\}$ 所有点上非负（或者对于任意 n，差 $v_{n+1}(x)-v_n(x)$ 在集 $\{x\}$ 所有点上非正）。则变差级数 (3.5) 部分和序列有表达式：

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|v_{k+1}(x)-v_k(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}(x)-v_k(x))\right|=|v_{n+1}(x)-v_1(x)|$$

则有函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛到 $|v(x)-v_1(x)|$。因此变差级数 (3.5) 在集 $\{x\}$ 上一致收敛且函数序列 $\{v_n(x)\}$ 一致有界变差。

定理 3.5 (变差形式 Abel 第一判别法)

设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)v_k(x)$，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 的部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界，而函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界变差且收敛到零，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)v_k(x)$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛 ♡

证明 由条件有 $(\exists M)(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\{x\}):|S_n(x)|\leqslant M$。由函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛向零且变差级数 (3.5) 在集 $\{x\}$ 上一致收敛，则有不等式

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N)(\forall p\in\mathbb{N})(\forall x\in\{x\}):|v_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3M} \tag{3.7}$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N)(\forall p\in\mathbb{N})(\forall x\in\{x\}):\sum_{k=n+1}^{n+p}|v_{k+1}(x)-v_k(x)|<\frac{\varepsilon}{3M} \tag{3.8}$$

利用 Abel 恒等式 (2.12) 有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k\left(v_k - v_{k+1}\right) + S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}, p \neq 1 \tag{3.9}$$

若其中 $p=1$，则公式 (3.9) 第一个和为零，左部估计为

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)\left(v_k(x) - v_{k+1}(x)\right)\right| + |S_{n+p}(x)|\,|v_{n+p}(x)| + |S_n(x)|\,|v_{n+1}(x)|$$

然后利用 $(\exists M)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \{x\}) : |S_n(x)| \leqslant M$ 得 $|S_n(x)| \leqslant M$ 满足

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + M\,|v_{n+p}(x)| + M\,|v_{n+1}(x)|$$

其中取 $n > N$，利用估计 (3.7)(3.8) 得到不等式

$$(\forall n \geqslant N)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in \{x\}) : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| < M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon$$

则由函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2)，函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛

定理 3.6 (变差形式 Abel 第二判别法)

设函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$，且函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛，而函数序列 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界变差且一致有界，则函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$ 在集 $\{x\}$ 一致收敛

证明 由 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界，则有

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \{x\}) : |v_n(x)| \leqslant M \tag{3.10}$$

由条件，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上非一致有界，考虑

$$(n \geqslant N) : \widehat{S}_n(x) = \sum_{k=N}^{n} u_k(x)$$

固定任意数 $\varepsilon > 0$，函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 由条件在 $\{x\}$ 上一致收敛，则由函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) 有

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall x \in \{x\}) : \left|\widehat{S}_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{3.11}$$

固定 N，由函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) 有函数级数 (3.5) 对于 $M > 0$ 有

$$(\exists N_1 > N)(\forall x \in \mathbb{X})(\forall n \geqslant N_1, p \in \mathbb{X}) : \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \leqslant M \tag{3.12}$$

另有 $(\forall n > N) : u_n(x) = \widehat{S}_n(x) - \widehat{S}_{n-1}(x)$。则由 Abel 恒等式 (2.12) 有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \widehat{S}_k\left(v_k - v_{k+1}\right) + \widehat{S}_{n+p}v_{n+p} - \widehat{S}_n v_{n+1}, p \neq 1 \tag{3.13}$$

若其中 $p=1$，公式 (3.13) 右部第一个和为 0，左部有估计

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \widehat{S}_k(x)\left(v_k(x) - v_{k+1}(x)\right)\right| + \left|\widehat{S}_{n+p}(x)\right|\,|v_{n+p}(x)| + \left|\widehat{S}_n(x)\right|\,|v_{n+1}(x)|$$

利用 (3.10)(3.11)(3.12) 估计不等式右部有

$$(\forall n \geqslant N_1)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in \{x\}) : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| < \varepsilon$$

则由函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$ 一致收敛性得证。

定理 3.7 (变差形式 Dirichlet-Abel 判别法)

设函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在集 $\{x\}$ 上有一致有界部分和序列，而函数级数 $\{v_n(x)\}$ 在 $\{x\}$ 单调一致收敛于 0，则函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$ 在集 $\{x\}$ 上一致收敛。

证明 由一致有界变差充分条件 (3.2.3)，则级数 $\{v_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上一致有界变差，则满足变差形式 Abel 第一判别法 (3.2.3) 条件，得证。

3.2.4 Dini 判别法

定理 3.8 (Dini 定理/函数序列 Dini 判别法)

(Dini[a]定理/函数序列 Dini 判别法）若连续函数的序列在紧集上单调收敛到连续函数，则该序列在该紧集上一致收敛。

[a]迪尼 (B. Dini, 1845-1918) 意大利数学家, 以函数论研究著称

证明

证明一：(利用 **Heine-Borel-Lebesgue** 定理/有限覆盖定理）不妨设 f_n 单调不减收敛到 f。任意取固定的 $\varepsilon>0$。对于紧集 K 的任何一个点 x，可以找到序号 n_x，使 $0 \leqslant f(x)-f_{n_x}(x)<\varepsilon$。因为函数 f 和 f_{n_x} 在 K 上连续, 所以不等式 $0 \leqslant f(\xi)-f_{n_x}(\xi)<\varepsilon$ 在点 $x \in K$ 的某个邻域 $U(x)$ 内仍然成立. 用这样的邻域覆盖紧集 K, 由此可以选出有限覆盖 $U\left(x_1\right), \cdots, U\left(x_k\right)$, 然后取固定的序号 $n(\varepsilon)=\max \left\{n_{x_1}, \cdots, n_{x_k}\right\}$. 于是, 对于任何 $n>n(\varepsilon)$, 因为 $\left\{f_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ 是不减序列, 所以在任何点 $\xi \in K$ 有 $0 \leqslant f(\xi)-f_n(\xi)<\varepsilon$.

证明 证明二：(利用 **Bolzano-Weierstrass** 定理/聚点定理）不妨设函数序列 f_n 在集 {x} 上单调不减。记 $r_n(x)=f(x)-f_n(x)$，则 $\{r_n(x)\}$ 满足在集 $\{x\}$ 上不增，所有元素 $r_n(x)$ 在集 $\{x\}$ 上非负且连续，以及 $(\forall x \in \{x\}): \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x)=0$。以下只需证：$\{r_n(x)\}$ 在 $\{x\}$ 上一致收敛到 0。需证 $(\forall \varepsilon>0)(\exists n)(\forall x \in\{x\}): r_n(x)<\varepsilon$。由 $\{r_n(x)\}$ 连续性有 $(\forall m>n): r_m(x)<\varepsilon$

反证：假设

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall n)(\exists x_n \in\{x\}): r_n\left(x_n\right) \geqslant \varepsilon \tag{3.14}$$

于是构造了数列 $\{x_n\}$。由集 $\{x\}$ 有界性与 Bolzano-Weierstrass 定理，序列 $\{x_n\}$ 能找到子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到极限点 x_0。由集 $\{x\}$ 为闭集则有其包含所有极限点，则有 $x_0 \in\{x\}$。由每个函数 $r_m(x)$ 从某个序号 m 开始在 x_0 连续，则

$$(\forall m): \lim_{k \rightarrow \infty} r_m\left(x_{n_k}\right)=r_m\left(x_0\right) \tag{3.15}$$

另一方面由 $\{r_n(x)\}$ 在集 $\{x\}$ 上不增有 $(\forall m)(\exists n_k>m): r_m\left(x_{n_k}\right) \geqslant r_{n_k}\left(x_{n_k}\right)$ 由该不等式与不等式 (3.14) 得

$$(\forall m)(\forall n_k>m): r_m\left(x_{n_k}\right) \geqslant \varepsilon \tag{3.16}$$

由 (3.15)(3.16) 取极限后则有

$$(\forall m \in \mathbb{N}): r_m\left(x_0\right) \geqslant \varepsilon$$

则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\left(x_0\right)=0$。

注 Dini 判别法为充分判别法，但四个条件必不可少（变集为紧集，函数序列在变集上单调，每个函数在变集上连续，极限函数在变集上连续），可以证明仅满足三个条件都是非一致收敛的

推论 3.2 (函数级数 Dini 判别法)

若函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的项为紧集 K 上非负连续函数 $a_n : K \to \mathbb{R}$，且该函数级数在 K 上收敛到连续函数，则函数级数在 K 上一致收敛.

证明 该级数部分和 $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ 显然满足 Dini 定理 (3.2.4) 条件。

3.3 函数级数运算

3.3.1 函数序列逐项极限与函数级数逐项极限

定理 3.9 (函数级数逐项极限)

设函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 $\{x\}$ 上一致收敛到和函数 $S(x)$ 且级数级数所有项在点 a 有极限 $\lim\limits_{x\to a} u_k(x) = b_k$，则和函数 $S(x)$ 在点 a 有极限，且成立等式

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to a} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

证明 欲证数值级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛。由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 收敛，则由函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) 有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon)\mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in \{x\}) : |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.17}$$

固定不等式 (3.17) 的号码 n 和 p 固定。取极限 $x \to a$ 得

$$(\forall n \geqslant \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N}) : |b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

则由数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛

在点 a 在 $x \in \{x\}$ 充分小的邻域中估计差 $S(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$，有

$$(\forall x \in \{x\})(\forall n \in \mathbb{N}) : S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$$

估计差的绝对值有

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| \tag{3.18}$$

取 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 $\{x\}$ 一致收敛，则有

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \{x\}) : \left(\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right) \wedge \left(\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right) \tag{3.19}$$

在有限数目加数的情况下，和的极限等于级数的极限和，则有

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \{x\}) : \left[0 < \rho(x,a) < \delta \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right] \tag{3.20}$$

由 (3.18)(3.19)(3.20) 得

$$(\forall \in \{x\}) : \left[0 < \rho(x,a) < \delta \Rightarrow \left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

则存在极限 $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$，则定理等式成立。

注 等式可以记为下列形式

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} S_n(x)\right),$$

其中 $\{S_n\}$ 为函数级数部分和序列

推论 3.3 (函数序列逐项极限)

若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $\{x\}$ 上一致收敛到极限函数 $f(x)$，且函数序列所有项在点 a 有极限，则极限函数 $f(x)$ 在点 a 有极限，且满足

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

♡

注 这表明记号 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 与 $\lim\limits_{x\to a}$ 可交换（或称 $\lim\limits_{x\to a}$ 可逐项极限 (к пределу можно переходить почленно)

推论 3.4 (和函数连续性充分条件)

设函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 $\{x\}$ 上一致收敛到和函数 $S(x)$ 且函数级数所有项在点 a 处连续，则和函数 $S(x)$ 在点 a 处连续

♡

证明 若有 $b_k = \lim\limits_{x\to a} u_k(x) = u_k(a)$，，则由函数级数逐项极限定理 (3.9) 有

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = S(a)$$

则 $S(x)$ 在 a 处连续

推论 3.5 (极限函数连续性充分条件)

若函数序列所有项在稠密集（плотное в себе множество）$\{x\}$ 上连续，且函数序列在稠密集 $\{x\}$ 上一致收敛，则函数序列极限函数在集 $\{x\}$ 上连续

♡

定理 3.10 (推广函数级数极限运算交换性)

设 $\{F_t, t\in T\}$ 为由依赖于参数 t 的函数 $F_t : X\to\mathbb{C}$ 构成的函数族，$\mathcal{B}_X$ 为 X 中的基，$\mathcal{B}_T$ 为 T 中的基。若该参变函数族在 X 和基 $\mathcal{B}_T$ 上一致收致到函数 $F : X\to\mathbb{C}$，而极限 $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} F_t(x) = A_t$ 对每一个 $t\in T$ 都存在，则 $\lim\limits_{\mathcal{B}_X}\left(\lim\limits_{\mathcal{B}_T} F_t(x)\right)$，$\lim\limits_{\mathcal{B}_T}\left(\lim_{\mathcal{B}_X} F_t(x)\right)$ 这两个累次极限都存在，且成立等式：

$$\lim_{\mathcal{B}_X}\left(\lim_{\mathcal{B}_T} F_t(x)\right) = \lim_{\mathcal{B}_T}\left(\lim_{\mathcal{B}_X} F_t(x)\right)$$

♡

证明 由在 X 和基 $\mathcal{B}_T$ 上 $F_t \rightrightarrows F$ 及函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) 成立：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B_T\in\mathcal{B}_T)(\forall t_1,t_2\in B_T)(\forall x\in X) : |F_{t_1}(x) - F_{t_2}(x)| < \varepsilon \tag{3.21}$$

在该不等式中取基 $\mathcal{B}_X$ 上的极限得关系式

$$(\forall t_1,t_2\in B_T) : |A_{t_1} - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon \tag{3.22}$$

有函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (3.2) 有函数 A_t 在基 $\mathcal{B}_T$ 上有某个极限 A，下验证 $A = \lim_{\mathcal{B}_X} F(x)$。固定 $t_2\in B_T$，则成立不等式：

$$(\exists B_T\in\mathcal{B}_T)(\forall x\in B_X) : |F_{t_2}(x) - A_{t_2}| < \varepsilon \tag{3.23}$$

让 t_2 保持不变并在 (3.21) 和 (3.22) 中关于参数 t_1 取基 $\mathcal{B}_T$ 上的极限，就得到

$$|F(x) - F_{t_2}(x)| \leqslant \varepsilon \tag{3.24}$$

$$|A - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon \tag{3.25}$$

且不等式 (3.24) 对任何 $x \in X$ 都成立。比较关系式 (3.23)(3.24)(3.25) 并利用三角不等式得 ($\forall x \in B_X$) : $|F(x)-A|<3\varepsilon$ ，则有 $A=\lim\limits_{\mathcal{B}_X} F(x)$

注 上述证明表明该定理对完备度量空间 Y 中取值的函数 $F_t: X \rightarrow Y$ 均成立

注 若在该定理条件中额外要求极限 $\lim\limits_{\mathcal{B}_T} A_t=A$ 存在，则从证明可见即使不假设函数 $F_t: X \rightarrow Y$ 的值所在空间 Y 为完备的，也可得到等式 $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} F(x)=A$

推论 3.6 (推广极限函数连续性充分条件)

设 $\{f_t, t \in T\}$ 是由依赖于参数 t 的函数 $f_t: X \rightarrow \mathbb{C}$ 构成的函数族, 而 $\mathcal{B}$ 是 T 中的基. 如果在 X 和基 $\mathcal{B}$ 上 $f_t \rightrightarrows f$, 并且函数 f_t 在点 $x_0 \in X$ 连续, 则函数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 也在这个点连续.

