# 数学物理方程及其应用

赵健凯　编著

April 12, 2023

任何建议及错误信息请发送至邮箱

243791757@qq.com

一切问题都可以转化为数学问题，一切数学问题都可以转化为代数问题，而一切代数问题又都可以转化为方程问题。因此，一旦解决了方程问题，一切问题将迎刃而解！

R. Descartes 笛卡儿

# Contents

# 1 二阶偏微分方程

## 1.1 基本概念

### 1.1.1 定解问题及其适定性

**定义 1.1.** （偏微分方程解的类型）若 $u\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 在区域 $V \subset \mathbb{R}^n$ 内存在方程中各阶连续偏导数，并使方程

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}\right)=0$$

成为恒等式。其中 $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$

则称函数 $u\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 为方程在区域 $V$ 内的**（古典）解 *(classical solution)***。称 $m$ 阶偏微分方程的含有 $m$ 个任意函数的解为方程的**通解 *(gereral solution)***，称不含任意函数或任意常数的解为方程的一个**特解 *(particular solution)***

**定义 1.2.** （定解问题）通常，称反映系统内部作用导出的偏微分方程为泛定方程，称确定运动的制约条件为**定解条件**（主要分为初始条件，边界条件和衔接条件）。称泛定方程配以适当的定解条件构成一个偏微分方程的**定解问题**

**定义 1.3.** （初始条件）称给定未知函数 $u$ 及关于某个自变量 $t$ 的若干阶偏导函数在同一时刻 $t=t_0$ 的值为**初始条件 *(initial condition)***。若方程中关于 $t$ 的最高阶导数为 $m$ 阶，则应给出 $u, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \cdots, \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}$ 在 $t=t_0$ 的值

**定义 1.4.** （边界条件）给定未知函数 $u$ 及关于某个自变量 $t$ 的若干阶偏导函数。设 $0 \leqslant x \leqslant l$，则称给定 $u$ 在端点的值的条件：

$$\left.u\right|_{x=0}=\mu_1(t)$$

为**第一类边界条件 *(первое краевое условие)*** 或 ***Dirichlet* 边界条件**。若 $\mu_1(t) \equiv 0$，则称条件为**第一类齐次边界条件**

称给定 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 在端点的值的条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\nu_1(t)$$

为**第二类边界条件 *(второе краевое условие)*** 或 ***Neumann* 条件**。若 $\nu_1(t) \equiv 0$，则称条件为**第二类齐次边界条件**

称给定 $u$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 在端点的线性组合的值的条件：

$$\left.\left(\alpha u+\beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{x=0}=F(t)$$

为**第三类边界条件** ***(третье краевое условие)***。若 $F(t) \equiv 0$，则称条件为**第三类齐次边界条件**

**注意 1.1.** （边界条件统一形式）对于右端点 $x = l$，可同样导出这三类边界条件，与左端点不同的是需在 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 项前添负号。若用 $n$ 表示端点的外法向，则左右两端的三类边界条件可统一表示为 $u$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的线性组合

$$\left.\left(\alpha_i u + \beta_i \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{x=x_i} = F_i(t), \quad i = 1, 2$$

**注意 1.2.** （边界条件）对于边界条件可归纳如下：

$$x = 0, 0 \leqslant t \leqslant T \quad \begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t)(\text{第一类边界条件}) \\ u_x(0,t) = \nu_1(t) \ (\text{第二类边界条件}) \\ u_x(0,t) = \lambda_1 \left[u(l,t) - \theta_1(t)\right], \lambda_1 > 0 \ (\text{第三类边界条件}) \end{cases}$$

$$x = l, 0 \leqslant t \leqslant T \quad \begin{cases} u(l,t) = \mu_2(t)(\text{第一类边界条件}) \\ u_x(l,t) = \nu_2(t) \ (\text{第二类边界条件}) \\ u_x(l,t) = -\lambda_2 \left[u(l,t) - \theta_2(t)\right], \lambda_2 > 0 \ (\text{第三类边界条件}) \end{cases}$$

**定义 1.5.** （定解问题适定性）若泛定方程在区域 $V$ 内的解以及其在定解条件中出现的偏导数，都连续到 $V$ 的边界且在边界上满足定解条件，则称此解为定解问题的（古典）解

若一个定解问题的解存在、唯一和稳定（这里指当定解条件的偏差在一定的小范围时，相应的定解问题解的偏差可以控制在任意事先给定的小范围内），则称此定解问题为**适定问题** ***(well-posed problem)***

**例题 1.1.** （不适定问题）定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, y > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \dfrac{1}{n} \sin nx, \quad n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

不适定

**解**. 定解问题有唯一解 $u(x,y) = \dfrac{1}{n^2} \sin nx \operatorname{sh} ny$，当 $n \to +\infty$ 时，初始条件一致趋于 0，但对任意固定的 $y$ 当 $n \to +\infty$ 时，解 $u(x,y)$ 无界，因而解不稳定。则该定解问题不适定 □

**注**：该著名的例子在 1917 年由 Hadamard 提出

**注意 1.3.** 下面将讨论如下类型的定解问题：

（第一类边值问题/*Первая краевая задача*）
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) = \mu_1(t), 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(l,t) = \mu_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

（第二类边值问题/*Вторая краевая задача*）
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t \leqslant T \\ u_x(0,t) = \mu_1(t), 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_x(l,t) = \mu_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

（射线问题/*Задача на полупрямой*）
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), x > 0, 0 < t \leqslant T; \\ u_x(0,t) = \mu(t), 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) = \varphi(x), x \geqslant 0. \end{cases}$$

（*Cauchy* 问题/*Задача Коши*）
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < +\infty, 0 < t \leqslant T \\ u(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

### 1.1.2 二阶偏微分方程分类

**定义 1.6.** （二阶线性偏微分方程通式）$n$ 个自变量的二阶线性偏微分方程可表示为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1, \cdots, x_n\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j\left(x_1, \cdots, x_n\right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c\left(x_1, \cdots, x_n\right) u = f\left(x_1, \cdots, x_n\right) \tag{1.1}$$

当系数 $a_{ij}, b_j, c$ 均为常数时，称该方程为**常系数线性偏微分方程**，否则称**变系数线性偏微分方程**，且总可假定 $a_{ij} = a_{ji}$。称方程中不含未知函数的项 $f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ 为非齐次项，当 $f \equiv 0$ 时称方程**齐次 *(homogeneous)***，否则称方程**非齐次 *(non-homogeneous)***

特别地，二阶双变量线性偏微分方程可表示为

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x,y) \tag{1.2}$$

其中系数 $a_{11}, a_{12}, a_{22}$ 不同时为 *0*，省略已知函数 $a_{ij}, b_j (i,j = 1,2)$ 和 $c$ 的自变量 $(x,y)$

**例题 1.2.** （二阶线性双变量偏微分方程例子）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\quad\text{（一维有源波动方程）}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial u}{\partial t}=0\quad\text{（一维阻尼波动方程）}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial u}{\partial t}+cu=0\text{(电报方程）}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\quad\text{（一维有源热传导方程）}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\quad\text{（二维 Laplace 方程）}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)\quad\text{（二维 Poisson 方程）}$$

**定理 1.1.** （二阶线性偏微分方程化简）若 $\varphi(x,y)=h$（常数）为一阶常微分方程 $a(x,y)\mathrm{d}y-b(x,y)\mathrm{d}x=0$ 在区域 $D$ 内的隐式通解（积分曲线族），则 $\xi=\varphi(x,y)$ 为一阶线性偏微分方程 $a(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+b(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ 在区域 $D$ 上的一个解

**证明.** 设 $\varphi(x,y)=h$ 为方程 $a(x,y)\mathrm{d}y-b(x,y)\mathrm{d}x=0$ 在 $D$ 内的隐式通解，则过 $D$ 内一点 $(x_0,y_0)$ 有一条积分曲线 $\Gamma_0:\varphi(x,y)=\varphi(x_0,y_0)=h_0$，此隐式解满足方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{b(x,y)}$$

又沿此积分曲线 $\Gamma_0$ 有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y=0$$

故在 $\Gamma_0$ 上有

$$a(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

由于 $(x_0,y_0)$ 为 $D$ 内任意一点，则 $\xi=\varphi(x,y)$ 为一阶线性偏微分方程 $a(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+b(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ 在 $D$ 上的解 □

**注：** 定理的逆命题也成立

**定义 1.7.** （二阶线性偏微分方程特征曲线）设有自变量的变量代换

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}\tag{1.3}$$

其中函数 $\varphi,\psi$ 有二阶连续偏导，*Jacobi* 行列式

$$J=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

以保证函数 $\varphi,\psi$ 相互独立且有反函数存在。未知函数 $u$ 作为新的自变量为 $\xi,\eta$ 的函数，仍记为 $u(\xi,\eta)$，则方程 *(1.2)* 变为一个新的二阶线性偏微分方程

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+B_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu=0 \tag{1.4}$$

其中二阶偏导数项的系数为

$$\begin{aligned}A_{11}&=a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\\ A_{12}&=a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ A_{22}&=a_{11}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\end{aligned} \tag{1.5}$$

而其他系数为

$$\begin{aligned}B_1&=a_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ B_2&=a_{11}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+b_2\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ C&=c(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\end{aligned} \tag{1.6}$$

为化简方程中的二阶偏导数部分，由式 *(1.5)* 可见，若选取 $\varphi(x,y)$ 或 $\psi(x,y)$ 为一阶非线性偏微分方程

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0 \tag{1.7}$$

的解，则新方程 *(1.4)* 中 $A_{11}$ 与 $A_{22}$ 至少一个为 *0*，方程化简。则一阶偏微分方程 *(1.7)* 的求解归结为一阶常微分方程

$$a_{11}(\,\mathrm{d}y)^2-2a_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+a_{22}(\,\mathrm{d}x)^2=0 \tag{1.8}$$

的求解。

定理 *(1.1)* 揭示了常微分方程 *(1.8)* 与二阶线性偏微分方程 *(1.2)* 之间的关系，提供了化简二阶线性偏微分方程的具体方法。称一阶常微分方程 *(1.8)* 为二阶线性偏微分方程 *(1.2)* 的**特征方程 *(characteristic equation)***，称特征方程的积分曲线为方程 *(1.2)* 的**特征曲线 *(characteristic curve)***

**注意 1.4.** （二阶线性双变量偏微分方程通式）二阶线性双变量偏微分方程通式也经常记

为：

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

**定义 1.8.** （二阶线性双变量偏微分方程判别式）特征方程 *(1.8)* 的解取决于其判别式

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$$

由 *(1.5)* 有，二阶线性偏微分方程 *(1.2)* 经过变量代换 *(1.3)* 后得到的新方程 *(1.4)* 的判别式

$$A_{12}^2-A_{11}A_{22}=J^2\Delta$$

当 *Jacobi* 行列式 $J\neq 0$ 时，在自变量的变量代换下，判别式 $\Delta$ 的符号不变，据此可将二阶线性双变量偏微分方程分成三类：若在点 $M(x,y)$ 满足：

*1.*$\Delta=0$，则称方程为**抛物型（偏微分）方程** ***(partial differential equation of parabolic type/параболический тип)***，形式上为

$$u_{xx}=\Phi$$

*2.*$\Delta>0$，则称方程为**双曲型（偏微分）方程** ***(partial differential equation of hyperbolic type/гиперболический тип)***，形式上为

$$u_{xx}-u_{yy}=\Phi\text{ 或}u_{xy}=\Phi$$

*3.*$\Delta<0$，则称方程为**椭圆型（偏微分）方程** ***(partial differential equation of elliptic type/эллиптический тип)***，形式上为

$$u_{xx}+u_{yy}=\Phi$$

其中 $\Phi$ 表示所有不含二阶偏导数的项

若在平面区域 $D$ 内有 $\Delta>0$ 或 $\Delta=0$，或 $\Delta<0$，则对应地称方程在区域 $D$ 内为双曲型、抛物型或椭圆型方程。若方程在区域 $D$ 的一部分是双曲型的，另一部分是椭圆型的，而在交界线上是抛物型的，则称该方程在 $D$ 内为**混合型（偏微分）方程** ***(partial differential equation of mixed type***

**定义 1.9.** （二阶线性双变量偏微分方程标准形）*1.* 当 $\Delta=0$ 时，由特征方程 *(1.8)* 仅得一个一阶线性常微分方程。设 $a_{11}\neq 0$，方程化简为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

解得一族特征曲线 $\varphi(x,y)=h$。任取二元函数 $\psi(x,y)$ 使 $J=\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\neq 0$。令 $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$，得 $A_{11}=0,A_{22}\neq 0$。由

$$a_{12}^2=a_{11}a_{22},\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{a_{22}}{a_{11}}$$

从 (1.5) 可得

$$A_{12}=\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(a_{11}\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0$$

新方程 (1.4) 化简为

$$\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{A_{22}}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu\right)=0,$$

称该方程为抛物型方程的标准形

2. 当 $\boldsymbol{\Delta}>0$ 时，特征方程 (1.8) 可分解为两个一阶常微分方程。设 $a_{11}\neq 0$，这时有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}\quad 和 \quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

解得两族特征曲线 $\varphi(x,y)=h_1$ 和 $\psi(x,y)=h_2$。令 $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$，由定理 (1.1) 和式 (1.5) 得 $A_{11}=A_{22}=0$，新方程 (1.4) 化简为

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2A_{12}}\left(B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu\right)=0$$

称该方程为双曲型方程的标准形

3. 当 $\Delta<0$ 时，特征方程 (1.8) 只能在复数域内分解成两个一阶方程。设 $a_{11}\neq 0$，相应的一阶方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}\ 和\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}$$

此时不存在实特征线，特征方程 (1.8) 的隐式通解为 $\varphi(x,y)\pm\mathrm{i}\psi(x,y)=h$。为避免引入复变量，令 $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$，由定理 (1.1) 将 $z=\varphi(x,y)\pm\mathrm{i}\psi(x,y)$ 代入方程 (1.7)，分别取实、虚部得 $A_{11}=A_{22},A_{12}=0$，则新方程 (1.4) 化简为

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{A_{11}}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu\right)=0$$

称该方程为椭圆型方程的标准形

**例题 1.3.** （*Tricomi* 方程）求空气动力学中的 *Tricomi* 方程的标准形

$$yu_{xx}+u_{yy}=0$$

**解.** 判别式 $\Delta=-y$，特征方程为 $y(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}x)^2=0$

当 $y<0$ 时，方程为双曲型。特征方程分解为 $(\mathrm{d}x+\sqrt{-y}\,\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x-\sqrt{-y}\,\mathrm{d}y)=0$，解得两族特征曲线

$$x\mp\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=c$$

变换

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\\ \eta=x+\dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\end{cases}$$

可得方程的标准形

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(u_\eta-u_\xi\right)=0.$$

当 $y>0$ 时，方程为椭圆型。特征方程分解为 $(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x-\mathrm{i}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y)=0$，解得两族复特征曲线

$$x\pm\mathrm{i}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=c$$

令 $\xi=x,\eta=\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$，代入原方程得方程标准形

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u_\eta=0$$

当 $y=0$ 时，方程为抛物型。综上所述，在全平面上 Tricomi 方程为混合型方程 □

**注：**1923 年意大利的 Tricomi,F.G. 首先研究了该问题，因此也称为 Tricomi 问题

**定义 1.10.** （二阶 *n* 元偏微分方程分类）利用二次型的概念对 *n* 个自变量的方程的分类化简 *(1.1)* 进行推广，设 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，其二阶导数部分记为

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{x}^0\right)\left.\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}^0}$$

对应的二次型记为

$$q(\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{x}^0\right)\lambda_i\lambda_j$$

由二次型理论知存在线性变换

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}=\left(d_{ij}\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right)_{n\times n}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$$

其中变换矩阵 $\left(d_{ij}\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right)_{n\times n}$ 非退化，使 $q(\boldsymbol{\lambda})$ 化为标准形

$$q(\boldsymbol{\lambda})=Q(\boldsymbol{\mu})=\sum_{j=1}^{k}\mu_j^2-\sum_{j=k+1}^{k+l}\mu_j^2,\quad k+l\leqslant n$$

变换矩阵 $\left(d_{ij}\left(\boldsymbol{x}^{0}\right)\right)_{n\times n}$ 不唯一，但正负惯性指数 $k,l$ 唯一确定。若在 $x^{0}$ 点附近代换自变量

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}=\left(d_{ij}\left(\boldsymbol{x}^{0}\right)\right)_{n\times n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

则在 $x^{0}$ 点方程 (1.1) 的二阶导数部分化简为

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}\bigg|_{\xi^0}-\sum_{j=k+1}^{k+l}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}\bigg|_{\xi^0},\quad k+l\leqslant n$$

当 $k+l=n,kl=0$ 时称方程 (1.1) 在 $\boldsymbol{x}^{0}$ 点为抛物型方程；当 $k+l=n,kl>0$ 时称方程 (1.1) 在 $x^{0}$ 点为双曲型方程，特别地，当 $k=n-1$（或 $l=n-1$）时称方程 (1.1) 为狭义双曲型方程；当 $k+l<n$ 时称方程 (1.1) 在 $\boldsymbol{x}^{0}$ 点为椭圆型方程，特别地，当 $k=n-1$（或 $l=n-1$）时称方程 (1.1) 为狭义椭圆型方程

**定义 1.11.** （二阶 $n$ 元常系数偏微分方程）若方程 (1.1) 为常系数的，则在 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中为同一类型，$d_{ij}(\boldsymbol{x})=d_{ij}$ 与 $x$ 无关，作自变量代换

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=D\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\quad D=(d_{ij}),\quad \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

常系数二阶线性方程 (1.1) 化为标准形

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}-\sum_{j=k+1}^{k+l}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}+\sum_{j=1}^{n}B_j\frac{\partial u}{\partial\xi_j^2}+Cu=0$$

### 1.1.3 叠加原理与 Duhamel 原理

**定义 1.12.** （二阶 $n$ 元偏微分方程简化记法）$n$ 个自变量的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu=f$$

引入偏微分算子

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial x_j}+c \tag{1.9}$$

则可简单表示为 $Lu(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

显然二阶偏微分算子 (1.9) 为 $C^2$ 到 $C$ 的线性算子，若记

$$L_1=\lim_{t\to 0},\quad L_2=\lim_{t\to 0}\frac{\partial}{\partial t},\quad L_3=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha+\beta\frac{\partial}{\partial n}\right)$$

则初始条件、边界条件均可表示为线性算子形式：$L_j u(\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})$

**定理 1.2.** （叠加原理）设 $L$ 为关于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的任意阶线性微分算子（常或偏），则有下列命题成立：

*(1)*（有限叠加原理）若 $u_j(\boldsymbol{x})$ 满足 $Lu_j(\boldsymbol{x})=f_j(\boldsymbol{x})(j=1,2,\cdots,m)$，则当 $u(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j u_j(\boldsymbol{x})$ 时有 $Lu(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(\boldsymbol{x}),\lambda_j\in\Lambda,j=1,2,\cdots,m$

*(2)*（级数叠加原理）若 $u_j(\boldsymbol{x})$ 满足 $Lu_j(\boldsymbol{x})=f_j(\boldsymbol{x})(j=1,2,\cdots)$，则当 $u(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j u_j(\boldsymbol{x})$ 时有 $Lu(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j f_j(\boldsymbol{x});\lambda_j\in\Lambda,j=1,2,\cdots$

*(3)*（积分叠加原理）若 $u(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ 满足 $Lu(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})=f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi}\in V$，则当 $U(\boldsymbol{x})=\int\limits_V\lambda(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ 时有 $LU(\boldsymbol{x})=\int\limits_V\lambda(\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\lambda(\boldsymbol{\xi})\in\Lambda,\boldsymbol{\xi}\in V$

**注 1**：有限叠加原理为线性算子定义的直接推广，但级数叠加原理及积分叠加原理分别要求有关函数项级数、含参量积分收敛，算子 $L$ 与求和号、积分号可交换次序。在经典意义下这些条件要求很高，实际问题不一定能满足，但是在推广意义下这种交换是可行的。今后将不受限制地使用这些叠加原理

**注 2**：在物理问题中，方程或定解条件中的非齐次项通常反映引起物理过程的源，叠加原理则说明多个源共同作用的结果等于各个源单独作用的总和，这在物理上被称为独立作用原理，为线性问题的基本特征。利用叠加原理总可以把一个较复杂的线性问题分解成若干简单线性问题来求解

**引理 1.1.** （*Leibniz* 法则变式）设 $g(t,s)$ 和 $g_t(t,s)$ 在矩形区域上连续，则有

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t,s)ds\right)=g(t,t)+\int_0^t g_t(t,s)ds \tag{1.10}$$

**证明.** 设 $H(t,y)$ 定义为

$$H(t,y)=\int_0^y g(t,s)ds$$

计算 $\frac{d}{dt}H(t,t)$，即式 (1.10) 的左端。令 $y(t)=t$，注意到

$$\frac{d}{dt}H(t,t)=\frac{d}{dt}H(t,y(t))=H_t(t,t)\frac{dt}{dt}+H_y(t,y(t))\frac{dy}{dt}=H_t(t,t)+H_y(t,t) \tag{1.11}$$

由 Leibniz 法则有

$$H_t(t,y)=\int_0^y g_t(t,s)ds$$

由对上限求导等于被积函数在上限取值，即由

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(s)ds=f(x)$$

有 $H_y(t,y)=g(t,y)$，综上有

$$H_y(t,t)=g(t,t),H_t(t,t)=\int_0^t g_t(t,s)ds$$

则由式 (1.11) 得式 (1.10) □

**定理 1.3.** （*Duhamel* 原理[1]）设 $h(x,t)$ 为 $C^2$ 函数，$0\leqslant x\leqslant L,t\geqslant 0$，对每个 $s\geqslant 0$，问题

$$\begin{cases} v_t=kv_{xx}, \quad 0\leqslant x\leqslant L,t\geqslant s \\ v(0,t;s)=0, \quad v(L,t;s)=0 \\ v(x,s;s)=h(x,s) \end{cases} \tag{1.12}$$

有 $C^2$ 解 $v(x,t;s)$，其中 $v(x,t;s),v_t(x,t;s)$ 和 $v_{xx}(x,t;s)$ 关于 $s$（与 $(x,t)$ 联合）也连续，则问题

$$\begin{cases} u_t-ku_{xx}=h(x,t), \quad 0\leqslant x\leqslant L,t\geqslant s \\ u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0 \\ u(x,0)=0 \end{cases} \tag{1.13}$$

的解由下式给出

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;s)ds \tag{1.14}$$

*证明*. 由 $v(x,t;s)$ 满足 (1.12) 的边界条件，则有由 (1.14) 定义的函数 $u(x,t)$ 满足 (1.13) 的边界条件，另外显然满足初始条件 $u(x,0)=0$。现对 $g(t,s)=v(x,t;s)$ 应用引理 (1.1)，其中 $x$ 固定，则由 (1.10) 得

$$u_t(x,t)=v(x,t;t)+\int_0^t v_t(x,t;s)ds=h(x,t)+\int_0^t kv_{xx}(x,t;s)ds \tag{1.15}$$

其中后一个等式对 $s=t$ 利用了 (1.12) 的边界条件，以及利用了 (1.12) 的泛定方程

对 (1.14) 应用 Leibniz 法则得

$$u_{xx}(x,t)=\int_0^t v_{xx}(x,t,s)ds$$

又由 (1.15) 得

$$u_t(x,t)=h(x,t)+\int_0^t kv_{xx}(x,t;s)ds=h(x,t)+ku_{xx}(x,t)$$

则 $u(x,t)$ 满足 (1.13) 的泛定方程。综上，$u(x,t)$ 为问题 (1.13) 的一个 $C^2$ 解 □

[1] 让·玛丽·康斯坦特·杜哈梅尔 (Jean Marie Constant Duhamel,1797.2.5-1872.4.29) 法国数学家，他研究偏微分方程，并将他的方法应用于热理论、力学和声学。巴黎综合理工学院的学生用他的名字为一杯加糖的水命名，因为在每节课开始时，他习惯于用糖水准备一种最初几乎听不见的声音总结上一课的内容，但这种声音一点一点地上升

**注：**值得一提的是，未证明唯一性，当边界条件不为非齐次边界条件时，唯一性情况有所不同。下面直接叙述更一般的齐次化原理，不再给出证明

**定理 1.4.** （齐次化原理/冲量原理）设 $L$ 为关于 $t$ 与 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的线性偏微分算子，其中关于 $t$ 的最高阶导数不超过 $m-1$ 阶。若 $w(t, \boldsymbol{x}; \tau)$ 满足齐次方程 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m w}{\partial t^m} = Lw, \quad t > \tau > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \\ w|_{t=\tau} = \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \cdots = \left.\dfrac{\partial^{m-2} w}{\partial t^{m-2}}\right|_{t=\tau} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=\tau} = f(\tau, \boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{1.16}$$

则

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int_0^t w(t, \boldsymbol{x}; \tau) \mathrm{d}\tau \tag{1.17}$$

为非齐次方程 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} = Lu + f(t, \boldsymbol{x}), \quad t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \\ u|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cdots = \left.\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

的解

**注 1：**定理不难直接验证，因为 Cauchy 问题为适定问题，式 (1.17) 给出了 Cauchy 问题 (1.18) 的唯一解. 当 $x \in V \subset \mathbf{R}^n$，齐次化原理仍然成立，仅需在 (1.16) 和 (1.18) 中分别增加齐次边界条件 $L_1 w|_{\partial V} = 0$ 和 $L_1 u|_{\partial V} = 0$，$L_1$ 为关于 $x$ 的线性偏微分算子。这即是混合问题的齐次化原理

**注 2：**由齐次化原理知，今后对线性发展方程定解问题的讨论可主要集中于齐次方程

#### 1.1.4 Sturm-Liouville 边值问题

**定义 1.13.** （*Sturm-Liouville* 边值问题）设方程组

$$\begin{cases} Ly \equiv \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy(x)}{dx}\right) - q(x)y(x) = -\lambda y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.19) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 & (1.20) \end{cases}$$

其中 $p(x) \in C^1[0; l], q(x) \in C[0; l], (\forall x \in [0; l]) : p(x) > 0$，且 $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1, 2$，另外 $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$

若对于 $\lambda_1$ 存在 *(1.19)(1.20)* 非零解 $y_1(x) \neq 0$ 解，则称 $\lambda_1$ 为特征值 *(собственное значение)*，称 $y_1(x)$ 为特征函数 *(собственная функция)*，称求解所有特征值与特征函数为 *Sturm-Liouville* 边值问题 *(задача Штурма-Лиувилля)*

**注意 1.5.** （*Sturm-Liouville* 边值问题）对于特征函数 $y_1(x) \neq 0$ 满足 $(\forall c \in \mathbb{R})$ 都有 $y_1(x)$ 也为特征函数

**定理 1.5.** （*Sturm-Liouville* 边值问题特征值与特征函数实性）*Sturm-Liouville* 边值问题

$$\begin{cases} Ly \equiv \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy(x)}{dx}\right) - q(x)y(x) = -\lambda y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.21) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 & (1.22) \end{cases}$$

其中 $p(x) \in C^1[0;l], q(x) \in C[0;l], (\forall x \in [0;l]) : p(x) > 0$，且 $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1, 2$，另外 $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$

其所有特征值与特征函数均为实的

**证明.** 设 $\lambda_1$ 为特征值，$y_1(x)$ 为对应的特征函数。设 $\lambda_1 = a + ib, y_1(x) = u(x) + iv(x)$，则由方程 (1.21) 有 $Lu + iLv = -(a+ib)(u(x) + iv(x)) = -au + bv - i(bu + av)$，则有

$$Lu = -au(x) + bv(x), \quad Lv = -bu(x) - av(x) \tag{1.23}$$

在 (1.23) 第一个等式两端同乘 $v(x)$，在 (1.23) 第二个等式两端同乘 $u(x)$，再积分即得

$$\int_0^l (v(x)Lu - u(x)Lv)dx = b\int_0^l \left(u^2(x) + v^2(x)\right) dx$$

由 Green 公式 $\int_0^l (v(x)Lu - u(x)Lv)dx = 0$ 则有 $b = 0$，则 $y_1(x) \in \mathbb{R}$ □

**定理 1.6.** （*Sturm-Liouville* 边值问题特征函数线性无关性）*Sturm-Liouville* 边值问题

$$\begin{cases} Ly \equiv \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy(x)}{dx}\right) - q(x)y(x) = -\lambda y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.24) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 & (1.25) \end{cases}$$

其中 $p(x) \in C^1[0;l], q(x) \in C[0;l], (\forall x \in [0;l]) : p(x) > 0$，且 $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1, 2$，另外 $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$

每个特征值不能对应两个线性无关的特征函数

**证明.** 设特征值 $\lambda$ 对应两个线性无关的特征函数 $y_1(x), y_2(x)$，则 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 满足 (1.24)(1.25)，由边界条件 (1.25) 有当 $x = 0$ 时 Wronski 行列式 (определитель Вронского) $W[y_1, y_2](0) = 0$，则 $\exists c \in \mathbb{R} : y_1(x) = cy_2(x)$ □

**注意 1.6.** （符号约定）下记 $v(x)$ 与 $w(x)$ 的纯量积为

$$(v, w) = \int_0^l v(x)w(x)dx$$

**定理 1.7.** （*Sturm-Liouville* 边值问题不同特征值特征函数正交性）*Sturm-Liouville* 边值问题对应不同特征值的特征函数正交

**证明.** 设特征值 $\lambda_1, \lambda_2$ 分别对应两个特征函数 $y_1(x), y_2(x)$，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $y_1(x), y_2(x)$ 满足 Sturm-Liouville 边值问题，由 Green 公式有

$$(Ly_1, y_2) - (y_1, Ly_2) = \int_0^l (y_2(x)Ly_1 - y_1(x)Ly_2)\,dx = 0$$

又由 $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x)$ 与 $Ly_2 = -\lambda_2 y_2(x)$，则

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = \lambda_1 (y_1, y_2) - \lambda_2 (y_1, y_2) = -(Ly_1, y_2) + (y_1, Ly_2) = 0$$

则由 $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0$ 与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 推出 $(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_1(x) \perp y_2(x)$ □

**定理 1.8.** （*Sturm-Liouville* 边值问题第一类边界条件特征值估计）设有 *Sturm-Liouville* 边值问题

$$\begin{cases} Ly \equiv \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy(x)}{dx}\right) - q(x)y(x) = -\lambda y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.26) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 & (1.27) \end{cases}$$

其中 $p(x) \in C^1[0;l], q(x) \in C[0;l], (\forall x \in [0;l]) : p(x) > 0$，且 $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1, 2$，另外 $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$