♡

注 没有给出集 X 具体性质，其可以为任何一个拓扑空间，只要在 X 中定义了基 $x \rightarrow x_0$ 即可。函数 f_t 可以在任何一个度量空间中取值，且该空间甚至不一定完备

3.3.2 函数序列逐项积分与函数级数逐项积分

定理 3.11 (函数序列逐项积分)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于极限函数 $f(x)$ 且每一个 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则极限函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且有等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d x=\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d x=\int_a^b f(x) d x$$

♡

证明 先证明极限函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积。注意到函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，因为每个 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。要求 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛，则需证 $\forall \varepsilon>0, \exists n: f_n(x)-\varepsilon<f(x)<f_n(x)+\varepsilon.$ 。

固定 $\forall \varepsilon>0$。需证极限函数 $f(x)$ 可以找到至少一个分划 $[a,b]$ ，它的上和 S 与下和 s 满足不等式 $S-s<\varepsilon$。需证被固定的 $\varepsilon>0$ 可以找到号码 n 使对于任何区间分划 $[a,b]$，$f(x)$ 的上和 S 与下和 s 以及 $f_n(x)$ 的上和 S_n 与下和 s_n 满足不等式

$$S-s \leqslant\left(S_n-s_n\right)+\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.26}$$

事实上，若对于任何区间分划，公式 (3.26) 对于某个号码 n 得证，则由函数序列 $\{fn(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积性，可以通过不等式 $S_n-s_n<\frac{\varepsilon}{2}$ 得 $S-s<\varepsilon$。这样函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积性得证。

取 $[a,b]$ 任意区间分划 $\{x_k\}(k=1,2,\ldots,m)$ 记 $f_n(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 振幅为 $\omega_k\left(f_n\right)$ ，记 $f(x)$ 在对应区间上振幅为 $\omega_k(f)$，不等式 (3.26) 需证充分大的 n 满足不等式

$$\omega_k(f) \leqslant \omega_k\left(f_n\right)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{3.27}$$

事实上，若在不等式 (3.27) 乘部分区间 $[x_{k-1},x_k]$ 长度 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ ，对 $k=1,2,\ldots,m$ 求和则有公式 (3.26)。现在对部分区间 $[x_{k-1},x_k]$ 对某个充分大的 n 证明公式 (3.27)。对于任意号码 n 以及任意 $x', x'' \in [x_{k-1},x_k]$ 满足恒等式 $f\left(x'\right)-f\left(x''\right)=\left(f\left(x'\right)-f_n\left(x'\right)\right)+\left(f_n\left(x'\right)-f_n\left(x''\right)\right)+\left(f_n\left(x''\right)-f\left(x''\right)\right)$, 即有不等式

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right| \leqslant\left|f\left(x'\right)-f_n\left(x'\right)\right|+\left|f_n\left(x'\right)-f_n\left(x''\right)\right|+\left|f_n\left(x''\right)-f\left(x''\right)\right| \tag{3.28}$$

由函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$ ，对于固定的 $\varepsilon>0$，有

$$\exists n, \forall x \in[a,b]:\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)} \tag{3.29}$$

在公式 (3.29) 利用公式 (3.28)，当 $x=x', x=x''$，则由公式 (3.28) 有

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right| \leqslant\left|f_n\left(x'\right)-f_n\left(x''\right)\right|+\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{3.30}$$

该不等式对充分大的 n 以及对任意 $x', x'' \in [x_{k-1},x_k]$ 成立，因为对任意 $x', x'' \in [x_{k-1},x_k]$ 有

$$\left|f_n\left(x'\right)-f_n\left(x''\right)\right| \leqslant \omega_k\left(f_n\right),$$

则由公式 (3.30) 有不等式

$$\left|f\left(x^{\prime}\right)-f\left(x^{\prime\prime}\right)\right|<\omega_k\left(f_n\right)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{3.31}$$

不等式 (3.31) 在 $x^{\prime}, x^{\prime\prime} \in\left[x_{k-1}, x_k\right]$ 成立

记 $f(x)$ 在部分区间 $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ 上确界和下确界分别为 M_k 和 m_k ，由确界定义则在区间上 $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ 能找到两个极限点 $\left\{x_p^{\prime}\right\}$ 和 $\left\{x_p^{\prime\prime}\right\} p \in \mathbb{N}$ 满足

$$\lim _{p \rightarrow \infty} f\left(x_p^{\prime}\right)=M_k, \lim _{p \rightarrow \infty} f\left(x_p^{\prime\prime}\right)=m_k .$$

由序列 (3.31)，则对任意 p 有

$$\left|f\left(x_p^{\prime}\right)-f\left(x_p^{\prime\prime}\right)\right|<\omega_k\left(f_n\right)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{3.32}$$

在不等式 (3.32) 中取极限过程 $p \rightarrow \infty$，(3.32) 的左部的极限等于 $M_k-m_k=\omega_k(f)$，则有公式 (3.27) 中极限。则极限函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积性得证。

下证定理后半部分：序列 $\left\{f_n(x)\right\}$ 在 $[a, b]$ 上积分可以逐项进行。需证

$$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n>N:\left|\int_a^b f_n(x) d x-\int_a^b f(x) d x\right|<\varepsilon$$

由此即得 $\left\{f_n(x)\right\}$ 在在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$ 时有

$$\exists N, \forall x \in[a, b], \forall n \geqslant N:\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{3.33}$$

另外，若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积，则有 $\left|\int_a^b f(x) d x\right| \leqslant \int_a^b|f(x)| d x$ ；若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处有 $f(x) \leqslant g(x)$，则有 $\int_a^b f(x) d x \leqslant \int_a^b g(x) d x$ 。使用这些估计与公式 (3.33) 则有

$$\left|\int_a^b f_n(x)-f(x) d x\right| \leqslant \int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right| d x<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b d x=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

注 注意若条件补上函数 $fn(x)$ 在 $[a, b]$ 上逐点连续性，则极限函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积性的证明是平凡的

推论 3.7 (函数级数逐项积分)

设函数级数在 $[a, b]$ 上一致收敛向 $S(x)$ 且该级数每一项 $u_k(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则和函数 $S(x)$ 在该区间上可积，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) d x$$

收敛向和 $\int_a^b S(x) d x$

♡

定理 3.12 (推广函数序列逐项积分)

设 $\left\{f_t, t \in T\right\}$ 是由定义于闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 且依赖于参数 $t \in T$ 的函数 $f_t:[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 构成的函数族，$\mathcal{B}$ 是 T 中的基。如果这些函数在 $[a, b]$ 上可积，在 $[a, b]$ 和基 $\mathcal{B}$ 上 $f_t \rightrightarrows f$，则极限函数 $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上也可积，并且

$$\int_a^b f(x) d x=\lim _{\mathcal{B}} \int_a^b f_t(x) d x$$

♡

证明 设 $p=(P, \xi)$ 是闭区间 $[a, b]$ 的标记线段，标记点为 $\xi=\left\{\xi_1, \cdots, \xi_n\right\}$。记 Riemann 和为 $F_t(p)=\sum_{i=1}^n f_t\left(\xi_i\right) \Delta x_i, t \in T$，以及 $F(p)=\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i\right) \Delta x_i$。下估计两者之差 $F(p)-F_t(p)$。由在 $[a, b]$ 和基 $\mathcal{B}$ 上 $f_t \rightrightarrows f$ 即有

$$\forall \varepsilon>0, \exists B \in \mathcal{B}, \forall t \in B, \forall x \in[a ; b]:\left|f(x)-f_t(x)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

因此，当 $t \in B$ 时有

$$|F(p)-F_t(p)|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\xi_i\right)-f_t\left(\xi_i\right)\right)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\xi_i\right)-f_t\left(\xi_i\right)\right|\Delta x_i<\varepsilon,$$

且该估计不仅对于每一个值 $t \in B$ 成立，而且对于闭区间 $[a,b]$ 的标记线段集 $\mathcal{P}=\{(P,\xi)\}$ 中的任何分割 p 也成立。因此，在 P 和基 $\mathcal{B}$ 上 $F_t \rightrightarrows F$。现在，在 P 中取基 $\lambda(P)\to 0$，其中 $\lambda(P)$ 为 P 的最大区间长，根据定理 (3.3.1) 可交换性及交换图 (3.1) 即证

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\Delta x_i =: F_t(p) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\lambda(P)\to 0"'] & F(p) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \arrow[d, "\exists\ \lambda(P)\to 0"] \\
\displaystyle\int_a^b f_t(x)dx =: A_t \arrow[r, "\mathcal{B}"'] \arrow[ur, dashed, no head] & A := \displaystyle\int_a^b f(x)dx
\end{tikzcd}$$

图 3.1: 逐项积分交换图

3.3.3 函数序列逐项微分与函数级数逐项微分

定理 3.13 (函数序列逐项微分)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 每个函数在 $[a,b]$ 上可导，并且导数的序列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，而 $\{f_n(x)\}$ 至少在某个点 $x_0 \in [a,b]$ 收敛。则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛向极限函数 $f(x)$，该极限函数在该区间上处处有导数 $f'(x)$，且有等式

$$f'(x)=\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \tag{3.34}$$

♡

证明 由 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛性与序列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛有

$$\begin{gathered}
\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]: \\
\left(\left|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(\left|f_{n+p}'(x)-f_n'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)
\end{gathered} \tag{3.35}$$

欲证 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。取 $\forall x \in [a,b], x \neq x_0$，因为函数 $f_{n+p}(t)-f_n(t)$ 对于任意固定的号码 n 和 p 在区间 $[x,x_0]$ （或 $[x_0,x]$ ）上满足 Lagrange 定理的条件，则

$$\exists \xi \in [x,x_0]: \left(f_{n+p}(x)-f_n(x)\right)-\left(f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right)=\left(f_{n+p}'(\xi)-f_n'(\xi)\right)(x-x_0)$$

利用该等式与公式 (3.35) 及 $x-x_0 \leqslant b-a$ 有估计

$$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]: \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$$

当 $x=x_0$ 时由公式 (3.35) 不等式成立，则进一步由 Cauchy 准则有函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛向某个极限函数 $f(x)$。下证该极限函数在任何固定点 $x \in [a,b]$ 有导数（边界点有单侧导数）且导数为函数序列 $\{f_n'(x)\}$ 的极限。

固定极限点 $x \in [a,b]$ 及 $\delta>0$ 使 x 的 δ 邻域完全被包含在 $[a,b]$ 中（边界点的情形只取区间内部的领域的半区间），记 $\{\Delta x\}$ 为满足条件：当 $a<x<b$ 时 $0<|\Delta x|<\delta$，当 $x=a$ 时 $0<\Delta x<\delta$，当 $x=b$ 时 $-\delta<\Delta x<0$，Δx 的所有 Δx 的集合，下证：

$$\varphi_n(\Delta x)=\frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x} \tag{3.36}$$

在 $\{\Delta x\}$ 上一致收敛。

由条件 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛及 Cauchy 准则有

$$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall x \in [a,b], \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}: \left|f_{n+p}'(x)-f_n'(x)\right|<\varepsilon \tag{3.37}$$

固定任意 Δx ，固定 n 和 p 对函数 $f_{n+p}(t)-f_n(t)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 上（或 $[x+\Delta x,x]$ 上）使用 Lagrange 定理，则有

$$\exists\theta\in(0,1):\frac{(f_{n+p}(x+\Delta x)-f_n(x+\Delta x))-(f_{n+p}(x)-f_n(x))}{\Delta x}=f'_{n+p}(x+\theta\Delta x)-f'_n(x+\theta\Delta x)$$

利用公式 (3.36)，该等式可以重写为 $\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)=f'_{n+p}(x+\theta\Delta x)-f'_n(x+\theta\Delta x)$ ，又由公式 (3.37) 有 $\forall\Delta x,\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}:|\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)|<\varepsilon$ ，由 Cauchy 准则即有 $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ c 在 Δx 上一致收敛。但这时可以对该函数序列在 $\Delta x=0$ 极限过程中逐项极限。则序列 $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ 的极限函数

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

在 $\Delta x=0$ 有极限，并且满足等式

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\Delta x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\varphi_n(\Delta x)\right)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$$

则极限函数 $f(x)$ 在点 x 的导数存在且等于 (3.34)

注 若另外假设序列每项在 $[a,b]$ 上导数的连续性，则也会有极限函数连续可导的结论

推论 3.8 (函数级数逐项微分)

设函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 每个项在 $[a,b]$ 上可导，并且导数的级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u'_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，而 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 至少在某个点 $x_0\in[a,b]$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛向和函数 $S(x)$ ，该和函数在该区间上处处有导数 $S'(x)$ ，且有等式

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u'_k(x)$$

♡

推论 3.9 (函数序列逐项偏微分)

设 $\{f_n(x)\}$ 每个函数 $f_n(x)=f_n(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ 在有界闭集 $G\subseteq E^m$ 上对 x_k 有偏导数 $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$，并且导数的序列 $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ 在 G 上一致收敛，而 $\{f_n(x)\}$ 在 G 上每个点收敛。这时 $\{f_n(x)\}$ 可以在 G 上对 x_k 逐项微分。

♡

定理 3.14 (函数序列极限函数原函数存在充分条件)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 每一个函数 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数，并且原序列在该区间上一致收敛向极限函数 $f(x)$，则极限函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数

♡

证明 记 $\psi_n(x)$ 为函数 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上原函数。固定任意 $x_0\in[a,b]$ 观察 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上原函数 $\varphi_n(x)=\psi_n(x)-\psi_n(x_0)$ ，函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 满足逐项微分定理所有条件。

由 $\forall n\in\mathbb{N}:\varphi_n(x_0)=0$，则序列在 $x_0\in[a,b]$ 收敛，导数 $\varphi'_n(x)=f_n(x)$，又由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则有序列 $\{\varphi'_n(x)\}$ 在该区间上一致收敛向 $f(x)$。

由逐项微分定理，序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛向某个极限函数 $\varphi(x)$，该函数在 $[a,b]$ 可微且满足 $\forall x\in[a,b]:\varphi'(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi'_n(x)=f(x)$

推论 3.10 (函数级数和函数原函数存在充分条件)

函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到和函数 $S(x)$ 且每一项 $u_k(x)$ 在该区间上有原函数，则函数级数和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数

♡

定理 3.15

设 $\{f_t,t\in T\}$ 是由定义于有界凸集 X (它包含于 $\mathbb{R},\mathbb{C}$ 或其他线性赋范空间) 并且依赖于参数 $t\in T$ 的函数 $f_t:X\to\mathbb{C}$ 构成的函数族，$\mathcal{B}$ 是 T 中的基。若这些函数在 X 上可微，由导数构成的函数族 $\{f'_t,t\in T\}$ 在 X 上一致收敛到某函数 $\varphi:X\to\mathbb{C}$，而原来的函数族 $\{f_t,t\in T\}$ 至少在一个点 $x_0\in X$ 收敛，则它在

整个集合 X 上一致收敛到可微函数 $f: X \to \mathbb{C}$，并且 $f' = \varphi$。♡

推论 3.11 (推广函数序列逐项微分)

设 $f_n: X \to \mathbb{C}$ 是有界凸集 X（它包含于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 或任何一个线性赋范空间）上的可微函数，由这些函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 至少在一个点 $x_0 \in X$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 X 上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 也在 X 上一致收敛，它的和在 X 上可微，并且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

♡

3.4 *Zorich 书上的累次极限交换论

3.4.1 两个极限运算可交换的条件

注 级数无限求和运算、Riemann 积分运算、微分运算都是极限运算的特殊情况

证明：在依次完成的两个极限运算中至少有一个是一致的，就可以交换这两个极限运算的顺序

定理 3.16 (累次极限交换的充分条件)

设 $\{F_t, t \in T\}$ 是由依赖于参数 t 的函数 $F_t: X \to \mathbb{C}$ 构成的函数族，$\mathcal{B}_X$ 是 X 中的基，$\mathcal{B}_T$ 是 T 中的基。如果该函数族在 X 和基 $\mathcal{B}_T$ 上一致收敛到函数 $F: X \to \mathbb{C}$，而极限 $\lim_{\mathcal{B}_X} F_t(x) = A_t$ 对于每一个 $t \in T$ 都存在，则 $\lim_{\mathcal{B}_X}(\lim_{\mathcal{B}_T} F_t(x)), \lim_{\mathcal{B}_T}(\lim_{\mathcal{B}_X} F_t(x))$ 这两个累次极限都存在，并且以下等式成立：

$$\lim_{\mathcal{B}_X}\left(\lim_{\mathcal{B}_T} F_t(x)\right) = \lim_{\mathcal{B}_T}\left(\lim_{\mathcal{B}_X} F_t(x)\right) \tag{3.38}$$