另设 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$，若 $\lambda_1$ 为特征值且 $y_1(x)$ 为其对应特征函数，则

$$\lambda_1 \geqslant \min_{0 \leqslant x \leqslant l} q(x)$$

**证明.** 反证：设 $\lambda_1 < \min\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} q(x)$，则 $(\forall x \in [0;l]) : q(x) - \lambda_1 > 0$，从方程 (1.26) 得

$$(p(x)y_1'(x))' = (q(x) - \lambda)_x y_1(x)$$

则有

$$p(x)y_1'(x) = p(0)y_1'(0) + \int_0^x (q(s) - \lambda)y_1(s)ds \tag{1.28}$$

由 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$，则 $y_1(0) = y_1(l) = 0$。下证 $y_1'(0) > 0$ 推出 $(\forall x \in [0;l]) : y_1'(x) > 0$

若 $(\exists x_0 \in [0;l]) : y_1'(x_0) = 0$，且有 $(\forall x \in [0;x_0)) : y_1'(x) > 0$，则将 $x = x_0$ 代入 (1.28) 有

$$\int_0^{x_0} (q(s) - \lambda)y_1(s)ds$$

小于零，但由 $y_1(0) = 0, (\forall x \in [0;x_0)) : y_1'(x) > 0$ 推出 $(\forall x \in [0;l]) : y(x) > 0$，结合积分小于零必有 $y(x_0) < 0$，这与 $y_1'(x_0) = 0$ 矛盾。

则 $(\forall x\in[0;l]):y_1'(x)>0$，由 $y(0)=0$ 则显然与 $y_1(l)=0$ 矛盾，定理即证 □

**定理 1.9.** （*Steklov 定理/теорема Стеклова*[2]）设有 *Sturm-Liouville* 边值问题

$$\begin{cases} Ly\equiv \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy(x)}{dx}\right)-q(x)y(x)=-\lambda y(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.29)\\ \alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=0, \quad \alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0 & (1.30)\end{cases}$$

其中 $p(x)\in C^1[0;l], q(x)\in C[0;l], (\forall x\in[0;l]):p(x)>0$，且 $\alpha_i^2+\beta_i^2>0, i=1,2$，另外 $\lambda\in\mathbb{C}, \alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R}$

设问题有特征值 $\lambda_n$ 与其对应的特征函数 $y_n(x)$，$n=1,2,\ldots$，且有

$$\int_0^l (y_n(x))^2\,dx=1$$

另设对于 $(\forall f(x)\in C^2[0;l])$，记 $f_n$：

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*):f_n=\int_0^l f(x)y_n(x)dx$$

则若 $f(x)\in C^2[0;l]$ 满足边值条件 *(1.30)*，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$ 在 $[0;l]$ 上一致收敛到函数 $f(x)$，即有

$$(\forall 0\leqslant x\leqslant l):f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x),$$

[2]斯特克洛夫 (Vladimir Andreevich Steklov,Влади́мир Андре́евич Стекло́в,1863.12.28-1864.1.9) 俄罗斯数学家与工程师，1919-1926 年任苏联科学院副院长，后任俄罗斯科学院物理与数学研究所首位所长（研究所在他去世后以他的名字命名）

## 1.2 热传导方程与抛物型方程

### 1.2.1 热传导方程

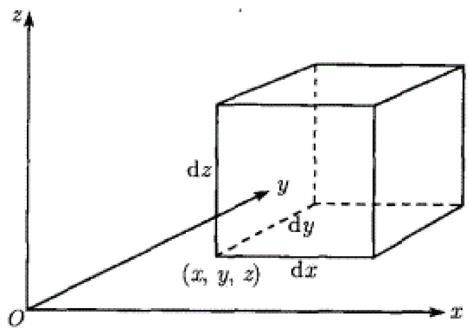
**例题 1.4.** （热传导方程/*уравнение теплопроводности*）设物体在空间取定直角坐标系，取各点在 $t$ 时刻的温度 $u=u(t,x,y,z)$ 为热运动的表征量，则有有源热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(t,x,y,z) \tag{1.31}$$

其中 $\Delta u=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维 *Laplace* 算子

$$a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}},f(t,x,y,z)=\frac{g(t,x,y,z)}{c\rho}$$

**方法一：三维情形近似法.** 在介质内任取微元 $\mathrm{d}V=[x,x+\mathrm{d}x]\times[y,y+\mathrm{d}y]\times[z,z+\mathrm{d}z]$ 如图 (1.3.1)，考察微元 $\mathrm{d}V$ 在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内的温度变化




根据能量守恒定律，物体温度升高所需热量等于外部流入热量和内部热源产生热量之和。热量的流动遵循 Fourier 热传导定律：热量从温度高处流向低处，沿某方向流动热量的多少与温度在该方向的减少率成比例，即

$$\boldsymbol{Q}_n=-k(x,y,z;n)\frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n}$$

其中 $Q_n$ 为 $n$ 方向的热流密度矢量，即单位时间沿 $n$ 方向通过单位面积的热量，$k(x,y,z;n)$ 为介质的热传导系数，以下简记为 $k$。

如图 (1.3.1) 所示，在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 时间间隔内通过微元的左右面传入的热量为

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t,x,y,z)}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t,x+\mathrm{d}x,y,z)}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{(t,x,y,z)}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

同理有通过前后和上下面流入的热量分别为

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\qquad k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若介质内部有热源，其热源密度，即单位时间单位体积热源流出的热量为 $g(t,x,y,z)$，则在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 时间间隔内微元内部热源流出热量为 $g(t,x,y,z)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，而微元温度升高所需的热量为

$$c\rho[u(t+\mathrm{d}t,x,y,z)-u(t,x,y,z)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \approx c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

这些等式中都忽略了高阶无穷小量。将这些量代入能量守恒定律即得方程

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+g(t,x,y,z)$$

这即是热传导方程 □

**方法二：一维情形积分法**. 根据能量守恒定律，物体温度升高所需热量等于外部流入热量和内部热源产生热量之和。在截面积 (площадь сечения) 为 $S$，长度为 $l$ 的杆 (стержень) 中热量 (количество тепла) 为 $Q=Sl$。在时间间隔 $(t,t+\Delta t)$ 内流过截面 $x$ 的热量，根据 Fourier 热传导定律 (закон Фурье)，热量从温度高处流向低处，沿某方向流动热量的多少与温度在该方向的减少率成比例，即

$$dQ=qS\Delta t$$

其中

$$q=-k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

为热流密度 (плотность теплового потока)，等于单位时间内流过单位面积的热量。$k(x)$ 为介质的热传导系数

$$Q=-S\int_t^{t+\Delta t}k(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau$$

其中 $Q$ 为在时间间隔 $(t+\Delta t)$ 内流过面积为 $S$ 的截面 $x$ 的热量

质量 (масса) 为 $m$ 且密度 (плотность) 为 $\rho$ 且体积 (объём) 为 $V$ 的物体 (тело)，改变（增加）温度 $\Delta u$ 单位 (единиц) 的热量为

$$dQ=cm\Delta u=c\rho V\Delta u$$

对于不均匀杆 (неоднородный стержень) 用积分形式表达为

$$Q=\int_x^{x+\Delta x}c(s)\rho(s)S\Delta u(s)ds$$

在杆内可以产生 (возникнуть) 或吸收 (поглощаться) 热量（由于对电流、化学或核反应的阻力 (сопротивления электрическому току, химической или ядерной реакции)）。而对于热源

密度 (плотность тепловых источников) $F(x,t)$ 有

$$dQ = SF(x,t)dxdt$$

$$Q = S\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x} F(x,t)dxdt$$

热量在 $(x, x+\Delta x)$ 上在时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内的一般平衡 (баланс) 有公式

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+\Delta x} c(s)\rho(s)[u(s,t+\Delta t)-u(s,t)]ds\\ &=\int_t^{t+\Delta t}\left[k(x+\Delta x)\frac{\partial u(x+\Delta x,\tau)}{\partial x}-k(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right]d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}F(s,\tau)dsd\tau\end{aligned}$$

其为积分形式的热传导方程。

欲得微分形式的热传导方程。假设 $\exists u_t, u_{xx} \in C$。根据积分中值定理 (теорема о среднем значении интеграла) 则有

$$\begin{aligned}&c(s)\rho(s)[u(s,t+\Delta t)-u(s,t)]|_{s=x+\alpha\Delta x}\Delta x\\ &=\left[k(x+\Delta x)\frac{\partial u(x+\Delta x,\tau)}{\partial x}-k(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right]_{\tau=t+\beta\Delta t}\Delta t+F(x+\gamma\Delta x,t+\delta\Delta t)\Delta x\Delta t\end{aligned}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,1]$

利用差分 Lagrange 公式 (формула Лагранжа для разностей) 有 $\exists\theta, \vartheta \in [0,1]$ 满足

$$\begin{aligned}&c(s)\rho(s)\frac{\partial u}{\partial t}(s,\tau)\Big|_{\substack{s=x+\alpha\Delta x,\\ \tau=t+\theta\Delta t}}\Delta x\Delta t\\ &=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(s)\frac{\partial}{\partial x}u(s,\tau)\right]_{\substack{s=x+\vartheta\Delta x,\\ \tau=t+\beta\Delta t}}\Delta x\Delta t+F(x+\gamma\Delta x,t+\delta\Delta t)\Delta x\Delta t\end{aligned}$$

令 $\Delta x, \Delta t \to 0$ 则有

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)+F(x,t)$$

这即是一维热传导方程 □

**注 1：** 若方程齐次，即为无外源热传导方程

**注 2：** 利用方法一，若仅考虑侧面绝热杆的温度或柱上与高度无关的温度变化，同样可导出方程 (1.31) 的一维二维情形，仅需将 Laplace 算子相应地取为一维或二维

**注 3：** 热传导方程的建立基于能量守恒和热传导两条基本物理定律。像气体扩散、杂质在固体或液体中扩散这些物理过程，其机理与热传导相似，都是由浓度的不均匀引起不同物质

分子的位置交换，交换过程中每种物质的总量保持不变。选取适当的末知函数，导出的方程与热传导方程有相同形式，因此也称热传导方程为扩散方程

#### 1.2.2 第一类边值问题与分离变量法

**定义 1.14.** （齐次抛物型方程第一类边值问题解的类型）设有齐次抛物型方程第一类边值问题 *(первая краевая задача)*

$$
\begin{cases}
u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.32)\\
u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t_0<t\leqslant T & (1.33)\\
u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.34)
\end{cases}
$$

其中泛定方程 *(1.32)* 即为一维无外源热传导方程。另设 $Q_T=\{(x,t)|((0,l)\times(t_0,T]\}$

若函数 $u(x,t)\in C^{2,1}\left(\bar{Q}_T\right)$ 且满足式 *(1.32)(1.33)(1.34)*，则称函数为该边值问题的光滑解 *(гладкое решение)*；若函数 $u(x,t)\in C^{2,1}\left(Q_T\right)\cap C\left(\bar{Q}_T\right)$ 且满足式 *(1.32)(1.33)(1.34)*，则称函数为该边值问题的古典解 *(классическое решение)*

若函数 $u(x,t)\in L_2\left(\bar{Q}_T\right)\cap C^1\left(Q_T\right)$（此处 $L_2$ 意为指定区域上的 *Lesbegue* 平方可积函数）且满足式 *(1.33)(1.34)*，还对于 $\forall\psi(x,t)\in C\left(\bar{Q}_T\right)\cap C^1\left(Q_T\right):\psi(0,t)=\psi(l,t)=0$ 满足

$$
\iint_{\bar{Q}_T}\left(u_t(x,t)\psi(x,t)+a^2u_x(x,t)\psi_x(x,t)\right)dxdt=0
$$

则称函数为该边值问题的广义解 *(обобиённое решение)*

**例题 1.5.** （分离变量法齐次抛物型方程齐次第一类边值问题）求解齐次抛物型方程第一类边值问题 *(первая краевая задача)*

$$
\begin{cases}
u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.35)\\
u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t_0<t\leqslant T & (1.36)\\
u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.37)
\end{cases}
$$

设其古典解可以记为形式：

$$
u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)X_n(x) \tag{1.38}
$$

其中 $\{X_n(x)\}$ 为空间 $H$ 上的正交归一化函数序列 *(последовательность ортогональных нормированных функций)*

**解**. 假设 $u(x,t)=X(x)T(t)\neq0$（为零则给出一个平凡解），代入方程 (1.35)(1.36) 即得

$$
X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t) \tag{1.39}
$$

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0 \tag{1.40}$$

**第一步：分离变量**

由 (1.39) 可以分离变量得

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)} \tag{1.41}$$

等式 (1.41) 的左边与 $x$ 无关，右边与 $t$ 无关，微分即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{X''(x)}{X(x)}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{T'(t)}{a^2T(t)}\right]=0$$

故等式 (1.41) 左右两边均为常数，记为 $-\lambda$。则由边界条件 (1.40) 有 $X(0)=X(l)=0$ 并由此分离出关于 x 的二阶常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

与关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} T'(t)+\lambda a^2T(t)=0, t_0\leqslant t\leqslant T \\ T\left(t_0\right)=\varphi(x) \end{cases}$$

**第二步：解 SL 问题**

设有关于 x 的二阶常微分方程的 SL 问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l & (1.42) \\ X(0)=X(l)=0 & (1.43) \end{cases}$$

(1) 当 $\lambda=-\omega^2<0(\omega>0)$ 时，方程 (1.42) 有通解 $X(x)=A\mathrm{e}^{\omega x}+B\mathrm{e}^{-\omega x}$ 。代入边界条件 (1.43) 得 $X(0)=A+B=0, X(l)=A\mathrm{e}^{\omega l}+B\mathrm{e}^{-\omega l}=0$ ，则 $A=B=0$，边值问题无非零解

(2) 当 $\lambda=0$ 时，方程 (1.42) 有通解 $X(x)=Ax+B$ 。代入边界条件 (1.43) 得 $X(0)=B=0, X(l)=Al+B=0$，则 $A=B=0$，边值问题无非零解

(3) 当 $\lambda=\omega^2>0(\omega>0)$ 时，方程 (1.42) 有通解 $X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x,$ 。代入边界条件 (1.43) 得 $X(0)=A=0, X(l)=B\sin\omega l=0$ ，则当且仅当

$$\omega=\frac{n\pi}{l}(n=1,2,\cdots)$$

时边值问题有非零解

$$X(x)=B\sin\frac{n\pi}{l}x$$

不妨假设 $B=1$，则其本征值与对应本征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x\quad n=1,2,$$

**第三步：叠加定系数**

有关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} T_n'(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0, t_0\leqslant t\leqslant T\\ T_n\left(t_0\right)=\varphi_n\end{cases}$$

其中令

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

则有解

$$T_n(t)=C_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}$$

进而有

$$u_n(x,t)=X_n(t)T_n(t)=\sin\frac{n\pi x}{l}C_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}\tag{1.44}$$

每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 (1.151) 满足泛定方程 (1.35) 及第一类齐次边界条件 (1.36)，则由叠加原理有

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

则函数 $u(x,t)$ 满足泛定方程 (1.35) 及第一类齐次边界条件 (1.36)。为满足初始条件 (1.37) 有

$$u(x,t_0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

因为该级数为函数 $\varphi(x)$ 的傅里叶级数（рядом Фурье），其系数由下列公式计算得到

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

最后得到一般形式的解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2(t-t_0)}\sin\frac{n\pi}{l}x\quad\square$$

**注 1**：称常数 $-\lambda$ 为分离常数 (separation constant)

**注 2**：若 $H=L_2[0,l]$，这时 $\{X_n(x)\}$ 为 $H=L_2[0,l]$ 正交基，$T_n(t)$ 为函数 $u(x,t)\in H=L_2[0,l], n\in\mathbb{N}$ 的坐标系数 (координатные коэффициенты)

**定义 1.15.** （分离变量法一般格式）将分离变量法用于更一般的定解问题如下：

$$\begin{cases} L_t u + L_x u = 0, \quad t \in I, a < x < b & (1.45) \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)|_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)|_{x=b} = 0 & (1.46) \\ \text{关于} t \text{ 的定解条件} & (1.47) \end{cases}$$

其中的方程 (1.45) 中的 $L_t, L_x$ 分别为关于 $t$ 和 $x$ 的线性偏微分算子，形如

$$L_t = a_0(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial}{\partial t} + a_2(t)$$
$$L_x = b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x)$$

其中 $a_j(t)(j = 0, 1, 2)$ 为有限或半无限区间 $I$ 上的连续函数；$b_j(x)(j = 0, 1, 2)$ 为 $a < x < b$ 上的连续函数；边界条件 (1.46) 中常数 $\alpha_j, \beta_j$ 非负且 $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0(j = 1, 2)$；公式 (1.47) 中关于 $t$ 的定解条件可以是初始条件，也可以是边界条件

**第一步：分离变量**

设 $u(t, x) = T(t)X(x)$，代入齐次方程 (1.45) 和齐次边界条件 (1.46)，分离得 *SL* 问题

$$\begin{cases} L_x X(x) + \lambda X(x) = 0, a < x < b & (1.48) \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0, \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 & (1.49) \end{cases}$$

和常微分方程

$$L_t T(t) - \lambda T(t) = 0 \tag{1.50}$$

可见 (1.45) 形式的方程，即使 $L_t, L_x$ 为更高阶的微分算子，总可以分离变量得常微分方程 (1.48) 和式 (1.50)，而第 *I*、*II*、*III* 类齐次边界条件式 (1.46) 也总可分离出常微分方程的边界条件 (1.49) 式。因此称这类定解问题为可分离变量的问题

**第二步：解 *SL* 问题**

根据 $\lambda$ 的不同情况求方程 (1.48) 的通解，并由边界条件 (1.49) 式求出本征值 $\{\lambda_n\}$ 及相应的本征函数 $\{X_n(x)\}, n = 1, 2, \cdots$. 再将本征值 $\lambda_n$ 代入方程 (1.50) 求出相应的通解 $T_n(t)$，从而得到一族变量分离形状的解 $\{u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x)\}$

**第三步：叠加定系数**

令

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n T_n(t) X_n(x)$$

代入关于 $t$ 的初始条件或边界条件定出系数 $C_n$，从而得到定解问题的形式解

**定理 1.10.** （齐次抛物型方程第一类边值问题光滑解存在性）设有齐次抛物型方程第一类

边值问题 (1.32)(1.33)(1.34)，另设 $Q_T=\{(x,t)|((0,l)\times(t_0,T]\}$。若满足

$$\varphi(x)\in C^2[0,l],\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$$

则该问题存在光滑解

**证明.** 由分离变量法有一般形式解函数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2(t-t_0)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

则当 $(\forall a\in(0,T-t_0))(\forall t\geqslant t_0+a)$ 时

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2(t-t_0)}\sin\frac{n\pi}{l}x\right|\leqslant$$
$$\max_{s\in[0;l]}|\varphi(s)|\cdot\frac{2}{l}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l\sin\frac{n\pi s}{l}ds\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2(t-t_0)}\sin\frac{n\pi}{l}x\right|\leqslant$$
$$\max_{s\in[0;l]}|\varphi(s)|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-t_0)}\right|\leqslant\max_{s\in[0;l]}|\varphi(s)|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2a}$$

则由 D'Alembert 判别法有数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}a\right)^2a}$ 一致收敛性，则由 Weierstrass 强函数判别法即得解函数右端级数一致收敛，则函数在区域 $\mathcal{C}(Q_T)$ 上连续

由 $a\in(0;T-t_0)$ 任意性，$(\forall t\in(t_0;T])$ 时级数一致收敛性和 $u(x,t)$ 的连续性，则当 $t=t_0$ 时，公式有形式

$$u(x,t_0)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)$$

因此，满足极限

$$\lim_{t\to t_0+0}u(x,t)=u(x,t_0)=\varphi(x)\in C^2[0;l]$$

由 $(\forall a>0)$ 时数值级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2a},\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{l}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2a},\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2a}$$

在 $t \in (t_0, T]$ 一致收敛到一致连续函数 $u_t(x,t), u_x(x,t), u_x(x,t)$，则由逐项微分可得

$$u_t(x,t) = -\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\int_0^l\left(\varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\right)e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-t_0)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u_x(x,t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{l^2}\int_0^l\left(\varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\right)e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-t_0)}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$u_{xx}(x,t) = -\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\int_0^l\left(\varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\right)e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-t_0)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

则由极限过程有

$$\lim_{t\to t_0+0} u_x(x,t) = u_x(x,t_o) = \varphi'(x) \in C^1[0;l]$$

$$\lim_{t\to t_0+0} u_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t_o) = \varphi''(x) \in C[0;l]$$

将上述导数 $u_t(x,t)$ 和 $u_{xx}(x,t)$ 的值代入泛定方程，则对 $\forall (x,t) \in Q_T$ 均成立。由

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_{x=0} = \sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_{x=l} = 0$$

则解函数 $u(x,t)$ 满足边界条件。最后将导数值代入点 $(0,0)$ 和 $(l,0)$ 的方程即得 $u_t(0,0+0) = a^2u_{xx}(0+0,0), u_t(l,0+0) = a^2u_{xx}(l-0,0),$，则给出条件 $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ □

**定理 1.11.** （齐次抛物型方程第一类边值问题古典解存在性）设有齐次抛物型方程第一类边值问题 *(1.32)(1.33)(1.34)*，另设 $Q_T = \{(x,t)|((0,l)\times(t_0,T]\}$。若满足

$$\varphi(x) \in C[0,l], \varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

则该问题存在古典解

**定理 1.12.** （齐次抛物型方程第一类边值问题广义解存在性）设有齐次抛物型齐次方程第一类边值问题 *(1.32)(1.33)(1.34)*，另设 $Q_T = \{(x,t)|((0,l)\times(t_0,T]\}$。若满足

$$\varphi(x) \in L_2[0,l]$$

则该问题存在广义解

**定理 1.13.** （齐次抛物型方程第一类边值问题最大值原理/*Приниип максимума*）设齐次抛物型方程第一类边值问题

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t_0 < t \leqslant T & (1.51)\\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t), \quad t_0 < t \leqslant T & (1.52)\\ u(x,t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.53)\end{cases}$$

则泛定方程 (1.51) 古典解 $u(x,t) \in C^{2,1}\left(Q_T\right) \cap C\left(\bar{Q}_T\right)$ 在区域 $Q_T=\{(x,t)|((0;l) \times (t_0;T]\}$ 内点不达最大值，即仅当 $t=t_0$ 或 $x=0$ 或 $x=l$ 时取得最大值

考虑边界条件 (1.52) 与初始条件 (1.53) 即有

$$\max_{(x,t)\in Q_T} u(x,t) \leqslant \max\left\{\max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x), \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\alpha(t), \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\beta(t)\right\}$$

**证明.** 反证：设

$$(\exists\left(x_M,t_M\right) \in Q_T)(\exists\varepsilon>0): u\left(x_M,t_M\right)=\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} u(x,t)=M+\varepsilon$$

其中 $M=\max\limits_{(x,t)\in\delta\bar{Q}_T} u(x,t)$ 且

$$\delta\bar{Q}_T=\{(0,t)|(\forall t\in[0;T])\} \cup \{(l,t)|(\forall t\in[0;T])\} \cup \{(x,0)|(\forall x\in[0;l])\}$$

则对齐次抛物型齐次方程第一类边值问题有 $M=\max\left\{\max\limits_{x\in[0;l]}\varphi(x), \max\limits_{t\in[0;T]}\alpha(t), \max\limits_{t\in[0;T]}\beta(t)\right\}$

设 $k>0$，观察 $(\forall t\in[t_0,t_M]): v(x,t)=u(x,t)+k\left(t_M-t\right)$，显然有

$$v\left(x_M,t_M\right)=u\left(x_M,t_M\right)=M+\varepsilon, k\left(t_M-t\right) \leq k\left(T-t_o\right)$$

设 $k\in\left(0,\dfrac{\varepsilon}{2\left(T-t_0\right)}\right)$，则有估计

$$\max_{(x,t)\in\delta\bar{Q}_T} v(x,t) \leqslant \max_{(x,t)\in\delta\bar{Q}_T} u(x,t)+\max_{(x,t)\in\delta\bar{Q}_T} k\left(t_M-t\right) \leqslant M+\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.54}$$

由 $v(x,t)$ 连续性则有

$$\left(\exists(x_1,t_1)=\arg\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} v(x,t)\right): v\left(x_1,t_1\right) \geqslant v\left(x_M,t_M\right)=M+\varepsilon$$

则由估计 (1.54) 有 $t_1>t_0$ 与 $x_1\in(0;l)$ 。而在点 $\left(x_1,t_1\right)$ 上有 $v_{xx}\left(x_1,t_1\right)=u_{xx}\left(x_1,t_1\right) \leqslant 0, v_t\left(x_1,t_1\right)=u_t\left(x_1,t_1\right)-k \geqslant 0, u_t\left(x_1,t_1\right) \geqslant k$ ，则在 $\left(x_1,t_1\right)$ 处不满足泛定方程 (1.51) □

**注：** 对称地，对于最小值有类似结论：

$$\min\left\{\min_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x), \min_{t_0\leqslant t\leqslant T}\alpha(t), \min_{t_0\leqslant t\leq T}\beta(t)\right\} \leqslant \min_{(x,t)\in Q_T} u(x,t)$$

**定理 1.14.** （非齐次抛物型方程第一类边值问题连续解唯一性）设 $i$ 非齐次抛物型方程第

一类边值问题

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t_0 < t \leqslant T & (1.55) \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t), \quad t_0 < t \leqslant T & (1.56) \\ u(x,t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.57) \end{cases}$$

若函数 $u_1(x,t)$ 与 $u_2(x,t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 上定义且连续，且满足泛定方程 *(1.55)*，边界条件 *(1.56)* 和初始条件 *(1.57)*，则 $(\forall (x,t) \in \bar{Q}_T) : u_1(x,t) = u_2(x,t)$

**证明**. 显然差 $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 上连续，且满足齐次边界条件和初始条件的齐次抛物型方程第一类边值问题

$$\begin{cases} v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t_0 < t \leqslant T \\ v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t_0 < t \leqslant T \\ v(x,t_0) = 0, \quad 0 < x < l \end{cases}$$

由齐次抛物型方程第一类边值问题最大值原理 (1.13) 有 $(\forall (x,t) \in \bar{Q}_T) : v(x,t) = 0$，则 $(\forall (x,t) \in \bar{Q}_T) : u_1(x,t) = u_2(x,t)$ □

**例题 1.6.** （非齐次抛物型方程第一类边值问题）求解非齐次抛物型方程第一类边值问题

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t_0 < t \leqslant T & (1.58) \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t_0 < t \leqslant T & (1.59) \\ u(x,t_0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.60) \end{cases}$$

**解**. 设其古典解可以记为形式：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t) X_n(x) \tag{1.61}$$

其中 $\{X_n(x)\}$ 为空间 $H$ 上的正交归一化函数序列 (последовательность ортогональных нормированных функций)

假设 $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$（为零则给出一个平凡解），$f(x,t) = X(x)f(t)$，代入泛定方程 (1.58) 与边界条件 (1.59) 即得

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) + f(t)X(x) \tag{1.62}$$

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0 \tag{1.63}$$

**第一步：分离变量**

由 (1.62) 可以分离变量得

$$\frac{T'(t)-f(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

则由边界条件 (1.59) 有 $X(0)=X(l)=0$ 并由此分离出关于 x 的二阶常微分方程的边值问题与关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=f(t), 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} T'(t)+\lambda a^2T(t)=0, t_0\leqslant t\leqslant T \\ T(t_0)=0 \end{cases}$$

**第二步：解 SL 问题**

设有关于 x 的二阶常微分方程的 SL 问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=f(t), 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

则其本征值与对应本征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \quad n=1,2,\cdots$$

**第三步：叠加定系数**

有关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} T_n'(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=f(t), t_0\leqslant t\leqslant T \\ T_n(t_0)=0 \end{cases}$$

其中令 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，则为满足初始条件 (1.60) 有解

$$T_n(t)=\int_{t_0}^t e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\xi)}f_n(\xi)d\xi$$

进而有

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\int_{t_0}^t e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\xi)}f_n(\xi)d\xi \tag{1.64}$$

任意 $n\in\mathbb{N}$ 都有 (1.151) 满足泛定方程 (1.58) 及第一类齐次边界条件 (1.59)，由叠加原理有

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\int_{t_0}^t e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\xi)}f_n(\xi)d\xi$$

由级数 $f(s,\xi)=g(\xi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi$ 为函数 $g(s)$ 的 Fourier 级数，其系数由 Euler-Fourier 公式计算得到

$$f_n(\xi)=\frac{2}{l}\int_0^l f(s,\xi)\sin\frac{n\pi}{l}sds$$

则得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\xi)}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(s,\xi)\sin\frac{n\pi}{l}sds\right)d\xi\sin\frac{n\pi}{l}x$$

这即为一般形式解 □

#### 1.2.3 第二类，第三类边值问题

**定义 1.16.** （齐次抛物型方程第三类边值问题古典解）设齐次抛物型方程第三类边值问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.65)\\ u(0,t)-\alpha u_x(0,t)=0, \quad u(l,t)+\beta u_x(l,t)=0, \quad t_0<t\leqslant T & (1.66)\\ u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.67)\end{cases}$$

其中泛定方程 *(1.65)* 即为一维无外源热传导方程。另设 $Q_T=\{(x,t)|((0,l)\times(t_0,T]\}$

若函数 $u(x,t)\in C^{2,1}\left(Q_T\right)\cap C^1\left(\bar{Q}_T\right)$ 且满足式 *(1.65)(1.66)(1.67)*，则称函数为该边值问题的古典解

**例题 1.7.** （分离变量法非齐次抛物型方程第三类边值问题）求解非齐次抛物型方程第三类边值问题 *(первая краевая задача)*

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.68)\\ u(0,t)-\alpha u_x(0,t)=0, \quad u(l,t)+\beta u_x(l,t)=0, \quad t_0<t\leqslant T & (1.69)\\ u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.70)\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta>0$

设其古典解可以记为形式：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)X_n(x) \tag{1.71}$$

其中 $\{X_n(x)\}$ 为空间 $H$ 上的正交归一化函数序列 *(последовательность ортогональных нормированных функций)*

**解.** 假设 $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$（为零则给出一个平凡解），代入方程 (1.68)(1.69) 即得

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t) \tag{1.72}$$

$$X(0)T(t)-\alpha X'(0)T(t)=X(l)T(t)+\beta X'(0)T(t)=0 \tag{1.73}$$

**第一步：分离变量**

由 (1.72) 可以分离变量得

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \tag{1.74}$$

由边界条件 (1.73) 有 $X(0)-\alpha X'(0)=X(l)+\beta X'(l)=0$ 并分离出关于 x 的二阶常微分方程的边值问题与关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l \\ X(0)-\alpha X'(0)=0, X(l)+\beta X'(l)=0 \end{cases} \begin{cases} T'(t)+\lambda a^2T(t)=0, t_0\leqslant t\leqslant T \\ T(t_0)=\varphi(x) \end{cases}$$