♡

注 用以下交换图的形式写出这个定理非常方便：图中在对角线上方指出了定理的条件，在对角线下方指出了其

$$\begin{tikzcd}
F_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "\mathcal{B}_T"'] \arrow[d, "\mathcal{B}_X"'] & F(x) \arrow[d, "\exists"', "\mathcal{B}_X"] \\
A_t \arrow[r, "\exists", "\mathcal{B}_T"'] \arrow[ur, dashed, dash] & A
\end{tikzcd}$$

结论。等式 (3.38) 表明，这个图确实是可交换的，即无论是按照图中先上后右的顺序完成运算，还是按照先左后下的顺序完成运算，最终结果 A 都不受影响

证明 因为在 X 和基 $\mathcal{B}_T$ 上 $F_t \rightrightarrows F$，所以根据 Cauchy 准则，对于任何 $\varepsilon > 0$，可以找到基 $\mathcal{B}_T$ 的元素 B_T，使以下不等式对于任何 $t_1, t_2 \in B_T$ 和任何 $x \in X$ 都成立：

$$|F_{t_1}(x) - F_{t_2}(x)| < \varepsilon \tag{3.39}$$

在这个不等式中取基 $\mathcal{B}_X$ 上的极限，得到对于任何 $t_1, t_2 \in B_T$ 都成立的关系式

$$|A_{t_1} - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon \tag{3.40}$$

根据函数极限存在的 Cauchy 准则，由此可知，函数 A_t 在基 $\mathcal{B}_T$ 上有某个极限 A。现在验证 $A = \lim_{\mathcal{B}_X} F(x)$。

固定 $t_2 \in B_T$，可以找到基 $\mathcal{B}_T$ 的元素 B_T，使以下不等式对于任何 $x \in B_X$ 都成立：

$$|F_{t_2}(x) - A_{t_2}| < \varepsilon \tag{3.41}$$

让 t_2 保持不变并在 (3.39) 和 (3.40) 中关于参数 t_1 取基 $\mathcal{B}_T$ 上的极限，就得到

$$|F(x) - F_{t_2}(x)| \leqslant \varepsilon \tag{3.42}$$

$$|A - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon \tag{3.43}$$

并且不等式 (3.42) 对于任何 $x \in X$ 都成立。比较关系式 (3.41)-(3.43) 并利用三角形不等式，将得到

$$|F(x) - A| < 3\varepsilon$$

对于任何 $x \in B_X$ 都成立。这就证明了 $A = \lim_{\mathcal{B}_X} F(x)$

注 上述定理对于在任何完备度量空间 Y 中取值的函数 $F_t : X \to Y$ 仍然成立

3.4.2 连续性与极限运算

证明：如果在一个集合的某一个点连续的一族函数在这个集合上一致收敛，则极限函数也在这个点连续

定理 3.17 (连续性与极限运算交换的充分条件)

设 $\{f_t, t \in T\}$ 是由依赖于参数 t 的函数 $f_t : X \to \mathbb{C}$ 构成的函数族，而 $\mathcal{B}$ 是 T 中的基。如果在 X 和基 $\mathcal{B}$ 上 $f_t \rightrightarrows f$，并且函数 f_t 在点 $x_0 \in X$ 连续，则函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 也在这个点连续

注 根据连续性的等价定义可知，连续性与极限运算的交换是累次极限交换的特殊情况

证明 在上述情况下，交换图具有以下具体形式：这里，除了右边竖直线所表示的极限运算，其他的所有极限运

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "x \to x_0"'] & f(x) \arrow[d, "x \to x_0"] \arrow[dl, dashed, no head] \\
f_t(x_0) \arrow[r, "\mathcal{B}"'] & f(x_0)
\end{tikzcd}$$

算都由定理 (3.17) 的条件本身给出。定理 (3.16) 的所需非平凡推论恰好是 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

推论 3.12

如果一个集合上的连续函数序列在该集合上一致收敛，则极限函数也在这个集合上连续

推论 3.13 (级数和的连续性)

如果由某一个集合上的连续函数组成的级数在该集合上一致收敛，则级数的和也在这个集合上连续

定理 3.18 (Dini 定理)

如果一个紧集上的连续函数序列在该紧集上单调收敛到连续函数，则该序列一致收敛

证明 为明确起见，设 f_n 单调不减地收敛到 f。任意取固定的 $\varepsilon > 0$，对于紧集 K 的任何一个点 x，可以找到序号 n_x，使 $0 \leqslant f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon$。因为函数 f 和 f_{n_x} 在 K 上连续，所以不等式 $0 \leqslant f(\xi) - f_{n_x}(\xi) < \varepsilon$ 在点 $x \in K$ 的某个邻域 $U(x)$ 内仍然成立。用这样的邻域覆盖紧集 K，由此可以选出有限覆盖 $U(x_1), \cdots, U(x_k)$，然后取固定的序号 $n(\varepsilon) = \max\{n_{x_1}, \cdots, n_{x_k}\}$。于是，对于任何 $n > n(\varepsilon)$，因为 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是不减序列，所以在任何点 $\xi \in K$ 有 $0 \leqslant f(\xi) - f_n(\xi) < \varepsilon$

推论 3.14

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的项是紧集 K 上的非负连续函数 $a_n : K \to \mathbb{R}$，该级数在 K 上收敛到连续函数，则它在 K 上一致收敛

3.4.3 积分运算与极限运算

证明：如果闭区间上的可积函数族在该区间上一致收敛，则极限函数在该区间上也可积，相应积分等于原始函数的积分的极限

定理 3.19 (积分运算与极限运算交换的充分条件)

设 $\{f_t, t \in T\}$ 是由定义于闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 且依赖于参数 $t \in T$ 的函数 $f_t : [a,b] \to \mathbb{C}$ 构成的函数族，$\mathcal{B}$ 是 T 中的基。如果这些函数在 $[a,b]$ 上可积，在 $[a,b]$ 和基 $\mathcal{B}$ 上 $f_t \rightrightarrows f$，则极限函数 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上也可积，并且

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathcal{B}} \int_a^b f_t(x)dx$$

证明 设 $p = (P, \xi)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的标记分割，标记点为 $\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$。考虑积分和 $F_t(p) = \sum_{i=1}^n f_t(\xi_i)\Delta x_i, t \in T$，以及 $F(p) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$。接下来估计两者之差 $F(p) - F_t(p)$。因为在 $[a,b]$ 和基 $\mathcal{B}$ 上 $f_t \rightrightarrows f$，所以对于任何 $\varepsilon > 0$，可以找到基 $\mathcal{B}$ 的元素 B，使不等式 $|f(x) - f_t(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ 对于任何 $t \in B$ 和任何点 $x \in [a,b]$ 都成立。因此，当 $t \in B$ 时：

$$|F(p) - F_t(p)| = \left|\sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f_t(\xi_i))\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f_t(\xi_i)|\Delta x_i < \varepsilon,$$

并且这个估计式不仅对于每一个值 $t \in B$ 成立，而且对于闭区间 $[a,b]$ 的标记分割集 $\mathcal{P} = \{(P,\xi)\}$ 中的任何分割 p 也成立。因此，在 $\mathcal{P}$ 和基 $\mathcal{B}$ 上 $F_t \rightrightarrows F$。现在，在 $\mathcal{P}$ 中取传统的基 $\lambda(P) \to 0$，根据定理 (3.16) 得到，下图是可交换的：这就证明了上述定理

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{i=1}^n f_t(\xi_i)\Delta x_i =: F_t(p) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\lambda(P)\to 0"'] & F(p) := \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \arrow[d, "\exists \,|\, \lambda(P)\to 0"'] \\
\int_a^b f_t(x)dx =: A_t \arrow[r, "\mathcal{B}"'] \arrow[ur, dashed, no head] & A := \int_a^b f(x)dx
\end{tikzcd}$$

推论 3.15 (级数和的可积性)

如果由闭区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的可积函数组成的级数 $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ 在这个区间上一致收敛，则它的和在闭区间 $[a,b]$ 上也可积，并且

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n(x)dx$$

3.4.4 微分运算与极限运算

定理 3.20 (微分运算与极限运算交换的充分条件)

设 $\{f_t, t \in T\}$ 是由定义于有界凸集 X （它包含于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 或其他线性拭范空间）并且依赖于参数 $t \in T$ 的函数 $f_t : X \to \mathbb{C}$ 构成的函数族，$\mathcal{B}$ 是 T 中的基。如果这些函数在 X 上可微，由导数构成的函数族 $\{f_t', t \in T\}$ 在 X 上一致收敛到某函数 $\varphi : X \to \mathbb{C}$，而原来的函数族 $\{f_t, t \in T\}$ 至少在一个点 $x_0 \in X$ 收敛，则它在整个集合 X 上一致收敛到可微函数 $f : X \to \mathbb{C}$ ，并且 $f' = \varphi$

证明 首先证明，函数族 $\{f_t, t \in T\}$ 在集合 X 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛。在以下估计式中应用有限增量定理 (Lagrange

中值定理):

$$
\begin{aligned}
|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)| &\leqslant |(f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x))-(f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0))|+|f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0)| \\
&\leqslant \sup_{\xi\in[x_0,x]}\left|f'_{t_1}(\xi)-f'_{t_2}(\xi)\right||x-x_0|+|f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0)|=\Delta(x,t_1,t_2).
\end{aligned}
$$

根据条件，函数族 $\{f'_t, t\in T\}$ 在 X 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛，量 $f_t(x_0)$ 作为 t 的函数在同一个基 $\mathcal{B}$ 上有极限，而 $|x-x_0|$ 当 $x\in X$ 时是有界的量。根据函数族 f'_t 一致收玫性的柯西准则的条件的必要性和函数 $f_t(x_0)$ 的极限的存在性，对于任何 $\varepsilon>0$，可以找到基 $\mathcal{B}$ 的元素 B，使 $\Delta(x,t_1,t_2)<\varepsilon$ 对于任何 $t_1,t_2\in B$ 和任何 $x\in X$ 都成立。而根据上述估计式，这表明函数族 $\{f_t, t\in T\}$ 也满足柯西准则的条件，因而在 X 和基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛到某函数 $f: X\to\mathbb{C}$

再次利用有限增量定理，现在得到以下估计式：

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(f_{t_1}(x+h)-f_{t_1}(x)-f'_{t_1}(x)h\right)-\left(f_{t_2}(x+h)-f_{t_2}(x)-f'_{t_2}(x)h\right)\right| \\
&=\left|(f_{t_1}-f_{t_2})(x+h)-(f_{t_1}-f_{t_2})(x)-(f_{t_1}-f_{t_2})'(x)h\right| \\
&\leqslant \sup_{0<\theta<1}\left|(f_{t_1}-f_{t_2})'(x+\theta h)\right||h|+\left|(f_{t_1}-f_{t_2})'(x)\right||h| \\
&=\left(\sup_{0<\theta<1}\left|f'_{t_1}(x+\theta h)-f'_{t_2}(x+\theta h)\right|+\left|f'_{t_1}(x)-f'_{t_2}(x)\right|\right)|h|
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

这些估计式在 $x, x+h\in X$ 时成立。根据函数族 $\{f'_t, t\in T\}$ 在 X 上的一致收敛性，这些估计式表明，如果取固定值 $x\in X$ 并考虑由函数

$$F_t(h)=\frac{f_t(x+h)-f_t(x)-f'_t(x)h}{|h|}$$

构成的函数族 $\{F_t, t\in T\}$，则对于所有满足 $x+h\in X$ 的值 $h\neq 0$，该函数族在基 $\mathcal{B}$ 上一致收敛。可以看出，因为函数 f_t 在点 $x\in X$ 可微，所以当 $h\to 0$ 时 $F_t(h)\to 0$，而因为在基 $\mathcal{B}$ 上 $f_t\to f, f'_t\to\varphi$，所以在基 $\mathcal{B}$ 上

$$F_t(h)\to F(h)=\frac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{|h|}$$

利用定理 (3.16)，现在可以写出交换图，当 $h\to 0$ 时，右边的极限运算表明，函数 f 在点 $x\in X$ 可微，并且有

$$
\begin{tikzcd}
\dfrac{f_t(x+h)-f_t(x)-f'_t(x)h}{|h|} =: F_t(h) \arrow[r, Rightarrow, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "h\to 0"'] & F(h) := \dfrac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{|h|} \arrow[d, "h\to 0"] \arrow[dl, dashed, no head] \\
0 \arrow[r, "\mathcal{B}"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

结论 $f'(x)=\varphi(x)$

推论 3.16 (级数和的可微性)

设 $f_n: X\to\mathbb{C}$ 是有界凸集 X (它包含于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 或任何一个线性拭范空间) 上的可微函数，由这些函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 至少在一个点 $x_0\in X$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ 在 X 上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 也在 X 上一致收敛，它的和在 X 上可微，并且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

♡

3.5 函数级数一般理论

3.5.1 函数级数平均收敛

定义 3.23 (函数序列平均收敛)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 每一个函数 $f_n(x)$ 和函数 $f(x)$ 在 $[a;b]$ 上可积，若

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx = 0 \tag{3.45}$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上平均收敛（сходится в среднем）向 $f(x)$

定义 3.24

(函数级数平均收敛) 设函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$。若该级数部分和序列在 $[a;b]$ 上平均收敛向极限函数 $S(x)$，则称函数级数在 $[a;b]$ 上平均收敛向和函数 $S(x)$

注 若函数序列（函数级数）在 $[a,b]$ 平均收敛向 $f(x)$ ，则函数序列（函数级数）在任意 $[c;d]\subseteq[a;b]$ 上平均收敛向 $f(x)$

命题 3.5 (函数序列平均收敛充分不必要条件)

若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a;b]$ 上一致收敛到 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a;b]$ 上平均收敛到 $f(x)$。逆命题不成立。

证明 固定任意 $\varepsilon>0$，在 $[a;b]$ 上函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛向 $f(x)$，对于正数 $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}}$

$$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N)(\forall x\in[a;b]):|f_n(x)-f(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$$

则有估计

$$(\forall n\geqslant N):\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

则函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a;b]$ 上平均收敛到 $f(x)$ 得证

下证逆命题不成立，观察

$$f_n(x)=\begin{cases}\sin\pi nx, & x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right)\\[2ex] 0, & x\in\left[\dfrac{1}{n},1\right]\end{cases}$$

则给定函数序列在 $[0;1]$ 上非一致收敛到 $f(x)\equiv 0$，但在 $[0;1]$ 上平均收敛到 $f(x)$

$$\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2\,dx=\int_0^{1/n}\sin^2\pi nx dx\leqslant\int_0^{1/n}dx=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

则命题充分必要性得证

命题 3.6

函数序列在某个闭区间上平均收敛性不能推出给定区间点上的收敛性

证明 观察位于 $[0;1]$ 的闭区间的序列 $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$:

$$I_1 = [0,1],$$
$$I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$
$$I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right],$$
$$\ldots$$
$$I_{2^n} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right], I_{2^n+1} = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right], \ldots, I_{2^{n+1}-1} = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right],$$
$$\ldots$$

定义序列 $\{f_n(x)\}$ 的项 $f_n(x)$ 为

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, x \in I_n \\ 0, x \notin I_n \end{cases}$$