**第二步：解 SL 问题**

设有关于 x 的二阶常微分方程的 SL 问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l & (1.75)\\ X(0)-\alpha X'(0)=0, X(l)+\beta X'(l)=0 & (1.76)\end{cases}$$

(1) 当 $\lambda=-\omega^2<0(\omega>0)$ 时，方程 (1.75) 有通解 $X(x)=A\mathrm{e}^{\omega x}+B\mathrm{e}^{-\omega x}$。代入边界条件 (1.76) 得 $X(0)-\alpha X'(0)=A+B-\alpha\omega(A-B)=0, X(l)+\beta X'(l)=A\mathrm{e}^{\omega l}+B\mathrm{e}^{-\omega l}+\beta\omega(A\mathrm{e}^{\omega l}-B\mathrm{e}^{-\omega l})=0$ 则 $A=B=0$，边值问题无非零解

(2) 当 $\lambda=0$ 时，方程 (1.75) 有通解 $X(x)=Ax+B$。代入边界条件 (1.76) 得 $X(0)-\alpha X'(0)=B-\alpha A=0, X(l)+\beta X'(l)=Al+B+\beta A=0$，则 $A=B=0$，边值问题无非零解

(3) 当 $\lambda=\omega^2>0(\omega>0)$ 时，方程 (1.75) 有通解 $X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$。代入边界条件 (1.76) 得 $X(0)-\alpha X'(0)=A+\alpha\omega B=0, X(l)+\beta X'(l)=A\cos\omega l+B\sin\omega l-\beta\omega A\sin\omega l+\beta\omega\cos\omega l=0$，则有

$$\frac{(\alpha+\beta)\omega}{\alpha\beta\omega^2-1}=\tan\omega l$$

此为超越方程，考虑曲线法求解双曲线与正切函数交点的无穷序列 $\{\lambda_n\}$，若从 $\lambda_1>0$ 开始升序编号，则有当 $n\to\infty$ 时 $\lambda_n\to(\pi n)^2$，另外，显然方程所有根都为单根。于是每个根 $\lambda_i$ 都对应了正交函数系 $X_i(x)$

**第三步：叠加定系数**

由叠加原理即得通解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^l\varphi(s)X_n(s)ds\right)X_n(x)e^{-a^2\lambda_n(t-t_o)}$$

其中 $X_n(x)$ 为正交基，$\lambda_n$ 为方程 $\dfrac{(\alpha+\beta)\sqrt{\lambda_n}}{\alpha\beta\lambda_n-1}=\tan\sqrt{\lambda_n}l$ 的根 □

**定义 1.17.** （非齐次抛物型方程第二类边值问题古典解）设非齐次抛物型方程第二类边值

问题

$$
\begin{cases}
u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.77)\\
u_x(0,t)=\alpha(t), \quad u_x(l,t)=\beta(t), \quad t_0<t\leqslant T & (1.78)\\
u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.79)
\end{cases}
$$

其中泛定方程 (1.77) 即为一维外源热传导方程。另设 $Q_T=\{(x,t)|((0,l)\times(t_0,T]\}$

若函数 $u(x,t)\in C^{2,1}\left(Q_T\right)\cap C^1\left(\bar{Q}_T\right)$ 且满足式 (1.77)(1.78)(1.79)，则称函数为该边值问题的古典解

**例题 1.8.** （分离变量法非齐次抛物型方程第二类边值问题）求解非齐次抛物型方程第二类边值问题 *(первая краевая задача)*

$$
\begin{cases}
u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.80)\\
u_x(0,t)=\alpha(t), \quad u_x(l,t)=\beta(t), \quad t_0<t\leqslant T & (1.81)\\
u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.82)
\end{cases}
$$

**解. 齐次化：** 可以利用边界条件 (1.81) 引入代换

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{2l}x^2\beta(t)-\frac{1}{2l}(x-l)^2\alpha(t)$$

则问题变为

$$
\begin{cases}
v_t(x,t)=a^2v_{xx}(x,t)+g(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.83)\\
v_x(0,t)=0, \quad v_x(l,t)=0, \quad t_0<t\leqslant T & (1.84)\\
v\left(x,t_0\right)=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.85)
\end{cases}
$$

其中

$$\psi(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2l}x^2\beta\left(t_0\right)+\frac{1}{2l}(x-l)^2\alpha\left(t_0\right), \quad 0\leqslant x\leqslant l$$
$$g(x,t)=f(x,t)+\frac{1}{l}(\beta(t)-\alpha(t))+\frac{1}{2l}(x-l)^2\alpha'(t)-\frac{1}{2l}x^2\beta'(t), \quad 0\leqslant x\leqslant l,,t_0\leqslant t\leqslant T$$

**第一步：分离变量**

设其古典解可以记为形式：

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)X_n(x) \tag{1.86}$$

其中 $\{X_n(x)\}$ 为空间 $H$ 上的正交归一化函数序列。另有

$$g(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(t)X_n(x)$$

由 (1.86) 可以分离变量得

$$\frac{T'(t)-g(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

由边界条件有 $X'(0)=X'(l)=0$ 并分离出关于 x 的二阶常微分方程的边值问题与关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l \\ X'(0)=0, X'(l)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} T'(t)+\lambda a^2T(t)=g(t), t_0\leqslant t\leqslant T \\ T\left(t_0\right)=\phi(x) \end{cases}$$

**第二步：解 SL 问题**

设有关于 x 的二阶常微分方程的 SL 问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l & (1.87) \\ X'(0)=0, X'(l)=0 & (1.88) \end{cases}$$

(1) 当 $\lambda=-\omega^2<0(\omega>0)$ 时，方程 (1.87) 有通解 $X(x)=A\mathrm{e}^{\omega x}+B\mathrm{e}^{-\omega x}$ 。代入边界条件 (1.88) 得 $X'(0)=\omega A-\omega B=0, X'(l)=\omega A\mathrm{e}^{\omega l}-\omega B\mathrm{e}^{-\omega l}=0$ ，则 $A=B=0$，边值问题无非零解

(2) 当 $\lambda=0$ 时，方程 (1.87) 有通解 $X(x)=Ax+B$ 。代入边界条件 (1.88) 得 $X'(0)=A=0, X'(l)=A=0$，则 $A=0$

(3) 当 $\lambda=\omega^2>0(\omega>0)$ 时，方程 (1.87) 有通解 $X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x,$ 。代入边界条件 (1.88) 得 $X'(0)=\omega B=0, X'(l)=-\omega A\sin\omega l+\omega B\cos\omega l=0$ ，则当且仅当 $\omega=\dfrac{n\pi}{l}(n=1,2,\cdots)$ 时边值问题有非零解 $X(x)=A\cos\dfrac{n\pi}{l}x$，不妨假设 $A=1$

综上，其本征值与对应本征函数为

$$\lambda_0=0, X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}, \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x \quad n=1,2,\cdots$$

**第三步：叠加定系数**

有关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} T_n'(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=g_n(t), t_0\leqslant t\leqslant T \\ T_n\left(t_0\right)=\psi_n \end{cases}$$

其中令 $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2, n=1,2,\cdots$，则有解

$$T_n(t)=\psi_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}+\int_{t_0}^t g_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau$$

进而有

$$v_n(x,t)=X_n(t)T_n(t)=\cos\frac{n\pi}{l}x\left(\psi_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}+\int_{t_0}^t g_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right),n=1,2,\cdots$$

另外有 $X_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{l}},T_0(t)=\psi_0+\int_{t_0}^t g_0(\tau)d\tau$，则由叠加原理有

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{l}}(\psi_0+\int_{t_0}^t g_0(\tau)d\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}+\int_{t_0}^t g_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

则函数 $v(x,t)$ 满足泛定方程及第二类齐次边界条件。为满足初始条件有

$$v(x,t_0)=\psi(x)=\frac{\psi_0}{\sqrt{l}}+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

由该级数为函数 $\psi(x)$ 的 Fourier 级数，其系数由下列公式计算得到

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,n=1,2,\cdots$$

最后得到一般形式的解

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{l}}(\psi_0+\int_{t_0}^t g_0(\tau)d\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}+\int_{t_0}^t g_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,n=1,2,\cdots$$
$$g_n(\tau)=\int_0^l g(s,\tau)X_n(s)ds=\int_0^l g(s,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}sds$$

最后换元即可 □

**定理 1.15.** （非齐次抛物型方程第二类边值问题古典解存在性）设非齐次抛物型方程第二类边值问题

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.89)\\ u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=0, \quad t_0<t\leqslant T & (1.90)\\ u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.91)\end{cases}$$

若 $\varphi(x)\in C^1[0;l],f(x,t)\in C\left(\bar{Q}_T\right)$ 且 $\varphi'(0)=\varphi'(l)=0$，则该非齐次抛物型方程第二类边值问题存在古典解 $u(x,t)\in C^{2,1}\left(Q_T\right)\cap C^1\left(\bar{Q}_T\right)$

**证明**. 由一般形式解有

$$u(x,t) =\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(s)ds+\frac{1}{l}\int_{t_0}^t\int_0^l f(s,\tau)dsd\tau+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\int_0^l \varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^t\left(\int_0^l f(s,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\frac{n\pi}{l}x \tag{1.92}$$

其中级数

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\int_0^l \varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^t\left(\int_0^l f(s,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\frac{n\pi}{l}x \tag{1.93}$$

在 $t=t_0$ 处收敛，则有

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^l \varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)\cos\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)-\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(s)ds \tag{1.94}$$

这时，式 (1.92) 表示的解满足非齐次抛物型方程第二类边值问题的初始条件 (1.91)

对于 $t\in(t_0;T]$，则由 $t>t_0$ 时观察指数因子有级数 (1.93) 递减，又级数 (1.94) 在 $t\to t_0$ 时存在极限，则有级数 (1.93) 在 $t\in(t_0;T]$ 上一致收敛

级数 (1.93) 对变量 $x$ 微分有 $(\forall t\in(t_0;T])$ :

$$-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{l}\left[\left(\int_0^l \varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^t\left(\int_0^l f(s,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{1.95}$$

由指数因子的存在，级数收敛于区域 $Q_T$ 上内点，并且对 $x=0$ 与 $x=l$ 有

$$\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{x=0}=0,\ \sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{x=l}=0$$

级数 (1.95) 当 $t=t_0$ 时变为形式

$$-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{l}\left(\int_0^l \varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

分部积分得

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^l \varphi'(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi'(x)\quad\forall x\in[0;l]$$

则级数 (1.95) 当 $t\to t_0$ 时收敛，且级数 (1.95) 在集合 $\bar{Q}_T$ 上一致收敛，则 $u(x,t)$ 满足边界条件 (1.90) 和初始条件 (1.91) 且 $u(x,t)\in C^1\left(\bar{Q}_T\right)$

将一般形式解 (1.92) 对参数 $t$ 微分一次则有

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&\frac{1}{l}\int_0^l f(s,t)ds+\frac{2}{l}\left(\int_0^l f(s,t)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)\cos\frac{n\pi}{l}x\\&-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2\left[\left(\int_0^l\varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}+\right.\\&\left.+\int_{t_0}^t\left(\int_0^l f(s,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\frac{n\pi}{l}x\end{aligned}\tag{1.96}$$

由式 (1.96) 右端级数指数因子有级数在区域 $Q_T$ 上一致收敛。其中

$$\frac{1}{l}\int_0^l f(s,t)ds+\frac{2}{l}\int_0^l f(s,t)\cos\frac{n\pi}{l}sds\cos\frac{n\pi}{l}x=f(x,t)\quad\forall(x,t)\in Q_T$$

进而

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&f(x,t)-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2\left[\left(\int_0^l\varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}+\right.\\&\left.+\int_{t_0}^t\left(\int_0^l f(s,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\frac{n\pi}{l}x\quad\forall(x,t)\in Q_T\end{aligned}\tag{1.97}$$

将一般形式解 (1.92) 对参数 $x$ 微分两次则有

$$\begin{aligned}u_{xx}(x,t)=&-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[\left(\int_0^l\varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-t_0)}+\right.\\&\left.+\int_{t_0}^t\left(\int_0^l f(s,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\frac{n\pi}{l}x\quad\forall(x,t)\in Q_T\end{aligned}\tag{1.98}$$

从式 (1.97) 与 (1.98) 得泛定方程 (1.89) 在区域 $Q_T$ 的所有点处都满足。则一般形式解 (1.92) 确实满足非齐次抛物型方程第二类边值问题，且满足 $u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C^1(\bar{Q}_T)$ □

**定理 1.16.** （非齐次抛物型方程第二类边值问题连续可微解唯一性）设二函数 $u_1(x,t)$ 与 $u_2(x,t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 上定义且连续可微，且满足非齐次抛物型方程第二类边值问题

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t_0<t\leqslant T & (1.99)\\ u_x(0,t)=\alpha(t),\quad u_x(l,t)=\beta(t),\quad t_0<t\leqslant T & (1.100)\\ u(x,t_0)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.101)\end{cases}$$

则 $(\forall(x,t)\in\bar{Q}_T): u_1(x,t)=u_2(x,t)$

**证明.** 设函数 $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$，显然其在 $\bar{Q}_T$ 上连续可微，则其满足齐次抛物型

方程第二类边值问题

$$\begin{cases} v_t(x,t)=a^2v_{xx}(x,t), \quad 0<x<l, \quad t_0<t\leqslant T & (1.102)\\ v_x(0,t)=0, \quad v_x(l,t)=0, \quad t_0<t\leqslant T & (1.103)\\ v\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.104)\end{cases}$$

泛定方程 (1.102) 两端乘上 $v(x,t)$，则有

$$(\forall(x,t)\in Q_T): v_t(x,t)v(x,t)-a^2v_{xx}(x,t)v(x,t)=0$$

在区域 $\bar{Q}_t$ 上对 $t\in(0;T]$ 积分得

$$(\forall t\in(0;T]): \int_0^l\int_0^t v_t(\xi,\tau)v(\xi,\tau)d\tau d\xi-a^2\int_0^l\int_0^t v_{xx}(\xi,\tau)v(\xi,\tau)d\tau d\xi=0$$

再考虑边界条件 (1.103) 和初始条件 (1.104)，第一项利用 Newto-Leibniz 公式，第二项分部积分，计算则得

$$(\forall t\in(0;T]): \frac{1}{2}\int_0^l(v(\xi,t))^2d\tau d\xi+a^2\int_0^l\int_0^t\left(v_x(\xi,\tau)\right)^2d\tau d\xi=0$$

由此与区域 $\bar{Q}_T$ 上函数 $v(x,t)$ 得连续可微性可得 $(\forall(x,t)\in\bar{Q}_T): v(x,t)=0$。因此 $(\forall(x,t)\in\bar{Q}_T): u_1(x,t)=u_2(x,t)$ □

#### 1.2.4 直线问题与 Cauchy 问题

**定义 1.18.** （齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题）设定解问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad -\infty<x<+\infty, \quad 0<t\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

且 $u(x,t)$ 在 $t\to 0$ 时连续，且 $t\to 0$ 在连续点上趋近初始条件函数 $\varphi(x)$，则称该定解问题为齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题

考虑 *Poisson* 积分

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\varphi(s)ds=u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,s,t)\varphi(s)ds$$

其中称

$$G(x,s,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}$$

为齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题的基本解

**定理 1.17.** (齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题解存在性) 设齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t_0 < t & (1.105) \\ u(x,t_0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty & (1.106) \end{cases}$$

则下列命题成立:

*1)Green 函数*

$$G(x,s,t,t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-t_0)}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

为泛定方程 *(1.105)* 的解

*2)Poisson 积分*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}} \varphi(s)\mathrm{d}s = u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t,t_0)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

为该齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题的解

**证明.** 1) 对于 Green 函数 $G(x,s,t,t_0)$ 有

$$G_x(x,s,t,t_0) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{x-s}{\left(\sqrt{a^2(t-t_0)}\right)^3} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

$$G_{xx}(x,s,t,t_0) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left( \frac{-2}{\left(\sqrt{a^2(t-t_0)}\right)^3} + \frac{(x-s)^2}{\left(\sqrt{a^2(t-t_0)}\right)^5} \right) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

$$G_t(x,s,t,t_0) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left( \frac{-2a^2}{\left(\sqrt{a^2(t-t_0)}\right)^3} + \frac{a^2(x-s)^2}{\left(\sqrt{a^2(t-t_0)}\right)^5} \right) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

则有 $G_t = a^2 G_{xx}$,即满足泛定方程 (1.105)

2) 下证解函数在初始条件 (1.106) 中函数 $\varphi(x)$ 连续点处满足。设函数 $\varphi(x)$ 在点 $\hat{x}$ 处连续,则需证 $\lim\limits_{x\to\hat{x}} u(x,t) = \varphi(\hat{x})$,即当 $|t| < \delta(\varepsilon)$ 时

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall |x-\hat{x}| < \delta(\varepsilon)) : |u(x,t) - \varphi(\hat{x})| < \varepsilon$$

由函数 $\varphi(x)$ 在点 $\hat{x}$ 连续性有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta(\varepsilon) > 0)(\forall x : |x-\hat{x}| < \eta(\varepsilon)) : |\varphi(x) - \varphi(\hat{x})| < \frac{\varepsilon}{6}$$

设解函数区域划分为三个子区域

$$u(x,t)=\left[\int_{-\infty}^{\hat{x}-\eta}G\varphi(s)ds+\int_{\hat{x}-\eta}^{\hat{x}+\eta}G\varphi(s)ds+\int_{\hat{x}+\eta}^{+\infty}G\varphi(s)ds\right]=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)$$

则有

$$u_2(x,t)=\varphi(\hat{x})\int_{\hat{x}-\eta}^{\hat{x}+\eta}Gds+\int_{\hat{x}-\eta}^{\hat{x}+\eta}G(\varphi(s)-\varphi(\hat{x}))ds=I_1+I_2$$

其中积分 $I_1$ 计算如下，令

$$\alpha=\frac{s-x}{2\sqrt{a^2\left(t-t_0\right)}},\quad d\alpha=\frac{ds}{2\sqrt{a^2\left(t-t_0\right)}}$$

则有

$$I_1=\varphi(\hat{x})\int_{\hat{x}-\eta}^{\hat{x}+\eta}Gds=\varphi(\hat{x})\int_{\frac{\hat{x}-\eta-x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\hat{x}+\eta-x}e^{-\alpha^2}d\alpha$$

而当 $t\to 0$ 时其积分上限在 $\forall x\in(\hat{x}-\eta,\hat{x}+\eta)$ 上收敛到 $+\infty$ 而积分下限收敛到 $-\infty$，则由 Euler-Poisson 积分有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\sqrt{\pi}$，则有 $\lim\limits_{x\to\hat{x},t\to 0}I_1=\varphi(\hat{x})$，则因此

$$(\exists v>0)(\forall(x,t))(|x-\hat{x}|<v,|t|<v):|I_1-\varphi(\hat{x})|<\frac{\varepsilon}{4}$$

下给出 $I_2,u_1,u_3$ 的估计

$$|I_2|\leqslant\int_{\hat{x}-\eta}^{\hat{x}+\eta}G|\varphi(s)-\varphi(\hat{x})|ds$$

由函数 $\varphi(x)$ 在点 $\hat{x}$ 连续性有

$$(\forall s\in(\hat{x}-\eta,\hat{x}+\eta))(|s-\hat{x}|<\eta):|\varphi(s)-\varphi(\hat{x})|<\frac{\varepsilon}{6}$$

设 $\Phi=\max\limits_{x\in R}|\varphi(x)|$，则有 $(\exists\Phi>0))(\forall x)(|x-\hat{x}|<v<\eta):$

$$|u_3(x,t)|\leqslant\int_{\hat{x}+\eta}^{+\infty}G|\varphi(s)|ds\leqslant\frac{\Phi}{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\hat{x}+\eta-x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha\xrightarrow[t\to 0]{}0$$

$$|u_1(x,t)|\leqslant\int_{-\infty}^{\hat{x}-\eta}G|\varphi(s)\mid ds\leqslant\frac{\Phi}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\hat{x}-\eta-x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}e^{-\alpha^2}d\alpha\xrightarrow[t\to 0]{}0$$

由后一个积分的积分上限的分子为负数，即 $(\forall x)(|x-\hat{x}|<v<\eta):\hat{x}-\eta-x<0$，则整个积分上限为负数，当 $t\to 0$ 时趋近于 $-\infty$，同理有 $\hat{x}+\eta-x>0,0<\dfrac{\hat{x}+\eta-x}{2\sqrt{a^2\left(t-t_0\right)}}\xrightarrow[t\to 0]{}+\infty$

考虑估计 $|u_3(x,t)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, |u_1(x,t)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$，则

$$(\exists\gamma>0)(\forall(x,t):|x-\hat{x}|<\gamma,|t|<\gamma):\left(|u_3(x,t)|<\frac{\varepsilon}{5}\right)\wedge\left(|u_1(x,t)|<\frac{\varepsilon}{5}\right)$$

利用上述估计则有

$$|u(x,t)-\varphi(\hat{x})|\leqslant|u_1(x,t)|+|I_1-\varphi(\hat{x})|+|I_2|+|u_3(x,t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{5}=\frac{49}{60}\varepsilon<\varepsilon$$

当 $|x-\hat{x}|<\delta(\varepsilon)=\min\{\gamma,\eta,\upsilon\},|t|<\delta(\varepsilon)$ 时则有

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}G\varphi(s)ds\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2\left(t-t_0\right)}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}}\varphi(s)ds$$

有界且满足 Cauchy 问题 (1.105)(1.106) □

**推论 1.18.** （非齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题解存在性）设非齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), & -\infty<x<+\infty, \quad t_0<t\\ u(x,t_0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

则该非齐次抛物型方程直线上 *Cauchy* 问题存在解

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G\left(x,s,t,t_0\right)\varphi(s)ds+\int_{t_0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,s,t,\tau)f(s,\tau)dsd\tau$$

其中 $G(x,s,t,t_0)$ 为 *Green* 函数

$$G\left(x,s,t,t_0\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2\left(t-t_0\right)}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

#### 1.2.5 射线问题与第一类，第二类，第三类 Cauchy 问题

**定理 1.19.** （齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题解存在性）设齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad t_0<t & (1.107)\\ u(0,t)=0, \quad t_0<t & (1.108)\\ u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0<x<+\infty & (1.109)\end{cases}$$

则该齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题存在解

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,t_0)-G\left(x,-s,t,t_0\right))\varphi(s)ds$$

**证明.** 原齐次抛物型方程齐次边界条件第一类 Cauchy 问题 (1.107)(1.108)(1.109) 可变为同解 Cauchy 问题 (1.110)(1.111)

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad -\infty<x<+\infty, \quad t_0<t & (1.110)\\ v\left(x,t_0\right)=\begin{cases} \varphi(x), & 0\leqslant x<+\infty\\ -\varphi(-x), & -\infty<x<0\end{cases} & (1.111)\end{cases}$$

则由齐次抛物型方程 Cauchy 问题解存在性 (1.17) 有

$$v(x,t)=-\int_{-\infty}^{0}G\left(x,s,t,t_o\right)\varphi(-s)ds+\int_{0}^{+\infty}G\left(x,s,t,t_o\right)\varphi(s)ds \tag{1.112}$$

则对其中第一个积分换元 $s=-\xi$ 有

$$\int_{-\infty}^{0}G\left(x,s,t,t_o\right)\varphi(-s)ds=-\int_{+\infty}^{0}G\left(x,-\xi,t,t_o\right)\varphi(\xi)d\xi=\int_{0}^{+\infty}G\left(x,-\xi,t,t_o\right)\varphi(\xi)d\xi$$

再对 (1.112) 积分求和即得

$$v(x,t)=\int_{0}^{+\infty}\left(-G\left(x,-s,t,t_0\right)+G\left(x,s,t,t_0\right)\right)\varphi(s)ds$$

其满足齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 Cauchy 问题 (1.107)(1.108)(1.109) □

**注意 1.7.** (齐次抛物型方程射线上第一类 *Cauchy* 问题非齐次边界条件齐次化与直线化)设齐次抛物型方程射线上第一类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad t_0<t\\ u(0,t)=\alpha(t), \quad t_0<t\\ u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), \quad 0<x<+\infty\end{cases}$$

则设 $u(x,t)=w(x,t)+\alpha(t)$ 即可将非齐次边界条件变为带有齐次边界条件的非齐次抛物型方程上直线上第一类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} w_t(x,t)=a^2w_{xx}(x,t)+\hat{f}(t), \quad 0<x<+\infty, \quad t_0<t\\ w(0,t)=0, \quad t_0<t\\ w\left(x,t_0\right)=\hat{\varphi}(x)=\varphi(x)-\alpha\left(t_0\right), \quad 0<x<+\infty\end{cases}$$

其中 $\hat{f}(t)=-\alpha'(t)$，则函数 $\hat{f}(t)$ 与 $\hat{\varphi}(x)$ 为奇函数，则问题变为非齐次抛物型方程直线上第一类 *Cauchy* 问题

**定理 1.20.** (齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题解存在性)设齐次抛

物型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad t_0<t & (1.113)\\ u_x(0,t)=0, \quad t_0<t & (1.114)\\ u(x,t_0)=\varphi(x), \quad 0<x<+\infty & (1.115)\end{cases}$$

则该齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题存在解

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}\left(G(x,s,t,t_0)+G(x,-s,t,t_0)\right)\varphi(s)ds$$

**证明**. 原齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 Cauchy 问题 (1.113)(1.114)(1.115) 可化为同解齐次抛物型方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} v_t(x,t)=a^2v_{xx}(x,t), \quad -\infty<x<+\infty\\ v(x,t_0)=\begin{cases}\varphi(x), & 0\leqslant x<+\infty\\ \varphi(-x), & -\infty<x<0\end{cases}\end{cases}$$

则由齐次抛物型方程 Cauchy 问题解存在性 (1.17) 有

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{0}G(x,s,t,t_0)\varphi(-s)ds+\int_0^{+\infty}G(x,s,t,t_0)\varphi(s)ds \tag{1.116}$$

则对其中 $(0;+\infty)$ 上积分换元 $s=-\xi$ 则有

$$v(x,t)=\int_0^{+\infty}\left(G(x,s,t,0)-G(x,-s,t,0)\right)\varphi(s)ds+\int_0^{+\infty}\left(G(x,s,t,\tau)-G(x,-s,t,\tau)\right)\varphi(s)ds$$

其满足齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 Cauchy 问题 (1.113)(1.114)(1.115) □

**定理 1.21.** （非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题解存在性）设非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad t_0<t & (1.117)\\ u(0,t)=0, \quad t_0<t & (1.118)\\ u(x,t_0)=\varphi(x), \quad 0<x<+\infty & (1.119)\end{cases}$$

则该非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题存在解

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,0)-G(x,-s,t,0))\varphi(s)ds\\ &+\int_0^t\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,\tau)-G(x,-s,t,\tau))f(s,\tau)dsd\tau\end{aligned}$$

**证明**. 原非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 Cauchy 问题 (1.117)(1.118)(1.119) 可化为同解非齐次抛物型方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} v_t(x,t)=a^2v_{xx}(x,t)+\hat{f}(x,t), & -\infty<x<+\infty \\ v(x,t_0)=\begin{cases} \varphi(x), & 0\leqslant x<+\infty \\ -\varphi(-x), & -\infty<x<0 \end{cases} \end{cases}$$

其中

$$\hat{f}(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & 0\leqslant x<+\infty \\ -f(-x,t), & -\infty<x<0 \end{cases}$$

则由非齐次抛物型方程 Cauchy 问题解存在性 (1.18) 有

$$\begin{aligned} v(x,t)=&-\int_{-\infty}^{0}G(x,s,t,0)\varphi(-s)ds+\int_{0}^{+\infty}G(x,s,t,0)\varphi(s)ds \\ &-\int_0^t\int_{-\infty}^{0}G(x,s,t,\tau)f(-s,\tau)dsd\tau+\int_0^t\int_0^{+\infty}G(x,s,t,\tau)f(s,\tau)dsd\tau \end{aligned}$$

其满足原非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第一类 Cauchy 问题 (1.117)(1.118)(1.119) □

**定理 1.22.** （非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题解存在性）设非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad t_0<t & (1.120)\\ u_x(0,t)=0, \quad t_0<t & (1.121)\\ u(x,t_0)=\varphi(x), \quad 0<x<+\infty & (1.122)\end{cases}$$

则该非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题存在解

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,0)+G(x,-s,t,0))\varphi(s)ds \\ &+\int_0^t\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,\tau)+G(x,-s,t,\tau))f(s,\tau)dsd\tau \end{aligned}$$

**证明**. 原非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 Cauchy 问题 (1.120)(1.121)(1.122) 可化为同解非齐次抛物型方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} v_t(x,t)=a^2v_{xx}(x,t)+\hat{f}(x,t), & -\infty<x<+\infty \\ v(x,t_0)=\begin{cases} \varphi(x), & 0\leqslant x<+\infty \\ \varphi(-x), & -\infty<x<0 \end{cases} \end{cases}$$

其中

$$\hat{f}(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & 0\leqslant x<+\infty \\ f(-x,t), & -\infty<x<0 \end{cases}$$

则由非齐次抛物型方程 Cauchy 问题解存在性 (1.18) 有

$$\begin{aligned} v(x,t)=&\int_{-\infty}^{0} G(x,s,t,0)\varphi(-s)ds+\int_{0}^{+\infty} G(x,s,t,0)\varphi(s)ds \\ &+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{0} G(x,s,t,\tau)f(-s,\tau)dsd\tau+\int_{0}^{t}\int_{0}^{+\infty} G(x,s,t,\tau)f(s,\tau)dsd\tau \end{aligned}$$

其满足原非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 Cauchy 问题 (1.120)(1.121)(1.122) □

**定理 1.23.** （非齐次抛物型方程非齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题解存在性）设非齐次抛物型方程非齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t & (1.123)\\ u_x(0,t)=\beta(t), \quad 0<t & (1.124)\\ u\left(x,0\right)=\varphi(x), \quad 0<x<+\infty & (1.125) \end{cases}$$

则该非齐次抛物型方程非齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题存在解

$$\begin{aligned} u(x,t)=&-e^{-x}\beta(t)+\int_{0}^{+\infty}(G(x,s,t,0)+G(x,s,t,0))\left(\varphi(s)+e^{-s}\beta(0)\right)ds \\ &+\int_{0}^{t}\int_{0}^{+\infty}(G(x,s,t,\tau)+G(x,s,t,\tau))\left(f(s,\tau)-a^2e^{-s}\beta(\tau)+e^{-s}\beta'(\tau)\right)dsd\tau \\ =&\int_{0}^{+\infty}(G(x,s,t,0)+G(x,-s,t,0)\varphi(s)ds-2a^2\int_{0}^{t-\alpha} G(x,0,t,\tau)\beta(\tau)d\tau \\ &+\int_{0}^{t}\int_{0}^{+\infty}(G(x,s,t,\tau)+G(x,-s,t,\tau))f(s,\tau)dsd\tau \end{aligned}$$