欲检验在 $[0;1]$ 上平均收敛向 $f(x) \equiv 0$，观察

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = \int_{I_n} dx = I_n\text{长度}$$

则极限 (3.45) 存在并等于零。

检验在闭区间 $[0;1]$ 没有点收敛。对于 $\forall x_0 \in [0;1]$ 可以找到足够大的 n，满足 $I_n \ni x_0$（对于这些号码 $f_n(x_0) = 1$），也可以找到足够大的号码 n，对于 $I_n \not\ni x_0$ （对于这些号码 $f_n(x_0) = 0$）。这意味着 $\{f_n(x_0)\}$ 无穷多项等于 1，无穷多项等于 0 ，则该序列发散

命题 3.7

函数序列在某个闭区间上收敛性不能推出给定区间上平均收敛性

证明 观察序列 $\{f_n(x)\}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0;1]$ 上收敛到极限函数 $f(x) \equiv 0$。但由

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = n^2 \int_0^1 e^{-2nx} dx = \frac{n}{2}\left(1 - e^{-2n}\right) \to +\infty.$$

知极限 (3.45) 不存在即 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0;1]$ 上非平均收敛

引理 3.3 (Hölder 不等式)

对任意在 $[a;b]$ 可积的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \tag{3.46}$$

证明 设 $\int_a^b g^2(x)dx \neq 0$，观察关于 λ 的函数:

$$\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx \geqslant 0$$

函数非负则无不同实根，则判别式非正，则有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leqslant 0$$

不等式 (3.46) 得证

设 $\int_a^b g^2(x)dx = 0$，且 $\int_a^b f^2(x)dx \neq 0$，观察关于 λ 的函数

$$\int_a^b [\lambda f(x) - g(x)]^2 dx \geqslant 0$$

然后进行类似的推理并证明 (3.46) 成立。

设 $\int_a^b g^2(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx = 0$，这时满足

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx = 2\int_a^b f(x)g(x)dx \geqslant 0$$
$$\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx = -2\int_a^b f(x)g(x)dx \geqslant 0,$$

由此即得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$，则 (3.46) 成立

定理 3.21 (函数序列平均收敛逐项积分性)

若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a;b]$ 上平均收敛到 $f(x)$ ，则该函数序列可以在 $[a;b]$ 上逐项积分，则存在

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

♡

证明 利用 Hölder 不等式 (3.46)，这时

$$g(x) \equiv \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = |\int_a^b f_n(x) - f(x)dx| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2\, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b dx} = \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2\, dx} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

定理即证

推论 3.17

若函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ 在 $[a;b]$ 上平均收敛到和函数 $S(x)$，则级数可逐项积分，即有

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)dx$$

♡

注 根据 Riemann 积分的定义，平均收敛的函数序列可以不唯一，一组零测度的被积函数的变化并不会改变积分的值

命题 3.8

函数序列在某个闭区间上可逐项积分不能推出该函数序列在该闭区间上一致收敛性

♠

证明 某个函数序列在某个闭区间上非一致收敛，则由命题 (3.5) 可以有在该闭区间上平均收敛，但这时由定理 (3.21) 在该区间上逐项可积

命题 3.9

函数序列在某个闭区间上可逐项积分不能推出序列在该闭区间上点上收敛性

♠

证明 取命题 (3.6) 中函数序列，在 $[0;1]$ 上无点收敛，但序列在该区间上平均收敛，则在该区间上可逐项积分

命题 3.10

函数序列在某个闭区间上可逐项积分不能推出序列在该闭区间上平均收敛性

♠

证明 取函数序列 $\{f_n(x)\}$:

$$f_n(x)=\begin{cases}n^{3/4}e^{-nx}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

该函数序列在 $[0;1]$ 任意点上趋近于零，则有极限函数 $f(x)\equiv 0$，但其在 $[0;1]$ 上不平均收敛，因为

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx=n^{6/4}\int_0^1 e^{-2nx}dx=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1-e^{-2n}\right)\to+\infty,n\to\infty$$

但该函数序列在 $[0;1]$ 上可逐项积分，因为 $\int_0^1 f(x)dx=0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^{3/4}e^{-nx}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-n}}{\sqrt[4]{n}}=0$$

命题 3.11

函数序列在某闭区间上逐点收敛不能推出序列在该闭区间上可逐项积分

证明 利用命题 (3.7) 中函数序列即证

命题 3.12 (函数序列平均收敛必要条件)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a;b]$ 平均收敛于某个 $f(x)$，则数值序列 $\left\{\int_a^b f_n^2(x)dx\right\}$ 有界

证明 利用不等式 $(a+b)^2\leqslant 2\left(a^2+b^2\right)$ 则有

$$\int_a^b f_n^2(x)dx=\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)+f(x)\right)^2dx\leqslant 2\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)^2dx+2\int_a^b f^2(x)dx$$

右部第一个积分当 $n\to\infty$ 时趋近于零，而第二个积分为常数

3.5.2 函数族等度连续性

定义 3.25 (函数序列等度连续)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 每个函数在空间 E^m 上稠密集 $\{x\}$ 上定义，若

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall n\in\mathbb{N},,\forall x',x''\in\{x\}:[\rho\left(x',x''\right)<\delta\Rightarrow\left|f_n\left(x'\right)-f_n\left(x''\right)\right|<\varepsilon]$$

则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $\{x\}$ 上等度连续

注 若函数族的每一个函数都一致连续，则该函数族等度连续

注 （函数序列等度连续）由此易得，若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $\{x\}$ 上等度连续，则函数序列任意任意子序列也在 $\{x\}$ 上等度连续。若 x 为单变量，定义条件退化为

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\forall n\geqslant\mathbb{N},\forall x',x''\in[a,b]:[\left|x'-x''\right|<\delta\Rightarrow\left|f_n\left(x'\right)-f_n\left(x''\right)\right|<\varepsilon]$$

定理 3.22 (Arzelà 定理)

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 每个函数 $f_n(x)$ 在空间 E^m 某个稠密集 $\{x\}$ 上定义，若函数序列在 $[a,b]$ 上等度连续且一致有界，则该序列可以找到在区间 $[a,b]$ 上一致收敛的子序列

证明 （利用 Bolzano-Weierstrass 定理）在 $[a,b]$ 上构造下列点列 $\{x_n\}$：取点 x_1 把 $[a,b]$ 分为两个部分，取点 x_2 ,x_3 跟 x_1 一起把 $[a,b]$ 分为四个部分，取点 x_4,x_5,x_6 ,x_7 跟 x_1,x_2，x_3 一起把 $[a,b]$ 分为八个部分，以此类推。

构造的序列有下面的性质：$\forall\delta>0,\exists n_0$ 使得在长为 δ 的被包含于 $[a,b]$ 任意闭区间内至少有 $x_1,x_2,\ldots,x_{n_0}$ 中一点（在 $[a,b]$ 上处处稠密）

从 $\{f_n(x)\}$ 中选取一个在 $[a,b]$ 上一致收敛的子序列。在点 x_1 观察 $\{f_n(x)\}$ 得数列 $\{f_n(x_1)\}$ 有界，则由 Bolzano-Weierstrass 定理可选出子序列 $f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \dots, f_{1n}(x_1), \dots$，然后在 x_2 观察序列 $f_{11}(x), f_{12}(x), \dots, f_{1n}(x), \dots$ 有界，由 Bolzano-Weierstrass 定理可选出子序列 $f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \dots, f_{2n}(x_2), \dots$，则有在 x_1 与 x_2 处收敛序列 $f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, f_{2n}(x), \dots$，再在 x_3 观察序列 $f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, f_{2n}(x), \dots$ 选出子序列 $f_{31}(x_3), f_{32}(x_3), \dots, f_{3n}(x_3), \dots$，以此类推，得到一个第 n 行的子序列在 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 收敛的无穷子序列集

$$
\begin{gathered}
f_{11}(x), f_{12}(x), \dots, f_{1n}(x), \dots \\
f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, f_{2n}(x), \dots \\
f_{31}(x), f_{32}(x), \dots, f_{3n}(x), \dots \\
\dots \\
f_{n1}(x), f_{n2}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots \\
\dots
\end{gathered}
$$

现在观察函数序列的对角线 $f_{11}(x), f_{22}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots$，欲证该子序列在 $[a,b]$ 上一致收敛。为简单起见下记为 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$

固定 $\forall \varepsilon > 0$，因为函数序列在 $[a,b]$ 上收敛，则对于固定的 $\varepsilon > 0$ 有

$$(\exists \delta > 0)(\forall x, x_m \in [a,b])(|x - x_m| < \delta)(\forall n) : |f_n(x) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.47}$$

将闭区间 $[a,b]$ 分为有限数量的长度小于 δ 的闭区间，从 x_n 子序列选择有限数目前 n_0 项 $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$，使得每个所提到的闭区间中至少包含点 $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ 中的一个。显然子序列的对角线在上述每一个 $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ 上收敛。所以对于固定的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\exists N, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall m \in \overline{1; n_0} : |f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.48}$$

设 x 为 $[a,b]$ 上任意点，该点必位于上述长度小于 δ 的闭区间段之一中。因此对于点 $x, \exists m \in \overline{1; n_0}$: $|x - x_m| < \delta$。估计差的绝对值：

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_m)| + |f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f_n(x)| \tag{3.49}$$

公式 (3.49) 右部的第二个加数利用公式 (3.48) 估计，而对于第一个和第三个加数利用 $|x - x_m| < \delta$ 与不等式 (3.47) 估计，则有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a;b] : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

则对角线一致收敛性得证，则函数序列一致收敛子序列构造成立

定理 3.23 (Arzelà–Ascoli 定理)

设 $f : K \to Y$ 是定义在度量紧空间 K 中并且在完备度量空间 Y 中取值的函数，$\mathcal{F}$ 是由这样的函数构成的函数族。任何序列 $\{f_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}$ 都包含一致收敛子序列的充要条件是函数族 $\mathcal{F}$ 完全有界且等度连续。 ♡

注 （学科交叉）Arzelà–Ascoli 定理用于证明 Picard 一阶常微分方程 Cauchy 问题阶的存在唯一性定理

命题 3.13 (等度连续的充分判据)

若函数项序列 $\{f_n(x)\}$ 由闭区间 $[a,b]$ 上可微函数构成，若导函数序列 $\{f_n'(x)\}$ 在该区间上一致有界，则函数项序列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上等度连续 ♠

证明 根据 Lagrange 中值定理完成证明

3.6 陶哲轩实分析选

3.6.1 函数的极限值

定义 3.26 (函数的极限值)

设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 都是度量空间，设 E 是 X 的子集合，并设 $f: X \to Y$ 是函数。设 $x_0 \in X$ 是 E 的附着点而 $L \in Y$。如果对于每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$，使得对于一切满足 $d_X(x_0, x) < \delta$ 的 $x \in E$ 成立 $d_Y(f(x), L) < \varepsilon$，就说当 $\boldsymbol{x}$ 沿着 $\boldsymbol{E}$ 收敛到 $\boldsymbol{x_0}$ 时 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{Y}$ 中收敛到 $\boldsymbol{L}$，记作 $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$ ♣

注 有时把 $x = x_0$ 的情形从上面的定义中排除出去，那就要求 $0 < d_X(x, x_0) < \delta$。依当前的记号，这对应于把 x_0 从 E 中移除，于是就得代替 $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$ 而考虑 $\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} f(x)$

f 在 x_0 处连续的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0; x \in X} f(x) = f(x_0)$$

于是，f 在 X。上连续等价于对于一切 $x_0 \in X, \lim_{x \to x_0; x \in X} f(x) = f(x_0)$

命题 3.14

设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间，E 是 X 的子集合，并设 $f: X \to Y$ 是函数。设 $x_0 \in X$ 是 E 的附着点且 $L \in Y$。那么下述四命题逻辑上等价

(a) $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$

(b) 对于 E 中的每个依度量 d_X 收敛到 x_0 的序列 $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$，序列 $\left(f\left(x^{(n)}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ 都依度量 d_Y 收敛到 L

(c) 对于含有 L 的每个开集 $V \subseteq Y$，都存在含有 x_0 的开集 $U \subseteq X$，使得 $f(U \cap E) \subseteq V$

(d) 如果定义函数 $g: E \bigcup \{x_0\} \to Y$，使 $g(x_0) := L$，且对于 $x \in E \setminus \{x_0\}$，$g(x) := f(x)$，那么 g 在 x_0 处连续 ♠

注 函数 $f(x)$ 当 x 收敛到 x_0 时最多只能收玫到一个极限 L。换言之，如果极限

$$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$$

存在，那么它只能取一个值

注 x_0 是 E 的附着点的要求是必要的，当 x_0 不是 E 的附着点时，极限概念就没用了，那时 x_0 在 E 的外部，当 x 沿着 E 收敛到 x_0 时 $f(x)$ 收敛到 L 的概念是空的（对于足够小的 $\delta > 0$，没有点 $x \in E$ 使 $d(x, x_0) < \delta$ ）

注 严格说来，应该写

$$d_Y-\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) \text{而取代} \lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$$

因为收敛依赖于度量 d_Y。但在实践中，度量 d_Y 是明确的，所以从记号中略去前缀 d_Y

3.6.2 逐点收敛与一致收敛

定义 3.27 (逐点收敛)

设 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 是从一个度量空间 (X, d_X) 到另一个度量空间 (Y, d_Y) 的函数的序列，并设 $f: X \to Y$ 是函数。如果对于一切 $x \in X$ 有

$$\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = f(x)$$

即

$$\lim_{n \to \infty} d_Y\left(f^{(n)}(x), f(x)\right) = 0$$

那么就说 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 在 $\boldsymbol{X}$ 上逐点收敛到 $\boldsymbol{f}$，称 f 为 $f^{(n)}$ 的逐点极限。这种收敛也可以描述为，对于每个 x 和每个 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得对于每个 $n>N$，$d_Y\left(f^{(n)}(x),f(x)\right)<\varepsilon$ ♣

注 注意，$f^{(n)}(x)$ 和 $f(x)$ 是 Y 中的点，而不是函数，所以是用先前已有的关于度量空间中点列的收敛的概念来确定函数序列的收敛。还要注意，此时并未真正使用 (X,d_X) 是度量空间这一事实（即，我们不曾使用度量 d_X），对于这个定义来说，X 只是一个纯粹的集合就够了，不需要任何度量结构。但是，后面我们要把注意力限制于从 X 到 Y 的连续函数，从而需要 X 上（及 Y 上）的度量，或者至少需要 X 上（和 Y 上）的一个拓扑结构。还有，当引入一致收敛的概念时，我们肯定需要 X 上及 Y 上的度量结构；对于拓扑空间不存在相应的概念

注 一个从度量空间 (X,d_X) 到 (Y,d_Y) 的函数序列 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 最多只能有一个逐点极限 f；逐点极限有很多缺点：不保持连续性，不保持导数运算，不保持极限运算，不保持积分运算

若 $f^{(n)}$ 收敛到 f 关于 x 不是一致的——要使 $f^{(n)}(x)$ 与 $f(x)$ 接近到 ε 之内的 $N(n\geqslant N)$，既依赖于 ε，也依赖于 x。这启示了更强的收敛概念

定义 3.28 (一致收敛与一致极限)