**方法一：换元法（边界条件齐次化）.** 利用换元 $u(x,t)=w(x,t)-e^{-x}\beta(t)$ 将原非齐次抛物型方程射线上第二类 Cauchy 问题非齐次边界条件齐次化，得新非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第二类 Cauchy 问题

$$\begin{cases} w_t=a^2w_{xx}+f(x,t)-a^2e^{-x}\beta(t)+e^{-x}\beta'(t), \quad 0<x<\infty, \quad 0<t \\ w_x(0,t)=0, \quad 0<t \\ w(x,0)=\hat{\varphi}(x)=\varphi(x)+e^{-x}\beta(0), \quad 0<x \end{cases}$$

由非齐次抛物型方程射线上第二类 Cauchy 问题解存在性 (1.22) 有其解为

$$
\begin{aligned}
w(x,t)=&\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,0)+G(x,s,t,0))\left(\varphi(s)+e^{-s}\beta(0)\right)ds\\
&+\int_0^t\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,\tau)+G(x,s,t,\tau))\left(f(s,\tau)-a^2e^{-s}\beta(\tau)+e^{-s}\beta'(\tau)\right)dsd\tau
\end{aligned}
$$

换元后即得原非齐次抛物型方程非齐次边界条件射线上第二类 Cauchy 问题解

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&-e^{-x}\beta(t)+\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,0)+G(x,s,t,0))\left(\varphi(s)+e^{-s}\beta(0)\right)ds\\
&+\int_0^t\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,\tau)+G(x,s,t,\tau))\left(f(s,\tau)-a^2e^{-s}\beta(\tau)+e^{-s}\beta'(\tau)\right)dsd\tau \quad \square
\end{aligned}
$$

**方法二：积分法**. 设 $u(\xi,\tau)$ 为泛定方程 $u_\tau=a^2u_{\xi\xi}+f$ 的解，记

$$
G^*(x,\xi,t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}
$$

则有方程 $G^*_\tau=-a^2G^*_{\xi\xi}$，进一步则有

$$
\frac{\partial}{\partial\tau}(G^*u)=G^*\frac{\partial u}{\partial\tau}+u\frac{\partial G^*}{\partial\tau}=a^2\left(G^*\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-u\frac{\partial^2G^*}{\partial\xi^2}\right)+G^*f
$$

再对 $\xi$ 从 0 到 $+\infty$ 且对 $\tau$ 从 0 到 $t-\alpha$ 积分，其中 $\alpha\in(0,t)$，则有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t-\alpha}d\xi=a^2\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}\left(G^*\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-u\frac{\partial^2G^*}{\partial\xi^2}\right)d\xi d\tau+\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}G^*fd\xi d\tau\\
=&a^2\int_0^{t-\alpha}\left\{\left(G^*\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}-\left(u\frac{\partial G^*}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial G^*}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial G^*}{\partial\xi}\right)d\xi\right\}d\tau\\
&+\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}G^*fd\xi d\tau
\end{aligned}
$$

由 $u$ 与 $u_\xi$ 当 $\xi\to+\infty$ 时有界性有

$$
\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=0}d\xi-a^2\int_0^{t-\alpha}\left(G^*\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}d\tau+\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}G^*fd\xi d\tau
$$

当 $\alpha\to0$ 时有

$$
\lim_{\alpha\to0}\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=u(x,t)
$$

则有

$$
u(x,t)=\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=0}d\xi-a^2\int_0^{t-\alpha}\left(G^*\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}d\tau+\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}G^*fd\xi d\tau
$$

即得解

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,0)+G(x,-s,t,0)\varphi(s)ds-2a^2\int_0^{t-\alpha}G(x,0,t,\tau)\beta(\tau)d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^{+\infty}(G(x,s,t,\tau)+G(x,-s,t,\tau))f(s,\tau)dsd\tau \quad \square$$

**例题 1.9.** （非齐次抛物型方程非齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题解存在性）设非齐次抛物型方程非齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t & (1.126)\\ u_x(0,t)-hu(0,t)=-h\gamma(t), \quad 0<t & (1.127)\\ u\left(x,0\right)=\varphi(x), \quad 0<x<+\infty & (1.128)\end{cases}$$

则该非齐次抛物型方程非齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题存在解

**解.** 设 $u(\xi,\tau)$ 为泛定方程 $u_\tau=a^2u_{\xi\xi}+f$ 的解，记

$$G^*(x,\xi,t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

则有方程 $G^*_\tau=-a^2G^*_{\xi\xi}$，进一步则有

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(G^*u)=G^*\frac{\partial u}{\partial\tau}+u\frac{\partial G^*}{\partial\tau}=a^2\left(G^*\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-u\frac{\partial^2G^*}{\partial\xi^2}\right)+G^*f$$

再对 $\xi$ 从 0 到 $+\infty$ 且对 $\tau$ 从 0 到 $t-\alpha$ 积分，其中 $\alpha\in(0,t)$，则有

$$\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t-\alpha}d\xi=a^2\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}\left(G^*\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-u\frac{\partial^2G^*}{\partial\xi^2}\right)d\xi d\tau+\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}G^*fd\xi d\tau$$
$$=a^2\int_0^{t-\alpha}\left\{\left(G^*\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}-\left(u\frac{\partial G^*}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial G^*}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial G^*}{\partial\xi}\right)d\xi\right\}d\tau$$
$$+\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}G^*fd\xi d\tau$$

由 $u$ 与 $u_\xi$ 当 $\xi\to+\infty$ 时有界性有

$$\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=0}d\xi-a^2\int_0^{t-\alpha}\left(G^*\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}d\tau+\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}G^*fd\xi d\tau$$

当 $\alpha\to0$ 时有

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=u(x,t)$$

则有

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}(G^*u)\Big|_{\tau=0}d\xi-a^2\int_0^{t-\alpha}\left(G^*\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}d\tau+\int_0^{t-\alpha}\int_0^{+\infty}G^*fd\xi d\tau$$

即得解

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}\varphi(s)\left\{G(x,s,t,0)+G(x,-s,t,0)-2h\int_0^{+\infty}e^{-h\eta}G(x,-s-\eta,t,0)d\eta\right\}ds$$
$$+2ha^2\int_0^t\gamma(\tau)\left\{G(x,0,t,\tau)-h\int_0^{+\infty}e^{-h\eta}G(x,-\eta,t,\tau)d\eta\right\}d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^{+\infty}f(s,\tau)\left\{G(x,s,t,\tau)+G(x,-s,t,\tau)-2h\int_0^{+\infty}e^{-h\eta}G(x,-s-\eta,t,\tau)d\eta\right\}dsd\tau\quad\square$$

**定理 1.24.** (齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题解存在性)设齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t & (1.129)\\ \sum_{k=0}^{N}A_k\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big|_{x=0}=0,\quad 0<t & (1.130)\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<+\infty & (1.131)\end{cases}$$

**证明.** 其解为

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}f(s)(G(x,s,t,\tau)+G(x,-s,t,\tau))ds$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}\hat{\varphi}(x), & x<0\\ \varphi(x), & x\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\hat{\varphi}(x)$ 为 $\sum_{k=0}^{N}A_k\varphi^{(k)}(x)$ $\square$

**定理 1.25.** (非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题解存在性)设非齐次抛物型方程齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t & (1.132)\\ \sum_{k=0}^{N}A_k\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big|_{x=0}=0,\quad 0<t & (1.133)\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<+\infty & (1.134)\end{cases}$$

**证明.** 其解为

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}\int_0^t F(s,\tau)G(x,s,t,\tau)+G(x,-s,t,\tau)d\tau ds$$

其中

$$F(x,t) = \begin{cases} \hat{f}(x,t), & x < 0 \\ f(x,t), & x \geqslant 0, \end{cases} \quad \forall t > 0,$$

其中函数 $\hat{f}(x,t)$ 为 $\sum\limits_{k=0}^{N} A_k \dfrac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k}$ □

#### 1.2.6 Bessel 方程与第一类，第二类 Bessel 函数

**定义 1.19.** （*Bessel* 方程）利用分离变量法的思想，对三维热传导方程 $u_t = a^2\Delta_3 u$，可令 $u = T(t)v(x,y,z)$，代入方程再两边同除以 $Tv$ 即得

$$\frac{T'}{T} = a^2\frac{\Delta_3 v}{v}$$

再分离变量即得常微分方程

$$T' + a^2k^2T = 0$$

和 *Helmholtz* 方程

$$\Delta_3 v + k^2 v = 0 \tag{1.135}$$

在圆柱坐标曲面所围区域上求解时，采用柱坐标系 $(r,\theta,z)$，这时 *Laplace* 算子记为

$$\Delta_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设 $v(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, 代入 *Helmholtz* 方程 *(1.135)*，再两边同除以 $R\Theta Z$ 则有

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0$$

继续分离常微分方程设 $Z'' + \mu Z = 0, \Theta'' + \sigma\Theta = 0$ 则有

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(k^2 - \mu - \frac{\sigma}{r^2}\right)R = 0 \tag{1.136}$$

下记 $\lambda = k^2 - \mu, \sigma = \nu^2$，则方程 *(1.136)* 可改写为方程

$$(rR')' + r\left(\lambda - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0 \tag{1.137}$$

当 $\lambda > 0$ 时, 作自变量代换 $x = \sqrt{\lambda}r$, 记 $y(x) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$，则方程 *(1.137)* 变为

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$$

称该方程为 $\nu$ 阶 ***Bessel* 方程**

**注意 1.8.** （参数形式 *Bessel* 方程）实际上，若采用 *Sturm-Liouville* 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

并令 $k=1,q=0,\rho=1$，则方程退化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\lambda y=0$$

即 *Helmholtz* 方程

若令 $k=x,q=\dfrac{m^2}{x},\rho=x$，则方程退化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{m^2}{x}y+\lambda xy=0$$

称该方程为**参数形式 *Bessel* 方程**，当参数 $\lambda=1$ 时退化为 *Bessl* 方程

设复变函数记为 $w=w(z)$，则其二阶线性常微分方程的标准形式为

$$w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0$$

其中 $p(z),q(z)$ 为给定复变函数

**定理 1.26.** （*Fuchs* 定理）设二阶线性常微分方程 $w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0$，若 $z_0$ 满足 $(z-z_0)\,p(z),(z-z_0)^2\,q(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，则在去心圆区域 $0<|z-z_0|<R$ 上方程有两个线性无关解

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(z-z_0)^n$$
$$w_2(z)=\alpha w_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\,(z-z_0)^n$$

其中系数 $a_0b_0\neq0$，常数 $\alpha$ 可为 *0*，$\rho_1,\rho_2$ 为常数

**注 1**：若 $z_0$ 为 $p(z)$ 的至多一阶极点，为 $q(z)$ 的至多二阶极点，则称 $z_0$ 为方程的**正则奇点**，称 $\rho_1,\rho_2$ 为正则奇点 $z_0$ 的**指标**；若 $z_0$ 为 $p(z),q(z)$ 的分别超过一阶、二阶的极点或本性奇点，则称 $z_0$ 为方程的**非正则奇点**。这时若 $p(z),q(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，则方程在此去心圆域内有两个线性无关解 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$，其求和指标下限应改为 $n=-\infty$，其余形式相同

**注 2**：称形如 $(z-z_0)^\rho\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\,(z-z_0)^n$ 的级数为**广义幂级数**，称 $w_1(z),w_2(z)$ 为方程的**正则解**。称利用广义幂级数求解变系数常微分方程的方法为 Frobenius 方法

**注意 1.9.** （*Bessel* 方程 *Frobenius* 方法可解性）对于 *Bessel* 方程，根据二阶线性常微分方程有 $xp(x)=1,x^2q(x)=x^2-\nu^2$，则由 *Fuchs* 定理 *(1.26)* 有，在区域 $0<|x|<+\infty$ 上方程有广义幂级数解

**定义 1.20.** （第一类 *Bessel* 函数）对于 *Bessel* 方程 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=0$，设其广义幂级数解为 $y(x)=x^{\rho}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$，其中指标 $\rho$ 和系数 $\{a_n\}$ 待定，$a_0\neq 0$，则代入 *Bessel* 方程逐项微分并合并同类项得

$$a_0\left(\rho^2-\nu^2\right)x^{\rho}+a_1\left[(1+\rho)^2-\nu^2\right]x^{1+\rho}+\sum_{n=2}^{+\infty}\left\{a_n\left[(n+\rho)^2-\nu^2\right]+a_{n-2}\right\}x^{n+\rho}=0$$

由此得指标和系数满足关系式

$$\begin{aligned}&a_0\left(\rho^2-\nu^2\right)=0,\quad a_1\left[(1+\rho)^2-\nu^2\right]=0,\\&a_n\left[(n+\rho)^2-\nu^2\right]+a_{n-2}=0,\quad n\geqslant 2\end{aligned}$$

设 $\nu\geqslant 0$，则由 $a_0\neq 0$ 即有 $\rho_{1,2}=\pm\nu$，则关系式改写为

$$a_1(1\pm 2\nu)=0 \tag{1.138}$$

$$a_nn(n\pm 2\nu)+a_{n-2}=0,\quad n\geqslant 2 \tag{1.139}$$

*1)* 先取 $\rho_1=\nu\geqslant 0$，则 $n+2\nu>0(n\geqslant 1)$, 由式 *(1.138)* 有 $a_1=0$，由式 *(1.139)* 得系数的递推公式

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)},\quad n\geqslant 2,$$

则有对于 $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ 有 $a_{2k+1}=0$ 与

$$a_{2k}=\frac{(-1)a_{2(k-1)}}{2^2k(k+\nu)}=\frac{(-1)^ka_0}{2^{2k}k(k+\nu)(k-1)(k+\nu-1)\cdots 1(\nu+1)}=\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}a_0$$

不妨取首项系数 $a_0=\dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$，则得

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{2^{2k+n}\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)}$$

则形式解为

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

称该函数为$\nu$ 阶第一类 ***Bessel*** 函数 ***(Функция Бесселя 1-го рода $\nu$-го порядка )***，经常记为 $J_{\nu}(x)$

*2)* 再取 $\rho_2=-\nu(\nu>0)$，当 $2\nu\neq n$（$n$ 为正整数）时，$n-2\nu\neq 0$，则有递推公式

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n-2\nu)}$$

可得 $\nu$ 阶 *Bessel* 方程另一个形式解

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

经常记为 $J_{-\nu}(x)$

当 $2\nu=2m+1$ 时，由式 *(1.138)(1.139)*，同理给出解 $y_2(x)$

**注意 1.10.** （*Bessel* 方程广义幂级数解正确性）若不使用 *Fuchs* 定理 *(1.26)*，由

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{2k}}{a_{2k-2}}\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{4k(k+\nu)}=0$$