设 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是从一个度量空间 (X,d_X) 到另一个度量空间 (Y,d_Y) 的函数序列，并设 $f:X\to Y$ 是函数。如果对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $N>0$，使得对于每个 $n>N$ 及 $x\in X$ 都成立 $d_Y\left(f^{(n)}(x),f(x)\right)<\varepsilon$，那么就说 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 在 $\boldsymbol{X}$ 上一致收敛到 $\boldsymbol{f}$，说函数 f 是函数序列 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 的一致极限（或简单地说是 $f^{(n)}$ 的一致极限） ♣

注 此定义与逐点收敛定义有微妙的区别。在逐点收玫定义中的 N 允许依赖于 x，此处不允许

注 平凡的注释：如果函数序列 $f^{(n)}:X\to Y$ 逐点收敛（一致收敛）到函数 $f:X\to Y$，那么 $f^{(n)}$ 到 X 的某子集 E 的限制函数的序列 $f^{(n)}\big|_E:E\to Y$ 也逐点收敛（或一致收敛）到 $f|_E$

3.6.3 一致收敛性与连续性

一致收敛比逐点收敛更好的第一个证明：连续函数序列的一致极限是连续函数

定理 3.24 (一致极限保持连续性 I)

设 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是从度量空间 (X,d_X) 到度量空间 (Y,d_Y) 的函数的序列，并设此序列一致收敛到函数 $f:X\to Y$。设 x_0 是 X 的点。如果对于每个 n，函数 $f^{(n)}$ 都在点，x_0 处连续，那么极限函数 f 也在点 x_0 处连续 ♡

推论 3.18 (一致极限保持连续性 II)

设 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是从度量空间 (X,d_X) 到度量空间 (Y,d_Y) 的函数的序列，并设此序列一致收敛到函数 $f:X\to Y$。如果对于每个 $n,f^{(n)}$ 都在 X 上连续，那么极限函数 f 也在 X 上连续 ♡

命题 3.15 (极限与一致极限换序)

设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是度量空间，其中 Y 是完备的。设 E 是 X 的子集合。设 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是从 E 到 Y 的函数的序列，并假设此序列在 E 上一致收敛到某函数 $f:E\to Y$。设 $x_0\in E$ 是 E 的附着点，并设对于每个 n，极限 $\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(n)}(x)$ 都存在。那么极限 $\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$ 也存在并且等于序列 $(\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$ 的极限。换言之，如下的极限换序成立

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(n)}(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$$ ♠

命题 3.16

设 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 是从度量空间 (X, d_X) 到度量空间 (Y, d_Y) 的连续函数的序列，假设这个序列一致收敛到函数 $f: X \to Y$. 设 $x^{(n)}$ 是 X 中的点的序列，它收敛到某极限 x。那么 $f^{(n)}\left(x^{(n)}\right)$ 在 Y 中收敛到 $f(x)$

定义 3.29 (有界函数)

设 $f: X \to Y$ 是从度量空间 (X, d_X) 到度量空间 (Y, d_Y) 的函数。如果 $f(X)$ 是有界集合，即存在 Y 中的球 $B_{(Y,d_Y)}(y_0, R)$ 使得对于一切 $x \in X$ 成立 $f(x) \in B_{(Y,d_Y)}(y_0, R)$，那么就称 f 为有界函数

命题 3.17 (一致极限保持有界性)

设 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 是从度量空间 (X, d_X) 到度量空间 (Y, d_Y) 的函数的序列，并假设此序列一致收敛到函数 $f: X \to Y$。如果对于每个 n，函数 $f^{(n)}$ 都是在 X 上有界的，那么极限函数 f 也是在 X 上有界的

注 上述命题只当假定一致收敛时才成立，逐点收敛是不够的

3.6.4 一致收敛的度量

一致收敛处理的是函数而不是点，处理的收敛性既不是在 X 中的收敛也不是在 Y 中的收敛，而是在一个新的从 X 到 Y 的函数空间中的收敛

定义 3.30 (有界函数的度量空间)

设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间，让 $B(X \to Y)$ 代表从 X 到 Y 的有界函数的空间

$$B(X \to Y) := \{f \mid f: X \to Y \text{ 是有界函数}\}$$

如下定义度量 $d_\infty: B(X \to Y) \times B(X \to Y) \to \mathbb{R}^+$: 对于一切 $f, g \in B(X \to Y)$,

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

这个度量有时叫作上确界范数度量，或 L^∞ 度量。也使用 $d_{B(X \to Y)}$ 作为 d_∞ 的同义表达

注 距离 $d_\infty(f, g)$ 总是有限的，因为假设 f 和 g 都在 X 上有界

命题 3.18

设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 都是度量空间，$\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 是 $B(X \to Y)$ 中的函数的序列，并设 $f \in B(X \to Y)$。那么 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 依度量 $d_{B(X \to Y)}$ 收敛到 f 的充分必要条件是 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛到 f

现在设 $C(X \to Y)$ 是从 X 到 Y 的有界连续函数的空间：

$$C(X \to Y) := \{f \in B(X \to Y) : f \text{ 是连续的}\}$$

集合 $C(X \to Y)$ 显然是 $B(X \to Y)$ 的子集合，并且这个空间 $C(X \to Y)$ 在 $B(X \to Y)$ 中是闭的

定理 3.25 (连续函数空间是完备的)

设 (X, d_X) 是度量空间，并设 (Y, d_Y) 是完备的度量空间。那么空间 $\left(C(X \to Y), d_{B(X \to Y)}|_{C(X \to Y) \times C(X \to Y)}\right)$ 是 $(B(X \to Y), d_{B(X \to Y)})$ 的完备子空间。换言之，$C(X \to Y)$ 中的函数的每个 Cauchy 序列都收敛到 $C(X \to Y)$ 中的函数

3.6.5 函数级数和 Weierstrass M 判别法

给定任意有限个从 X 到 $\mathbb{R}$ 的函数 $f^{(1)},\cdots,f^{(N)}$，可以定义有限和 $\sum_{i=1}^{N} f^{(i)}: X\to\mathbb{R}$ 为

$$\left(\sum_{i=1}^{N} f^{(i)}\right)(x) := \sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(x)$$

有界函数的有限和是有界的，连续函数的有限和是连续的

定义 3.31 (无限级数)

设 (X,d) 是度量空间。设 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 是从 X 到 $\mathbb{R}$ 的函数的序列，并设 f 是从 X 到 $\mathbb{R}$ 的函数。如果部分和 $\sum_{n=1}^{N} f^{(n)}$ 在 X 上当 $N\to\infty$ 时逐点收敛到 f，就说无限级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 逐点收敛到 f，记作 $f=\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$。如果部分和 $\sum_{n=1}^{N} f^{(n)}$ 在 X 上当 $N\to\infty$ 时一致收敛到 f，就说无限级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 一致收敛到 f，仍记 $f=\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ ♣

所以，见到像 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}=f$ 这样的表达式时，应从上下文看此级数依何种意义收敛

注 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 在 X 上逐点收敛到 f 当且仅当对于每个 $x\in X$，$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)$ 收敛到 $f(x)$。(于是，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 不逐点收敛到 f，那并不表示它逐点发散，它可以在某些点 x 处收敛，而在另一些点 y 处发散)。

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 一致收敛到 f，那么它也逐点收敛到 f，但反之不真

定义 3.32 (上确界范数)

设 $f: X\to\mathbb{R}$ 是有界实值函数，定义 f 的上确界范数 $\|f\|_\infty$ 为数

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x\in X\}$$

换言之，$\|f\|_\infty = d_\infty(f,0)$，其中 $0: X\to\mathbb{R}$ 是零函数 $0(x):=0$，而 d_∞ 是度量空间中定义的度量 ♣

定理 3.26 (Weierstrass M 判别法)

设 (X,d) 是度量空间，并设 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 上的有界实值连续函数的序列。如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f^{(n)}\right\|_\infty$ 收敛（注意这纯粹是一个实数的级数），那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 在 X 上一致收敛到 X 上的某函数 f，而且函数 f 也是连续的

即：上确界范数的绝对收敛蕴含函数项级数的一致收敛 ♡

3.6.6 一致收敛与积分、微分

定理 3.27 (一致收敛与积分)

设 $[a,b]$ 是区间，并设对于每个整数 $n\geqslant 1, f^{(n)}:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 Riemann 可积函数。假设 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，那么 f 也是 Riemann 可积的，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f^{(n)} = \int_{[a,b]} f$$

♡

推论 3.19

设 $[a,b]$ 是区间，并设 $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ 是在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的函数的序列。如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 一致收敛，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]} f^{(n)} = \int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$$

♡

定理 3.28 (一致收敛与微分)

设 $[a,b]$ 是区间，对于每个整数 $n \geqslant 1$，设 $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是可微函数，并且其导函数 $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是连续的。假设导数序列 $\{f_n'\}$ 一致收敛到函数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$。还假设存在 $x_0 \in [a,b]$，使得极限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$。那么函数序列 $\{f_n\}$ 一致收敛到一个可微函数 f，并且 f 的导数等于 g

非正式地说，上述定理说的是，如果 $\{f_n'\}$ 一致收敛，并且 $\{f_n(x_0)\}$ 对于某 x_0 收敛，那么 $\{f_n\}$ 也一致收收敛，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

♡

推论 3.20

设 $[a,b]$ 是区间，对于每个整数 $n \geqslant 1$，设 $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是可微函数，其导函数 $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是连续的。假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_\infty$ 绝对收敛，其中

$$\|f_n'\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x)|$$

是 f_n' 的上确界范数。还假设对于某 $x_0 \in [a,b]$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛。那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到一个可微函数，并且事实上对于一切 $x \in [a,b]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

♡

3.6.7 用多项式一致逼近

定义 3.33 (多项式及其次数)

设 $[a,b]$ 是区间。$[a,b]$ 上的多项式是形如 $f(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ 的函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，其中 $n \geqslant 0$ 是整数并且 $c_0, \cdots, c_n$ 是实数。如果 $c_n \neq 0$，那么 n 叫作 f 的次数

♣

定理 3.29 (Weierstrass 逼近定理)

设 $[a,b]$ 是区间，$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是连续函数。任给 $\varepsilon > 0$，都存在 $[a,b]$ 上的多项式 P，使得 $d_\infty(P,f) \leqslant \varepsilon$ (即对于一切 $x \in [a,b], |f(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon$)

♡

叙述此定理的另一方式如下。我们记得 $C([a,b] \to \mathbb{R})$ 是从 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数的空间，具有一致度量 d_∞。设 $P([a,b] \to \mathbb{R})$ 是 $[a,b]$ 上的全体多项式组成的空间，它是 $C([a,b] \to \mathbb{R})$ 的子空间，这因为每个多项式都是连续的。那么 Weierstrass 逼近定理说的是，每个连续函数都是 $P([a,b] \to \mathbb{R})$ 的附着点；或者说多项式空间的闭包是连续函数空间：

$$\overline{P([a,b] \to \mathbb{R})} = C([a,b] \to \mathbb{R})$$

也就是说，$[a,b]$ 上的每个连续函数都是多项式的一致极限。换言之，多项式空间在连续函数空间中依一致度量稠密

定义 3.34 (紧支撑函数)

设 $[a,b]$ 是区间。函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 叫作是支撑在 $[a,b]$ 上的，如果当 $x \notin [a,b]$ 时 $f(x) = 0$。说 f 是紧支撑的当且仅当它支撑在某区间 $[a,b]$ 上。如果 f 连续并且支撑在 $[a,b]$ 上，那么，定义反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f$ 为 $\int_{[a,b]} f$

♣

注 一个函数可以支撑在多于一个区间上，例如一个支撑在 $[3,4]$ 上的函数自动地支撑在 $[2,5]$ 上。原则上说，这可能意味着我们对于 $\int_{-\infty}^{\infty} f$ 的定义不成功，但事实并非如此：

定理 3.30

若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的并且支撑在区间 $[a,b]$ 上，而且也支撑在另一区间 $[c,d]$ 上，那么

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[c,d]} f$$

定义 3.35 (对于恒等的逼近)

设 $\varepsilon>0, 0<\delta<1$。称函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为对于恒等的 (ε,δ) 逼近，如果它具有下述三条性质：

(a) f 支撑在 $[-1,1]$ 上且对于一切 $-1\leqslant x\leqslant 1, f(x)\geqslant 0$

(b) f 是连续的，且 $\int_{-\infty}^{\infty} f=1$

(c) 对于一切 $\delta\leqslant |x|\leqslant 1, |f(x)|\leqslant\varepsilon$

对于 Weierstrass 逼近定理的证明依赖于三个关键性的事情。

第一件事是多项式可以作为恒等函数的近似

引理 3.4 (多项式可以逼近恒等)

对于任意的 $\varepsilon>0$ 和 $0<\delta<1$，存在一个 $[-1,1]$ 上的多项式 P，它是对于恒等的 (ε,δ) 逼近

定义 3.36 (卷积)

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的、紧支撑的函数。定义 f 与 g 的卷积 $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为函数

$$(f*g)(x):=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

注 如果 f 和 g 都是连续的、紧支撑的，那么对于每个 x，作为 y 的函数 $f(y)g(x-y)$ 也是连续的、紧支撑的，所以上述定义成立

命题 3.19 (卷积的基本性质)

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都是连续的、紧支撑的函数，那么下述命题成立：

(a) 卷积 $f*g$ 也是连续的、紧支撑的函数

(b) （卷积是交换的）有 $f*g=g*f$，换言之

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y=g*f(x)$$

(c) （卷积是线性的）有 $f*(g+h)=f*g+f*h$。还有，对于任何实数 c，有 $f*(cg)=(cf)*g=c(f*g)$

注 卷积还有很多其他的重要性质：结合性 $(f*g)*h=f*(g*h)$、以及与导数的可交换性

$$(f*g)'=f'*g=f*g'，\text{只要}f\text{ 和}g\text{ 是可微的}$$

第二个关键的事情是，与多项式的卷积产生另一个多项式

引理 3.5

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的支撑在 $[0,1]$ 上的函数，并设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的支撑在 $[-1,1]$ 上的函数，它是 $[-1,1]$ 上的多项式。那么 $f*g$ 是 $[0,1]$ 上的多项式。（但注意，在 $[0,1]$ 之外它可以不是多项式）

第三个关键性的事情是，如果把一个一致连续的函数与一个对于恒等的逼近作卷积，就得到一个新的函数，它近似于原来的函数（这解释了“对于恒等的逼近”这一术语）

引理 3.6

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，支撑在 $[0,1]$ 上，界于某 $M>0$（即对于一切 $x\in\mathbb{R},|f(x)|\leqslant M$）。设 $\varepsilon>0,0<\delta<1$ 使得只要 $x,y\in\mathbb{R}$ 且 $|x-y|<\delta$ 就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。设 g 是对于恒等的任意的 (ε,δ) 逼近。那么，对于一切 $x\in[0,1]$，有

$$|f*g(x)-f(x)|\leqslant(3M+2\delta)\varepsilon$$

♡

把这些合起来，就得到 Weierstrass 逼近定理的一个预备形式：

推论 3.21 (Weierstrass 逼近定理 I)

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，支搂在 $[0,1]$ 上。那么对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个函数 $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它在 $[0,1]$ 上是多项式，并且对于一切 $x\in[0,1],|P(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$

♡

现在来实施一系列的修正，把推论转化成真正的 Weierstrass 逼近定理
首先需要一个简单的引理

引理 3.7

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，它在 $[0,1]$ 的边界上等于 0，即 $f(0)=f(1)=0$。设 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是由

$$F(x):=\begin{cases} f(x), & \text{当} x\in[0,1]\\ 0, & \text{当} x\notin[0,1]\end{cases}$$

定义的函数，那么 F 也是连续的

♡

注 引理中定义的函数 F 有时叫作 f 的零延拓

3.6.8 幂级数

3.6.8.1 形式幂级数

定义 3.37 (形式幂级数)

设 a 是实数，任何形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

的级数都叫作以 $\boldsymbol{a}$ 为中心（或中心在 $\boldsymbol{a}$）的形式幂级数，其中 $c_0,c_1,\cdots$ 是一列实数（与 x 无关），并把 c_n 叫作此级数的第 n 个系数。注意，此级数的每一项 $c_n(x-a)^n$ 都是实变量 x 的函数

♣

这些级数当 $x=a$ 时自动收敛，一般而言 x 越接近于 a，形式幂级数就越容易收敛

定义 3.38 (收敛半径)

设 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 是形式幂级数。称

$$R:=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

为此幂级数的收敛半径，其中约定 $\frac{1}{0}=\infty$ 以及 $\frac{1}{\infty}=0$

♣

注 每个数 $|c_n|^{\frac{1}{n}}$ 都不是负的，所以上极限 $\limsup|c_n|^{\frac{1}{n}}$ 可以取从 0 到 ∞（包括 0 和 ∞ 在内）的任何值。于是 R 也可以取从 0 到 ∞（包括 0 和 ∞ 在内）的任何值（当然它不必是实数）

注 即使序列 $\{|c_n|^{\frac{1}{n}}\}$ 不收敛，收敛半径也总是存在的，因为任何实数的序列都存在上极限（当然它可以是 ∞ 或 $-\infty$）

定理 3.31 (收敛半径的意义)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 是形式幂级数，并设 R 是它的收敛半径。那么有:

(a) (在收敛半径之外发散) 如果 $x \in \mathbb{R}$ 且 $|x-a| > R$，那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 对此 x 值发散

(b) (在收敛半径之内收敛) 如果 $x \in \mathbb{R}$ 且 $|x-a| < R$，那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 对此 x 值绝对收敛

在下面的 (c)(d)(e) 三条中，设 $R > 0$ (即级数至少在 $x = a$ 之外的一点处收敛)。设 $f : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ 是函数

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

此函数由 (b) 保证是存在的

(c) (在紧致集合上一致收敛) 对于任意的 $0 < r < R$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在紧致区间 $[a-r, a+r]$ 上一致收敛到 f，从而 f 在 $(a-R, a+R)$ 上连续

(d) (幂级数的微分) 函数 f 在 $(a-R, a+R)$ 上可微，并且对于任意的 $0 < r < R$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ 在区间 $[a-r, a+r]$ 上一致收敛到 f'

(e) (幂级数的积分) 对于包含在 $(a-R, a+R)$ 内的任何闭区间 $[y, z]$，有

$$\int_{[y,z]} f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n+1} - (y-a)^{n+1}}{n+1}$$

♡

注 上述定理对于 $|x-a| = R$ 的情形，即在点 $a-R$ 和 $a+R$ 处的情形如何没有给出任意信息。实际上，在这些点处收敛和发散都可能发生

注 尽管上述定理保证幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在区间 $(a-R, a+R)$ 内逐点收敛，它却不必在此区间内一致收敛；另一方面，定理保证幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在任何较小的区间 $[a-r, a+r]$ 上一致收敛。可见，在 $(a-R, a+R)$ 的每个闭子区间上一致收敛不足以保证在整个 $(a-R, a+R)$ 上一致收敛

定义 3.39 (内闭一致收敛)

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 与 $f(x)$ 定义在区间 I 上，如果对任意闭区间 $[a, b] \subset I$, $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上内闭一致收敛于 $f(x)$

♣

性质 (连续性)

设函数 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 都在区间 I 上连续，函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 内闭一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 I 上连续

性质 (可积性)

设对任何闭区间 $[a, b] \subset I$，函数 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 都在区间 $[a, b]$ 上可积，函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 内闭一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

性质 (可微性)

设函数 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 都在区间 I 上有连续的导数 $f_n'(x) = g_n(x)$, $\{f_n(x)\}$ 在 I 上收敛于 $f(x)$, $\{f_n'(x)\} = \{g_n(x)\}$ 在 I 内闭一致收敛于 $g(x)$，则 $f(x)$ 在区间 I 上有连续的导数 $f'(x) = g(x)$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{n\to\infty}} \lim_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

由此进一步可得到结论：函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 内闭一致收敛于 $f(x)$

3.6.9 实解析函数

一个函数，若是有幸被表示成幂级数，它就有一个特殊的名字，叫做实解析函数

定义 3.40 (实解析函数)

设 E 是 $\mathbb{R}$ 的子集合，并设 $f: E\to\mathbb{R}$ 是函数。设 a 是 E 的内点，如果对于某 $r>0,(a-r,a+r)$ 是 E 的开区间，使得有一个以 a 为中心的收敛半径大于或等于 r 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $(a-r,a+r)$ 上收敛到 f，那么 f 叫作是在 a 处实解析的。如果 E 是开集，并且 f 在 E 的每点处都是实解析的，那么就说 f 是在 E 上实解析的 ♣

3.7 实幂级数理论

3.7.1 形式幂级数及其收敛性

定义 3.41 (形式幂级数)

称形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

的级数为形式幂级数，称点 a 为该幂级数的中心，称常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 为幂级数的系数 ♣

注 （形式幂级数）若对形式幂级数表达式作平移变换 $t=x-a$, 并再将 t 记为 x，则得以原点为中心的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，为方便起见，在无其他说明时，经常采用中心为原点的形式

定义 3.42 (形式幂级数分类与收敛半径)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$，称只在 $x=a$ 收敛的幂级数为第一类幂级数，称处处收敛的幂级数为第二类幂级数；若存在非零正数 R，使得当 $|x-a|<R$ 时级数收敛，而当 $|x-a|>R$ 时级数发散，称这样的幂级数为第三类幂级数另外，称 R 为该幂级数的收敛半径。称第一类幂级数为收敛半径为 $R=0$ 的幂级数，称第二类幂级数为收敛半径 $R=+\infty$ 的幂级数。 ♣

注 （收敛域）形式幂级数收敛域为关于其中心 a 的对称区间。对第一类幂级数，仅为只含一个点 a 的退化区间；对第二类幂级数，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$；对 R 为正有限数的第三类幂级数，在收敛区间端点 $a-R$ 和 $a+R$ 处幂级数可收敛也可发散（用以原点为中心的幂级数为例，以正有限数 R 为收敛半径的收敛域可以为 $[-R,R],(-R,R),(-R,R],[-R,R)$）

例题 3.7 （2672,2831/Pringsheim 级数）求幂级数 Pringsheim 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$ 收敛域

解 （1）研究系数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 敛散性。

从级数的第一项起，将相邻同号项结合（即加括号）而得到新级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$，其中

$$A_1=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, A_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\cdots,$$

$$A_k=(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right),\cdots$$

欲证明 $|A_k|$ 单调递减趋于 0，用 Leibniz 判别法知新的级数收敛。然后再用数值级数分组求和命题 (2.3) 推出原级数收敛，则其为条件收敛的。

利用积分估计有

$$\int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{\mathrm{d}x}{x} < |A_k| < \int_{k^2-1}^{(k+1)^2-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

因此为建立 $|A_{k+1}| < |A_k|$，只需证

$$|A_{k+1}| < \int_{(k+1)^2-1}^{(k+2)^2-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} < \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{\mathrm{d}x}{x} < |A_k|$$

求出中间的两个定积分，并利用下列等价关系：

$$\ln\left(\frac{(k+2)^2-1}{(k+1)^2-1}\right) < \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k^2}\right) \Longleftrightarrow k^2\left[(k+2)^2-1\right] < (k+1)^2\left[(k+1)^2-1\right]$$

$$\Longleftrightarrow k^4+4k^3+3k^2 < k^4+4k^3+5k^2+2k,$$

即证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 Leibniz 级数，因此由 Leibniz 判别法 (2.18) 有级数收敛满足猜想。

(2) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ 收敛域。

由于幂级数的系数 a_n 的绝对值为 $\dfrac{1}{n}$，可见收敛半径为 $R=1$，且在端点 ± 1 处级数不可能绝对收敛。由级数为条件收敛，对于 $x=-1$，可将级数分拆如下：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{n=1, n\neq k^2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n},$$

这时右边第一个级数收敛，现验证第二个级数为交错级数。观察处于 $n=k^2$ 之后到 $n=(k+1)^2$ 之前的这一组中的各项的符号，它们的序号 n 如下：

$$k^2+1, k^2+2, \cdots, (k+1)^2-1$$

由这样的 n 决定的 $(-1)^{[\sqrt{n}]} = (-1)^k$ 对所有这些项来说是相同的，乘上 $(-1)^n$ 之后变为交错项。考虑这一组的最后的 $n=(k+1)^2-1$ 与下一组首项 $n=(k+1)^2+1$，由于它们奇偶性相同，因此对应项的符号分别由 $(-1)^k$ 和 $(-1)^{k+1}$ 确定，于是符号也是交错的。即有第二个级数为交错级数。

再考虑去掉 $n=k^2$ 的项之后，第二个级数通项的绝对值仍然严格单调递减趋于 0，则由 Leibniz 判别法 (2.18) 第二个级数收敛。

综上所述 $x=-1$ 时级数收敛，则有收敛域为 $[-1;1]$。

3.7.2 Cauchy-Hadamard 定理与 Cauchy-Hadamard 公式

定理 3.32 (Cauchy-Hadamard 定理)

(Cauchy-Hadamard[a]定理) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，且 $b_n = \sqrt[n]{|a_n|}, n=1,2,\cdots$

I. 若 $\{b_n\}$ 无界，则幂级数仅在 $x=0$ 收敛。

II. 若 $\{b_n\}$ 有界且有上极限 $L>0$，则幂级数在 $|x| < \dfrac{1}{L}$ 绝对收敛，在 $|x| > \dfrac{1}{L}$ 发散。

III. 若 $\{b_n\}$ 有界且有上极限 $L=0$，则幂级数在所有 x 上绝对收敛。

[a]雅克 · 所罗门 · 阿达马（Jacques Solomon Hadamard，1865.12.8—1963.10.17）法国数学家，以其素数定理证明著称。

证明 I. 设 $\{b_n\}$ 无界，当 $x\neq 0$ 时有 $|x|\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ 也无界，则有足够大的 n 满足不等式 $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ 即 $|a_n x^n| > 1$。则数值级数不满足数值级数收敛必要条件 (2.1)，则幂级数在 $x \neq 0$ 发散，而幂级数在 $x=0$ 收敛性显然

II. 若 $\{b_n\}$ 有界且有上极限 $L>0$，先证明幂级数在 $|x| < \dfrac{1}{L}$ 绝对收敛：

1. 固定任意 $x, |x| < \dfrac{1}{L}$，则这时 $(\exists\varepsilon > 0): |x| < \dfrac{1}{L+\varepsilon}$，由 $\{b_n\}$ 有上极限 $L>0$，则从某个 n 开始有

$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \dfrac{\varepsilon}{2}$，进一步则有

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \frac{\varepsilon}{2}}{L + \varepsilon} < 1$$

由数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 即证幂级数绝对收敛

2. 固定任意 $x, |x| > \dfrac{1}{L}$，则这时 $(\exists\varepsilon > 0) : |x| > \dfrac{1}{L - \varepsilon}$，由 $\{b_n\}$ 有上极限 $L > 0$ 可以找到收敛到 L 的子序列 $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\}$，并且从某个 k 开始有 $L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon$，进一步有

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1$$

因此幂级数不满足数值级数收敛必要条件 (2.1)，则幂级数发散

III. 设 $\{b_n\}$ 有界且有上极限 $L = 0$，固定任意 $x \neq 0$（当 $x = 0$ 时幂级数绝对收敛），由于 $L = 0$ 且 $\{b_n\}$ 没有负极限点，则 $L = 0$ 为唯一极限点，则有 $\{b_n\}$ 的子序列为无穷小序列。但这时对于正数 $\varepsilon = \dfrac{1}{2|x|}$ 能找到号码从某项开始有 $\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{2|x|}$ 则进一步有

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1$$

则由数值级数 Cauchy 准则 (2.1) 幂级数绝对收敛

推论 3.22 (Cauchy-Hadamard 公式)

设第三类幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，即存在非零正数 R，使得当 $|x - a| < R$ 时级数收敛，而当 $|x - a| > R$ 时级数发散，则其收敛半径 R 计算公式为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

其中约定，当右部上极限为 0 时取 $R = +\infty$，当右部上极限为 $+\infty$ 时取 $R = 0$

♡

推论 3.23 (第三类幂级数收敛半径计算公式)

设第三类幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，即存在非零正数 R，当 $|x - a| < R$ 时幂级数收敛，而当 $|x - a| > R$ 时幂级数发散，则其收敛半径 R 计算公式为

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

♡

证明 由 Cauchy 根值判别法与 D'Alembert 比值判别法可解性命题 (2.7) 即证

注 该公式必须在右部极限存在时才有效

例题 3.8 (2830/缺项幂级数) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{2^n}$ 收敛域

解

解一：(**Cauchy-Hadamard** 公式) 将级数改写为标准形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，得系数通项为

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k}, & n = k^2 \geqslant 1, \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases}$$

则由 Cauchy-Hadamard 公式 (3.22) 计算收敛半径如下：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2}} = 1$$

又 $x = \pm 1$ 时级数绝对收敛，则幂级数收敛域为 $[-1; 1]$

解二：（极限形式 **Cauchy** 根值判别法）由极限形式 Cauchy 根值判别法 (2.2.2) 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \dfrac{1}{2}, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$$

可见当 $|x|\leqslant 1$ 时级数绝对收敛，否则发散

注 对于缺项幂级数，即其中有无限多个系数等于 0 的幂级数，无法使用公式 (3.23) 计算收敛半径，这时考虑 Cauchy-Hadamard 公式 (3.22)，极限形式 D'Alembert 比值判别法 (2.9) 与极限形式 Cauchy 根值判别法 (2.2.2)

命题 3.20 (关于二项式系数的估计式)

设 $p\neq 0$ 为非负整数，则成立

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}=O^*\left(\frac{1}{n^{1-p}}\right)\ (n\to\infty)$$

证明 若 $p=1$ 显然成立。对其他情况，可分析如下：取正整数 m，使得当 $k\geqslant m$ 时有 $\left|\dfrac{1-p}{k}\right|<1$，则当 $n>m$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}&=\frac{[1-(1-p)]\cdot[2-(1-p)]\cdot\cdots\cdot[n-(1-p)]}{1\cdot 2\cdots n}\\&=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1-p}{k}\right)=C_1\prod_{k=m}^{n}\left(1-\frac{1-p}{k}\right)\\&=C_1\exp\left[\sum_{k=m}^{n}\ln\left(1-\frac{1-p}{k}\right)\right]\\&=C_1\exp\left[-(1-p)\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=m}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\end{aligned}$$

其中当 $m=1$ 时取 $C_1=1$，否则取与 n 无关的常数

$$C_1=\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{1-p}{k}\right)$$

利用 $\ln(1-t)+t\sim-\dfrac{t^2}{2}(t\to 0)$，可见指数上第二个和式中 $O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ 与 $\dfrac{1}{k^2}$ 之比为与 k 无关有界量，由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ 收敛，又 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ 与 $\ln n$ 之差为有界量，即得

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}=C_1\exp\left[-(1-p)\ln n+C_2+o(1)\right]\sim\frac{C}{n^{1-p}}$$

其中 C_2 为常数，C 为非零常数

注 由此即得二项式系数 C_m^n 在 $(n\to\infty)$ 时估计式

$$\mathrm{C}_m^n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(-m)(-m+1)\cdots(-m+n-1)}{n!}=O^*\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

例题 3.9 （2820/二项式系数幂级数级数）求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

收敛域

解 （第三类幂级数收敛半径计算公式）若 m 为非负整数，则幂级数仅有有限个非零项，则收敛半径 $R=+\infty$。仅需讨论 m 不是非负整数情况。利用公式 (3.23) 即可求出收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1$$

讨论在 $x=\pm 1$ 处敛散性，利用二项式系数估计命题 (3.20) 得二项式系数 a_n 渐近式：

$$a_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=O^*\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)(n\to\infty)$$

当 $m>0$ 时，从通项的上述渐近等式即可见当 $x=\pm 1$ 时两个级数均为绝对收敛，而当 $m<0$ 时则不可能绝对收敛。又可看出当 $m\leqslant -1$ 时，两个级数的通项均不趋于 0 ，因此级数发散。对于 $-1<m<0$，从 $a_{n+1}=a_n\cdot\dfrac{m-n}{n+1}$ 可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数，且 $\{|a_n|\}$ 为严格单调递减趋于 0 的数列，由 Leibniz 判别法 (2.18) 得级数收敛，且从渐近等式知为条件收敛，而当 $x=-1$ 时级数发散

3.7.3 幂级数一致收敛性与逐项运算

注 尽管仅讨论第三类幂级数，但实际上，其结论显然可以平凡推广到第一类幂级数和第二类幂级数情形

引理 3.8 (第三类幂级数一致收敛的必要条件)

设第三类幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其收敛半径 $R>0$，若 $0<r<R$，则幂级数在区间 $[-r;r]$ 上一致收敛（内闭一致收敛）

♡

证明 由 Cauchy-Hadamard 公式 (3.22)，幂级数在 $x=r$ 绝对收敛，则有级数 $|a_0|+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|r^n$ 收敛，则为幂级数在 $[-r;r]$ 上找到了一个强级数，由 Weierstrass 强级数判别法 (3.3) 有幂级数在 $[-r;r]$ 上一致收敛

推论 3.24

设第三类幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 所有项稠密集 $\{x\}$ 上连续且在 $\{x\}$ 上一致收敛，其收敛半径 $R>0$，若 $0<r<R$，则和函数在 $[-r;r]$ 上连续

♡

定理 3.33 (第三类幂级数和函数连续充分条件)

第三类幂级数的和函数在幂级数收敛域内连续

♡

证明 设 $S(x)$ 为第三类幂级数和函数，R 为其收敛半径，固定任意数 $x\in(-R;R)$。永远可以找到数 $r:|x|<r<R$，由推论 (3.24) 函数 $S(x)$ 在 $[-r;r]$ 上连续，则 $S(x)$ 在点 x 连续，则和函数在幂级数收敛域 $(-R;R)$ 内连续

定理 3.34 (第三类幂级数逐项积分)

设第三类幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其收敛半径 $R>0$，固定任意数 $x\in(-R;R)$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在以 0 和 x 为端点的区间上逐项可积，并在 0 和 x 有界。另外，逐项积分获得的级数与原级数具有相同的收敛半径 $R>0$

♡

证明 对于 $(\forall x)(|x|<R)(\exists r):(|x|<r<R)$，由引理第三类幂级数必要条件 (3.7.3)，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-r;r]$ 一致收敛。但由函数级数逐项积分推论 (3.7) 有该级数在该区间上可以逐项积分。不妨设 $x>0$ 且在 $[0;x]$ 上逐项积分，则得幂级数

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\ldots$$

由 Cauchy-Hadamard 公式 (3.22) 有收敛半径为下面序列的上极限

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}}=\frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}\tag{3.50}$$

而序列 (3.50) 上极限就等于序列 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ 上极限

定理 3.35 (第三类幂级数逐项微分)

第三类幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域内逐项可微，逐项微分获得的级数与原级数有相同的收敛半径 ♡

证明 仅需证定理后半部分。逐项微分幂级数有

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n + \ldots,$$

由 Cauchy-Hadamard 公式 (3.22) 有收敛半径为下面序列的上极限

$$\sqrt[n]{(n+1)\left|a_{n+1}\right|} \tag{3.51}$$

而序列 (3.51) 上极限就等于序列 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ 上极限

推论 3.25 (第三类幂级数无穷逐项可微性)

第三类幂级数在其收敛域内可无穷次逐项微分，n 次逐项微分获得的级数与原级数有相同的收敛半径 ♡

例题 3.10 （2797/Riemann 函数逐项求导求导数）Riemann 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在区间 $x > 1$ 内连续，且在此区间内有各阶的连续导函数。

解 由正项级数的 Cauchy-Maclaurin 积分判别法 (2.11)，可知 $\zeta(x)$ 在 $x > 1$ 时有定义。对任意点 $x_0 > 1$，取 $\delta > 0$ 充分小（例如令 $\delta = \dfrac{1+x_0}{2}$ ），使得有 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (1, +\infty)$。在这个闭区间上有强级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0 - \delta}}$$

由 Weierstrass 强级数判别法 (3.3) 得级数在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上一致收敛，则有第三类幂级数和函数连续充分条件 (3.33) 有和函数在点 x_0 处连续。由 $x_0 \in (1, +\infty)$ 任意性有 $\zeta(x)$ 在其定义域内处处连续。

对级数逐项求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$$

对任意点 $x_0 > 1$，与前面同样地取 $\delta > 0$，使得 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (1, +\infty)$，则在这个闭区间上有强级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x_0 - \delta}}$$

由 Weierstrass 强级数判别法 (3.3) 得上述逐项求导所得级数在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上一致收敛，从而知道 $\zeta(x)$ 在点 x_0 处可导，且成立

$$\zeta'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^{x_0}}.$$

由 $x_0 \in (1, +\infty)$ 任意性，可见 $\zeta(x)$ 在其定义域内处处可导，且其导数可以从原来的级数逐项求导得到。以下可以用数学归纳法证明 $\zeta(x)$ 在其定义域内处处有任意阶导数，从略

注 由于以上级数都在 $x = 1$ 处发散，因此在 $(1, +\infty)$ 或任何有界区间 $(1, A)$ 上均非一致收敛。由于连续性和可导性都是函数局部性质，因此只需一个充分小的区间将所讨论的点 x_0 包含于其内部，对这个小区间来验证所需的一致收敛性条件即可

定理 3.36 (幂级数 Abel 第一定理)

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在某点 ζ 处收敛，则幂级数在 $|x| < |\zeta|$ 时绝对收敛 ♡

证明 由 $x=\zeta$ 时幂级数收敛，则由数值级数收敛必要条件 (2.1) 有 $a_n\zeta^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$，则有

$$(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N}:|a_n\zeta^n|<M$$

进而有

$$|a_nx^n|=|a_n\zeta^n|\cdot\left|\frac{x}{\zeta}\right|^n\leqslant M\left|\frac{x}{\zeta}\right|^n$$

当 $|x|<|\zeta|$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x}{\zeta}\right|^n$ 为收敛级数，由第一比较定理 (2.2.1) 得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛

注 由证明过程可以看出，该定理实际上对复数点也成立

例题 3.11 （2737/Laurent[2]级数）若级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2\,(|x_1|<|x_2|)$ 时收敛，则此级数当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时也收敛。（Laurent 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ 收敛的定义是以下两个级数 (A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}x^{-n}$ 同时收敛）

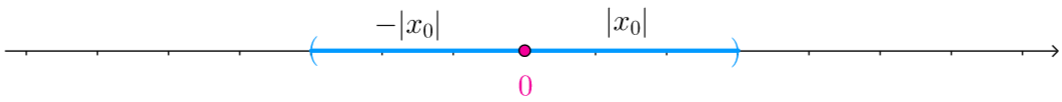
证明 若级数通项的系数 a_n 下标为负整数时全为 0，则直接得到幂级数。由幂级数 Abel 第一定理 (3.36)，当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 于 $x_2\neq0$ 收敛时，级数对满足 $|x|<|x_2|$ 的 x 均为绝对收敛

除了上述情况外，当变量 $x\neq0$ 时级数通项才有意义。因此 Laurent 级数收敛域为二级数收敛域之交。于是当二级数在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 同时收敛且 $0<|x_1|<|x_2|$ 时，由幂级数 Abel 第一定理 (3.36) 知，当 x 满足 $|x|<|x_2|$ 时级数 (A) 收敛，又将级数 (B) 看为变量 $\frac{1}{x}$ 的幂级数，则当 x 满足 $|x|>|x_1|$ 时级数 (B) 收敛，因此当 x 满足 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时二级数同时收敛，从而 Laurent 级数收敛

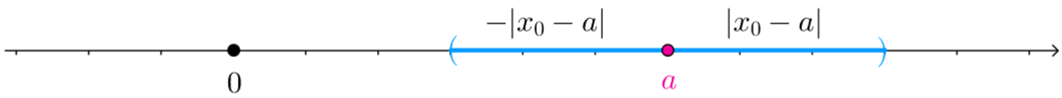
定理 3.37 (幂级数 Abel 第二定理)

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 在某点 ζ 收敛，则幂级数在以 z_0,ζ 为端点的闭区间上一致收敛。

阿贝尔定理说的就是，对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，假如已知 $x=x_0$ 是收敛的，那么以 $x=0$ 为中心，$|x_0|$ 为半径的区域内都是绝对收敛的（注意是开区间）：



对于中心为 $x=a$ 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$，假如已知 $x=x_0$ 是收敛的，那么以 $x=a$ 为中心，$|x_0-a|$ 为半径的区域内都是绝对收敛的（也是开区间）：



证明 把上述闭区间上的点表示为 $z=z_0+(\zeta-z_0)\,t$ 的形式，其中 $0\leqslant t\leqslant1$。把 z 的表达式代入所给幂级数，得到级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\zeta-z_0)^n\,t^n$。根据条件，数值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\zeta-z_0)^n$ 收敛，而函数序列 t^n 在闭区间 $[0;1]$ 上单

[2]皮埃尔 · 阿方斯 · 洛朗（Pierre Alphonse Laurent,1813.7.18—1854.9.2）法国数学家，1843 年 Laurent 研究报告中首次提出 Laurent 级数

调并且一致有界（以 1 为界）。因此，Abel-Dirichlet 判别法 (3.2.2) 中条件 $\alpha_2), \beta_2)$ 满足，即 Abel 判别法成立，命题得证。

注 幂级数 Abel 第二定理的逆定理不成立。若设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$ 且 $\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ 存在，并不能得到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$。例如，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的收敛半径为 1，它在 $(-1;1)$ 内等于 $\dfrac{1}{1+x}$，因而

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{2}$$

存在，但级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 显然发散。

若给系数 a_n 加上适当的条件，则逆定理也能成立，如下面的 Tauber 定理 (3.38)

注 同样，对于复数点，该定理也成立。经常也把下面的推论 (3.26) 称为 Abel 第二定理，其为 Abel 第二定理的直接推论

推论 3.26

设幂级数 $\sum a_n x^n$，若幂级数在 $x=c>0$ 收敛，则和函数 $A(x)$ 在闭区间 $I=[0;c]$ 上连续；若幂级数在 $x=c<0$ 收敛，则和函数 $A(x)$ 在闭区间 $I=[c;0]$ 上连续

证明 由幂级数 Abel 第二定理 (3.37) 可完全类似引理 (3.7.3) 与定理 (3.33) 得到类似结论，则幂级数和函数 $A(x)$ 在收敛域 I 上连续

定理 3.38 (Tauber 定理)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1，且

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

存在，若 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，则有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$

证明 由假定得 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$，若令 $\delta_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{|k a_k|\}$，则当 $n\to\infty$ 时，δ_n 递减趋于 0。令

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (0\leqslant x<1)$$

对任何正整数 N 都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n - A &= \sum_{n=0}^{N} a_n - S(x) + S(x) - A = \sum_{n=1}^{N} a_n\left(1-x^n\right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + (S(x)-A)\\ &= I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)\end{aligned}$$

对 $x\in[0;1)$ 有估计

$$|I_1(x)| \leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N}|a_n|\left(1+x+\cdots+x^{n-1}\right) \leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| \leqslant (1-x)N\delta_1$$

$$|I_2(x)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}|n a_n|\frac{x^n}{n} \leqslant \frac{\delta_N}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{\delta_N}{N}\frac{x^{N+1}}{1-x} \leqslant \frac{\delta_N}{N(1-x)}$$

令 $x_N = 1-\sqrt{\dfrac{\delta_N}{N}}$，即 $N(1-x_N)=\sqrt{\delta_N}$。显然当 $N\to\infty$ 时，$x_N\to1$。由 I_1, I_2 估计可得

$$|I_1(x_N)| \leqslant \delta_0\sqrt{\delta_N}, \quad |I_2(x_N)| \leqslant \frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N}} = \sqrt{\delta_N}, \quad I_3(x_N) = S(x_N) - A$$

则有

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \leqslant (\delta_0 + 1)\sqrt{\delta_N} + |S(x_N) - A|.$$

令 $N \to \infty$ 即得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$

注 实际上还有另一个简单的充分条件，即幂级数系数非负，也能保证结论成立

3.7.4 Taylor 级数与幂级数展开

定义 3.43 (幂级数展开/实解析函数)

设函数 $f(x)$ 在变集 $\{x\}$ 上定义，若存在幂级数在该变集上收敛向 $f(x)$，则称函数在 $\{x\}$ 上可以幂级数展开（может быть разложена в степенной ряд）

定义 3.44 (Taylor 级数)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，称系数定义为

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{3.52}$$

的幂级数为函数 $f(x)$ 的 Taylor 级数

定理 3.39 (带 Schlomilch-Roche 余项的 Taylor 公式)

设 $p > 0$，$f(x)$ 在点 a 处 n 阶可微，且在 $\mathring{U}_\delta(a)$ 内 $n+1$ 阶可微，则 $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a)$ 在至少存在一个 c，满足

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{[i]}(x)}{i!}(x-a)^i + R_{n+1}, R_{n+1}(x) = (\frac{x-a}{x-c})^p \frac{(x-c)^{n+1}}{n!p} f^{[n+1]}(c)$$

称 $f(x)$ 为 Taylor 公式，称 R_{n+1} 为 schlomilch-Roche 余项

证明 固定 $x \in \mathring{U}_\delta(a)$，令

$$g(t) = f(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{[i]}(t)}{i!}$$

又 $g(x) = f(x), g(a) = f(x) - R_{n+1}(x)$，由 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_\delta(a)$ 内 n+1 阶可微，则 $g(t)$ 在 $\mathring{U}_\delta(a)$ 内 n+1 阶可微，则有

$$g'(t) = f'(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{[i+1]}(t)}{i!}(x-t)^i - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{[i]}(t)}{i!} i(x-t)^{i-1} = \frac{f^{[n+1]}(t)}{n!}(x-t)^n$$

下设

$$h(t) = f(x) - g(t) - (\frac{x-t}{x-a})^p R_{n+1}(x)$$

则 $h(t)$ 在 (a, x) 或 (x, a) 上可微，则在 $[a, x]$ 或 $[x, a]$ 上连续，则有 $h(x) = 0, h(a) = f(x) - g(a) - R_{n+1}(x) = 0$，由 Rolle 定理在 (a, x) 或 (x, a) 上有 $\exists c : h'(c) = 0$，则

$$h'(c) = -g'(c) + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p} R_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f^{[n+1]}(c)}{n!}(x-c)^n = p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p} R_{n+1}(x)$$

注 (1) 当 $p = n+1$，称 $R_{n+1}(x)$ 为 Lagrange 余项

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{[n+1]}(c)$$

注 (2) 当 $p = 1$，称 $R_{n+1}(x)$ 为 Cauchy 余项

$$R_{n+1}(x) = (x-a)\frac{(x-c)^n}{n!} f^{[n+1]}(c) = (1-\theta)^n \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} f^{[n+1]}(a + \theta(x-a)), 0 < \theta < 1$$

注 (3) 当 $R_{n+1}(x)=o(x^n)$，称 $R_{n+1}(x)$ 为 Peano 余项

注 (4) 若 $a=0$，称 $f(x)$ 为 Maclaulin[3]公式

命题 3.21 (幂级数展开存在充要条件)

函数 $f(x)$ 在 $(-R,R)$（变集 $\{x\}$）上可以 Taylor 级数展开的充要条件为 Maclaurin 公式余项在给定区间（给定变集）上趋近于零

命题 3.22 (幂级数展开必要条件)

函数 $f(x)$ 在区间 $(-R;R)$ 上可以幂级数展开的必要条件为 $f(x)\in C^{\infty}(-R;R))$

证明 由推论第三类幂级数无穷逐项可微性 (3.25)，幂级数在包含 $(-R;R)$ 的收敛域内可以无穷多次逐项微分，得到的所有级数都在相同的收敛区间内收敛。另外由第三类幂级数和函数连续充分条件 (3.33)，通过任意多次逐项微分获得的级数的和为在给定收敛区间内的连续函数，则在 $(-R;R)$ 上连续，则命题即证

命题 3.23 (幂级数展开式唯一性)

若 $f(x)$ 在区间 $(-R;R)$ 上可以幂级数展开，则展开式唯一，为 Taylor 级数

证明 设 $f(x)$ 在区间 $(-R;R)$ 上可以展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$，由推论第三类幂级数无穷逐项可微性 (3.25) 对该级数逐项微分 n 次则有

$$f^{(n)}(x)=a_n n!+a_{n+1}(n+1)!x+\ldots$$

当 $x=0$ 得 $f^{(n)}(0)=a_n n!$，由此推出 Taylor 级数。这意味着 $f(x)$ 可以被展开的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ 的系数单值对应公式 (3.52)

例题 3.12 （2860/有理分式级数展开）求函数

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)\left(1-x^2\right)}$$

关于 x 的幂级数展开式

解 解一:

由表达式知其幂级数展开式在 $(-1,1)$ 成立，由在 $(-1,1)$ 成立的幂级数展开式:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, a_n=1(n=0,1,\cdots)$$

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n, b_{2k}=1, b_{2k+1}=0(k=0,1,\cdots)$$

二式相乘并再乘 x，得 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}$，其中系数为

$$c_{2k}=b_0+b_1+\cdots+b_{2k}=k+1=\frac{2k+1}{2}+\frac{1}{2},$$

$$c_{2k-1}=b_0+b_1+\cdots+b_{2k-1}=k=\frac{(2k-1)+1}{2}, k=0,1,\cdots,$$

于是有 $(-1<x<1)$ 时满足

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{4}\right)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2}+\frac{1-(-1)^n}{4}\right)x^n$$

解 解二:

利用部分分式分解得到

$$f(x)=-\frac{1}{4(1-x)}-\frac{1}{4(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)^2}$$

[3]科林 · 麦克劳林（Colin Maclaurin,1698.2-1746.6.14）苏格兰数学家，麦克劳林是 18 世纪英国最具有影响的数学家之一，1742 年出版了著作《流数论》

用二项式函数的 Taylor 级数将右边各项分别展开求和即得

命题 3.24 (级数代入级数正确性命题)

设函数 $\varphi(y)$ 在区间 $(-\rho;\rho)$ 上可展开为幂级数 $\varphi(y)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}h_m y^m$,，同时函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-R;R)$ 上可展开为幂级数 $y=f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 且 $|a_0|=|f(0)|<\rho$，则对于足够小的 $x,|f(x)|<\rho$ 有复合函数 $\varphi(f(x))$，且可在点 $x=0$ 的附近展开为幂级数

注 若该命题中 $\rho=+\infty$，则关于 $|a_0|$ 的条件是多余的，且此时复合函数 $\varphi(f(x))$ 幂级数展开式在 $(-R,R)$ 上成立

命题 3.25 (倒函数可展开性充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 邻近可以展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，且 $a_0\neq 0$, 则其倒函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 也可以在 $x=0$ 邻近展开为幂级数

证明 不妨设 $a_0=1$，且定义 $g(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，于是可将倒函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 看成 $\varphi(y)=\dfrac{1}{1-y}$ 和 $y=g(x)$ 的复合。这时 $\varphi(y)$ 在 $(-1,1)$ 上可展开为幂级数 $\varphi(y)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}y^m$, 而又从 $g(x)$ 的定义可知存在 $R>0$，使得 $g(x)$ 在 $(-R,R)$ 上可展开为幂级数，由于 $g(0)=0$，满足级数代入命题 (3.24) 的条件，由此即证

例题 3.13 （2881/幂级数倒函数展开）写出函数

$$f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$$

幂级数展开式中的若干项

解 按照级数代入级数的计算方法有

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}&=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+O\left(x^4\right)\right)}\\&=1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+O\left(x^4\right)\\&=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{24}+O\left(x^4\right)\end{aligned}$$

命题即证

命题 3.26 (第三类幂级数边界点逐项积分与逐项微分正确性命题)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛半径为正有限数 R，则下列命题（仅写出右端点）成立：

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛，则逐项积分公式

$$\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\ \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\ \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},x\in(-R,R),$$

在 $x=R$ 时仍然成立；

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nR^{n-1}$ 收敛则逐项求导公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_n x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1},x\in(-R,R),$$

在 $x=R$ 时仍然成立

证明 利用幂级数 Abel 第二定理 (3.37) 即证

例题 3.14 (2869/逐项积分展开) 逐项积分求 $f(x)=\arctan x$ 幂级数展开式，并求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

解 先写出 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$，且注意到展开式有效范围为 $(-1;1)$，也为右边幂级数收敛域。有幂级数逐项积分定理 (3.34)，当 $x\in(-1;1)$ 时可逐项积分得

$$f(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

由于此幂级数于 $x=\pm1$ 处为 Leibniz 级数，由 Leibniz 判别法 (2.18) 知幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛。因此用幂级数 Abel 第二定理 (3.37) 得幂级数和函数在 $[-1;1]$ 上连续，又 $f(x)=\arctan x$ 在 $[-1;1]$ 上的连续性，可见上述幂级数展开式在 $[-1;1]$ 上成立。

特别地，当 $x=1$ 时就求得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\dfrac{\pi}{4}$

例题 3.15 (2908/逐项微分展开) 用逐项微分法计算级数

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

解 解一:

由 Cauchy-Hadamard 公式 (3.22) 易知级数收敛半径为 $+\infty$，则和函数 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，逐项求导得

$$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

再逐项求导一次得 $S''(x)-S(x)=0$，由线性常微分方程通解特征值方法即得通解

$$S(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

利用 $S(0)=1,S'(0)=0$，即得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，则解为 $S(x)=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)=\cosh x$

解 解二:

在解一中逐项求导得 $S'(x)$ 级数展开后，由 e^x 幂级数展开式得 $S'(x)+S(x)=\mathrm{e}^x$，两边同乘 e^x 得到 $[\mathrm{e}^x S(x)]'=\mathrm{e}^{2x}$，因此有

$$\mathrm{e}^x S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$$

再利用 $S(0)=1$ 即得相同答案

命题 3.27 (Bernstein 定理)

设 $f(x)\in C^{(\infty)}[-1;1]$，且当 $x\in[-1;1]$ 时 $f^{(n)}(x)\geqslant 0(n=0,1,2,\cdots)$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(-1;1)$ 内可展开为幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

证明 $f(x)$ 的 Taylor 公式为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$，其中余项 $R_n(x)$ 由定义有 $R_n^{(k)}(0)=0(k=1,2,\cdots,n)$ 和 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$，分部积分即得:

$$\begin{aligned}
R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k&=\int_0^x R_n'(t)\mathrm{d}t\\
&=(t-x)R_n'(t)|_0^x+\int_0^x R_n''(t)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x R_n''(t)(x-t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int_0^x R_n'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t=\cdots=\frac{1}{n!}\int_0^x R_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

在最后的积分式中作代换 $t=ux$，当 t 从 0 到 x 时，u 从 0 到 1，即得积分型余项为

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ux)(1-u)^n\,\mathrm{d}u$$

又由题设条件知每一个 $f^{(n)}(x)(n=0,1,\cdots)$ 都单调递增，则有

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(u)(1-u)^n\,\mathrm{d}u=x^{n+1}R_n(1)$$

又从

$$f(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+R_n(1)$$

和所有的 $f^{(k)}(0)\geqslant 0(k=0,1,\cdots,n)$ 可推出 $0\leqslant R_n(1)\leqslant f(1)$，因此得到 $0\leqslant R_n(x)\leqslant x^{n+1}f(1)$ ，所以在 $x\in[0;1)$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，这表明 $f(x)$ 在 $[0;1)$ 上可展开为幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

利用幂级数收敛域对称性，该展开式在 $(-1;1)$ 上成立

例题 3.16 （2874/级数展开求高阶导数）求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ 的 n 阶导函数

解 利用展开式 $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\dfrac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots$ 唯一性写出

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(x+h)^2}-\mathrm{e}^{x^2}&=\mathrm{e}^{x^2}\left(\mathrm{e}^{2xh+h^2}-1\right)\\&=\mathrm{e}^{x^2}\left[\left(2xh+h^2\right)+\frac{1}{2!}\left(2xh+h^2\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(2xh+h^2\right)^n+\cdots\right]\end{aligned}$$

合并右边的 h^n 项的系数

$$\mathrm{e}^{x^2}\left[\frac{(2x)^n}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{C}_{n-1}^{1}(2x)^{n-2}+\frac{1}{(n-2)!}\mathrm{C}_{n-2}^{2}(2x)^{n-4}+\cdots\right]$$

然后乘 $n!$ 即得

$$\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)^{(n)}=\mathrm{e}^{x^2}\left[(2x)^n+n(n-1)(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\right]$$

其中方括号内各项的 $(2x)$ 的指数相继减 2 直到降至 1 或 0

推论 3.27 (实解析函数的幂级数分解方法)

(1) 计算所有阶导数 $f^{(n)}(x_0)\,,n\in\mathbb{N}$ 并借助 Taylor 级数的定义

(2) 分解成初等函数的 Taylor(Maclaurin) 级数的组合

(3) 应用无穷递减几何级数之和公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q}\qquad\forall q\in(-1,1)$$

(4) 级数的逐项积分和微分

♡

3.7.5 幂级数组合性质

定义 3.45 (母函数/生成函数)

设 $\{a_n\}$ 为一个给定序列，称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

为 $\{a_n\}$ 的母函数或生成函数

♣

例题 3.17 （2895/Legendre 多项式母函数）把函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}(|x|<1)$$

展开为幂级数

解 利用 $m=-\frac{1}{2}$ 的二项式 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的幂级数展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}}=1+\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}y^n+\cdots(|y|<1)$$

然后用 $y=2tx-x^2$ 代入，则当 $|x|^2+2|tx|<1$ 时可级数代入得到关于 x 的幂级数展开式，其中 t 为参数。则有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2tx-x^2)}}=1+\frac{1}{2}\left(2tx-x^2\right)+\frac{3}{8}\left(2tx-x^2\right)^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(2tx-x^2\right)^n+\cdots$$

然后计算右边 x^n 项系数为

$$\frac{(2n-2k)!}{2^{2(n-k)}[(n-k)!]^2}\left(2tx-x^2\right)^{n-k}(k=0,1,\cdots,m),$$

其中 m 取 $\frac{n}{2}$ 或 $\frac{n-1}{2}$ 中的整数，由二项式展开可见上式中的 x^n 项的系数为

$$\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n2^{n-2k}[(n-k)!]^2}\mathrm{C}_{n-k}^k(2t)^{n-2k}=\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n(n-k)!k!(n-2k)!}t^{n-2k}(k=0,1,\cdots,m)$$

则有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n$，其中通项系数 $P_n(t)$ 为如下表示的 n 次多项式：

$$P_n(t)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n(n-k)!k!(n-2k)!}t^{n-2k}$$

其中 m 取 $\frac{n}{2}$ 和 $\frac{n-1}{2}$ 中的整数

注 计算

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(t^2-1\right)^n=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^kt^{2n-2k}\right]=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}t^{n-2k}$$

然后再除以 $2^nn!$ 就得到题目中 $P_n(t)$，则有 Legendre 多项式：

$$P_n(t)=\frac{1}{2^nn!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\left(t^2-1\right)^n\right]\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

因此本题的 $f(x)$ 称为 Legendre 多项式母函数

第 4 章 基本数学工具

4.1 有限级数的性质

性质

- 设 $m \leqslant n < p$ 是整数，对应于每个整数 $m \leqslant i \leqslant p$，设 a_i 是实数。那么有

$$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{p} a_i = \sum_{i=m}^{p} a_i$$

- 设 $m \leqslant n$ 是整数，k 是另一个整数，并设 a_i 是对应于每个整数 $m \leqslant i \leqslant n$ 所指定的实数，那么有

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$

- （结合律、线性可加性）设 $m \leqslant n$ 是整数，并设 a_i, b_i 是对应于每个整数 $m \leqslant i \leqslant n$ 的实数，那么有

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=m}^{n} b_i\right)$$

- （分配律、线性齐次性）设 $m \leqslant n$ 是整数，并设 a_i 是对应于每个整数 $m \leqslant i \leqslant n$ 的实数，设 c 是实数，那么有

$$\sum_{i=m}^{n} (ca_i) = c\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)$$

- （关于有限级数的三角形不等式）设 $m \leqslant n$ 是整数，并设 a_i 是对应于每个整数 $m \leqslant i \leqslant n$ 的实数，那么有

$$\left|\sum_{i=m}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=m}^{n} |a_i|$$

- （有限级数的比较法则）设 $m \leqslant n$ 是整数，a_i 是对应于每个整数 $m \leqslant i \leqslant n$ 的实数。并设对于一切 $m \leqslant i \leqslant n, a_i \leqslant b_i$，那么有

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=m}^{n} b_i$$

4.2 积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

4.3 和差化积

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

4.4 常用初等函数 taylor 级数

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^n}{n!}+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots \qquad (-1<x\leqslant 1)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots+\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}+\cdots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

4.5 常用二项式函数 Taylor 级数 (биномиальный ряд)

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-\cdots+(-1)^n(n+1)x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots \qquad (-1<x\leqslant 1)$$

Bibliography

[1] 陶哲轩. 陶哲轩实分析 [M]. 人民邮电出版社, 2008.

[2] 卓里奇. 数学分析: 第二卷 [M]. 高等教育出版社, 2019.

[3] Г.И. 阿黑波夫. 数学分析讲义 [M]. 高等教育出版社,2006.

[4] F.M. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程（第 2 卷）[M]. 高等教育出版社, 2006.

[5] 沐定夷, 谢惠民. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第一册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[6] 沐定夷, 谢惠民. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第二册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[7] 凯莱. 一般拓扑学 [M]. 科学出版社, 2010.

[8] Демидович Б П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу[M]. Изд-во" Наука, 1977.

[9] Холомеева Анна Андреевна. Математический анализ -3, 2021.

[10] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк "Основы математического анализа части 1, 2