则 $y_1(x)$ 中幂级数部分收敛半径为 $+\infty$，则对任意 $x,y_1(x)$ 均为有限值，且可任意阶逐项微分，则 $y_1(x)$ 在去掉原点的复平面上确为 $\nu$ 阶 *Bessel* 方程的解，且有

$$\lim_{x\to0}J_\nu(x)=\begin{cases}0, & \nu>0\\ 1, & \nu=0\end{cases}$$

同样有 $y_2(x)$ 中幂级数部分在复平面解析，可逐次微分，而指标 $\rho_2=-\nu<0$，则 $y_2(x)$ 在去掉原点的复平面 $0<|x|<+\infty$ 上也为 *Bessel* 方程的解，且有

$$\lim_{x\to0}J_{-\nu}(x)=+\infty,\quad \nu>0,\nu\notin\mathbb{Z}$$

考虑 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 在 $x=0$ 的取值，当 $\nu$ 不为整数时 $J_{-\nu}(0)\to\infty$ 而 $J_\nu(0)$ 为有限值，则比值 $\dfrac{J_\nu(x)}{J_{-\nu}(x)}$ 不为常数，则两个特解 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 线性无关。而 $\nu$ 阶 *Bessel* 方程的通解可表示为

$$y(x)=AJ_\nu(x)+BJ_{-\nu}(x)$$

但注意到当 $m$ 为非负整数时有 $J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x)$，则这时 $J_{-m}(x)$ 与 $J_m(x)$ 线性相关。这表明，当 $\nu=m$ 时，*Bessel* 方程的与 $J_m(x)$ 线性无关的解应为 *Fuchs* 定理 *(1.26)* 中 $\alpha\neq0$ 时公式所示的形式，但求解较为困难。为了简便地找到另一个与 $J_m(x)$ 线性无关的解，试用另外的方法

**定义 1.21.** （第二类 *Bessel* 函数）引入函数

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},\nu\notin\mathbb{Z}$$

称该函数为 $\nu$ 阶 **Neumann** 函数 ***(функция Неймана*** $\nu$***-го порядка)*** 或 $\nu$ 阶第二类 ***Bessel*** 函数

特别地，称

$$N_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial v}\right)\bigg|_{\nu=n}-(-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial v}\right)\bigg|_{\nu=n}\right],n\in\mathbb{Z}$$

为$\nu$ 阶圆柱函数 ***(цилиндрическая функция второго рода $\nu$-го порядка)***

**注意 1.11.** （*Bessel* 方程通解）当 $\nu \geqslant 0$ 时，无论 $\nu$ 是否为整数，$\nu$ 阶 *Bessel* 方程的通解可表示为

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x), \quad 0 < |x| < +\infty$$

其中 $J_\nu(x)$ 在 $x = 0$ 有界，$N_\nu(x)$ 在 $x = 0$ 无界

**性质 1.1.** （第一类 *Bessel* 函数性质）第一类 *Bessel* 函数满足如下性质：

*1)* 导数性质

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right) = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}, \quad \frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$$

*2)* 递推公式 *(Рекуррентная формула)*

$$J_{n+1}(x) = -J_{n-1}(x) + \frac{2n}{x}J_n(x)$$

*3)* 近似表示 *(Асимптотическое представление)*

$$J_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

*4)* 积分表示 *(Интегральное представление)*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\tau - x\sin\tau)d\tau, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**性质 1.2.** （第二类 *Bessel* 函数性质）第二类 *Bessel* 函数满足如下性质：

*3)* 近似表示 *(Асимптотическое представление)*

$$N_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

## 1.3 波动方程与双曲型方程

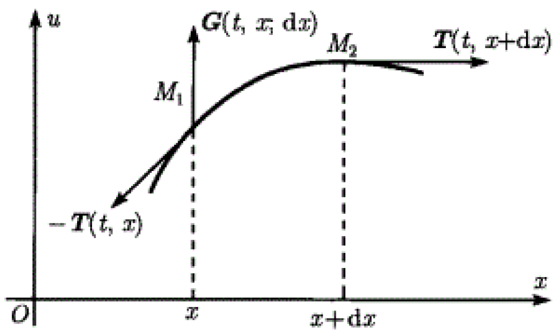
### 1.3.1 波动方程

**例题 1.10.** (弦的横振动方程)假设弦均匀细长，从而其横截面可忽略而视作线，线密度为常数。又设弦柔软弹性，可任意弯曲，张力满足胡克定律。弦的运动在同一平面内进行，每个质点的位移都是横向的，即垂直于弦的平衡位置，且绝对位移和相对位移都很小。取弦在自身张力作用下的平衡位置所在直线为 $x$ 轴, 横向位移方向为 $u$ 轴，设 $t$ 时刻弦上 $x$ 处的质点相对于平衡位置的横向位移 $u=u(t,x)$ 为未知函数，则有弦的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),\quad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}},\quad f(t,x)=\frac{g(t,x)}{\rho} \tag{1.140}$$

其中系数 $a$ 反映波的传播速度，由弦本身性质决定；$f(t,x)$ 为作用在弦身单位质量上的外力，当弦自由振动时 $f(t,x)\equiv 0$

**方法一：一维情形近似法**. 在弦上任取微元 $[x,x+\mathrm{d}x]$，微分记号 $\mathrm{d}x$ 表示一个无穷小改变量。此微元可视作质量为 $\rho\mathrm{d}x$ 的质点，在 $t$ 时刻的运动满足 Newton 第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$




微元所受的外力有左端点的张力 $-\boldsymbol{T}(t,x)$，右端点的张力 $\boldsymbol{T}(t,x+\mathrm{d}x)$ 以及加在微元上的垂直于 $x$ 轴的外力 $\boldsymbol{G}(t,x;\mathrm{d}x)$。若线密度 $\rho$ 为常数，$t$ 时刻作用于 $x$ 处的单位长度上的外力，即外力密度 $g(t,x)$ 已知，张力 $\boldsymbol{T}(t,x)$ 关于 $x$ 可微，则微元服从的 Newton 第二定律可具体表示为

$$\rho\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u^\circ=-\boldsymbol{T}(t,x)+\boldsymbol{T}(t,x+\mathrm{d}x)+\boldsymbol{G}(t,x;\mathrm{d}x)\approx\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x}\mathrm{d}x+g(t,x)\mathrm{d}x\boldsymbol{u}^\circ$$

其中第二个等号忽略了 $\mathrm{d}x$ 的高阶无穷小，其分量形式为

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}=0 \tag{1.141}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial T_2}{\partial x}+g(t,x) \tag{1.142}$$

其中 $T_1,T_2$ 分别为张力 $T$ 在 $x^\circ$ 和 $u^\circ$ 方向的分量。这即为弦振动满足的基本偏微分方程组

由于张力沿弦的切向作用，有第三个方程

$$T_2 = T_1 \frac{\partial u}{\partial x}$$

代入式 (1.141)(1.142) 便可化简得

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_1(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(t, x) \tag{1.143}$$

在微小横振动的假设下，$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，张力大小

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = T_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx T_1$$

微元弧长

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}u^2} = \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx \mathrm{d}x$$

在运动过程中微元弧长保持不变，由 Hooke 定律知张力大小 $T \approx T_1$ 也不随时间变化，则 $T \approx T_1$ 为常数。式 (1.143) 改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad f(t, x) = \frac{g(t, x)}{\rho}$$

这即为弦的横振动方程 □

**注 1**：在弦振动问题中的基本物理定律是 Newton 第二定律和 Hooke 定律，由此凡是弹性介质中微小扰动的传播问题，如弹性杆的纵振动、弹性膜的横振动、声波在空气中的传播等都可用类似方法导出同一类型的方程，一般表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad n = 1, 2, 3 \tag{1.144}$$

其中 $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 为 Laplace 算子。称此类方程为波动方程。因此也称弦振动方程 (1.140) 为一维波动方程。对于经典运动问题可以建立更一般的固体弹性波方程、流体波方程、电磁波方程等。在一些重要的特殊情况下，这些方程都可化简为波动方程 (1.144) 的形式。

**注 2**：注意，弦振动方程 (1.140) 是在一定的理想化假设下导出的。若存在其他不能忽略的因素，如弦在黏稠液体中振动，阻尼必须考虑，推出的方程中就会增加 $\alpha \frac{\partial u}{\partial t}$ 项

### 1.3.2 第一类，第二类与第三类边值问题

**定理 1.27.** （齐次双曲型方程齐次边界条件第一类边值问题解存在性）设有齐次双曲型方程齐次边界条件第一类边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \quad t_0\leqslant t\leqslant T & (1.145)\\ u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t_0\leqslant t\leqslant T & (1.146)\\ u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), u_t(x,t_0)=\psi(x) \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.147)\end{cases}$$

则该齐次双曲型方程齐次边界条件第一类边值问题存在解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left(\varphi_n\cos\frac{an\pi\left(t-t_0\right)}{l}+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi\left(t-t_0\right)}{l}\right)$$

其中，系数由 *Euler-Fourier* 公式计算

$$\varphi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds, \quad \psi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds$$

**证明.** 设其古典解可以记为形式：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}X_n(x)T_n(t) \tag{1.148}$$

其中 $\{X_n(x)\}$ 为空间 $H$ 上的正交归一化函数序列 (последовательность ортогональных нормированных функций)

假设 $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$（为零则给出一个平凡解），代入泛定方程 (1.159) 与边界条件 (1.160) 即得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t) \tag{1.149}$$

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0 \tag{1.150}$$

**第一步：分离变量**

由 (1.156) 可以分离变量得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

则由边界条件 (1.153) 有 $X(0)=X(l)=0$ 并由此分离出关于 x 的二阶常微分方程的边值问题与关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l\\ X(0)=X(l)=0\end{cases} \quad \begin{cases} T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, t_0\leqslant t\leqslant T\\ T\left(t_0\right)=\varphi, T'(t_0)=\psi\end{cases}$$

**第二步：解 SL 问题**

设有关于 x 的二阶常微分方程的 SL 问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

则其本征值与对应本征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \quad n=1,2,\cdots$$

**第三步：叠加定系数**

有关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} T_n''(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=f(t), t_0\leqslant t\leqslant T \\ T_n(t_0)=\varphi_n, T_n'(t_0)=\psi_n \end{cases}$$

其中令 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，则为满足初始条件 (1.154) 有解

$$T_n(t)=\varphi_n\cos\frac{an\pi(t-t_0)}{l}+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi(t-t_0)}{l}$$

进而有

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left(\varphi_n\cos\frac{an\pi(t-t_0)}{l}+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi(t-t_0)}{l}\right) \tag{1.151}$$

任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 (1.151) 满足泛定方程 (1.159) 及第一类齐次边界条件 (1.160)，由叠加原理有

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left(\varphi_n\cos\frac{an\pi(t-t_0)}{l}+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi(t-t_0)}{l}\right)$$

其中，系数由 Euler-Fourier 公式计算

$$\varphi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}s ds, \quad \psi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{n\pi}{l}s ds$$

即得一般形式解 □

**定理 1.28.** （非齐次双曲型方程齐次边界条件第一类边值问题解存在性）设有非齐次双曲

型方程齐次边界条件第一类边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \quad t_0\leqslant t\leqslant T & (1.152)\\ u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t_0\leqslant t\leqslant T & (1.153)\\ u\left(x,t_0\right)=\varphi(x), u_t(x,t_0)=\psi(x) \quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.154)\end{cases}$$

则该非齐次双曲型方程齐次边界条件第一类边值问题存在解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left(\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{an\pi}{l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau\right)$$

其中，系数由 *Euler-Fourier* 公式计算

$$\varphi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds, \quad \psi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds$$

**证明.** 设其古典解可以记为形式：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}X_n(x)T_n(t) \tag{1.155}$$

其中 $\{X_n(x)\}$ 为空间 $H$ 上的正交归一化函数序列 (последовательность ортогональных нормированных функций)

假设 $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$（为零则给出一个平凡解），$f(x,t)=X(x)f(t)$ 代入泛定方程 (1.152) 与边界条件 (1.153) 即得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)+f(x,t) \tag{1.156}$$

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0 \tag{1.157}$$

**第一步：分离变量**

由 (1.156) 可以分离变量得

$$\frac{T''(t)-f(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

则由边界条件 (1.153) 有 $X(0)=X(l)=0$ 并由此分离出关于 x 的二阶常微分方程的边值问题与关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l\\ X(0)=X(l)=0\end{cases} \quad \begin{cases} T''(t)+\lambda a^2T(t)=f(t), t_0\leqslant t\leqslant T\\ T\left(t_0\right)=\varphi, T'(t_0)=\psi\end{cases}$$

**第二步：解 SL 问题**

设有关于 x 的二阶常微分方程的 SL 问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

则其本征值与对应本征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \quad n=1,2,\cdots$$

**第三步：叠加定系数**

有关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} T_n''(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=f(t), t_0\leqslant t\leqslant T \\ T_n(t_0)=\varphi_n, T_n'(t_0)=\psi_n \end{cases}$$

其中令 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，则为满足初始条件 (1.161) 有解

$$T_n(t)=\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{an\pi}{l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

进而有

$$X_n(x)T_n(t)=\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left(\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{an\pi}{l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau\right) \tag{1.158}$$

任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 (1.158) 满足泛定方程 (1.152) 及第一类齐次边界条件 (1.153)，由叠加原理有

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t) \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left(\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{an\pi}{l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau\right) \end{aligned}$$

其中，系数由 Euler-Fourier 公式计算

$$\varphi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds, \quad \psi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds$$

即得一般形式解 □

**定理 1.29.** （非齐次双曲型方程齐次边界条件第一类边界问题解存在性）设有齐次双曲型

方程齐次边界条件第一类边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T & (1.159) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T & (1.160) \\ u(x,t_0) = \varphi(x), u_t(x,t_0) = \psi(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.161) \end{cases}$$

若满足

1) $\varphi(x) \in C^4[0;l], \psi(x) \in C^3[0;l],\ f(x,t) \in C^3\left(\bar{Q}_T\right)$

2) $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0, \psi''(0) = \psi''(l) = 0$

3) $f(0,0) = f(l,0) = f_{xx}(0,0) = f_{xx}(l,0) = 0$

则存在 $u(x,t) \in C^2\left(\bar{Q}_T\right)$ 为该非齐次双曲型方程齐次边界条件第一类边值问题解

**证明.** 考虑解函数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot \left(\varphi_n \cos\frac{an\pi(t-t_0)}{l} + \psi_n \frac{l}{an\pi} \sin\frac{an\pi(t-t_0)}{l}\right)$$

其中，系数由 Euler-Fourier 公式计算

$$\varphi_n(s) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}s ds, \quad \psi_n(s) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin\frac{n\pi}{l}s ds$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}s ds &= -\frac{l}{n\pi}\varphi(s)\cos\frac{n\pi}{l}s\Big|_{s=0}^{s=l} + \frac{l}{n\pi}\int_0^l \varphi'(s)\cos\frac{n\pi}{l}s ds \\ &= \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \varphi'(s)\sin\frac{n\pi}{l}s\Big|_{s=0}^{s=l} - \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \int_0^l \varphi''(s)\sin\frac{n\pi}{l}s ds \\ &= -\left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \int_0^l \varphi'''(s)\cos\frac{n\pi}{l}s ds = \left(\frac{l}{n\pi}\right)^4 \int_0^l \varphi''''(s)\sin\frac{n\pi}{l}s ds \end{aligned}$$

这时则有

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty} \Bigg[ &\left(\frac{l}{n\pi}\right)^4 \int_0^l \varphi''''(s)\sin\frac{n\pi}{l}s ds \cos\frac{an\pi}{l}t + \\ &+ \frac{-l}{an\pi}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \int_0^l \psi'''(s)\cos\frac{n\pi}{l}s ds \sin\frac{an\pi}{l}t + \\ &+ \frac{-l}{an\pi}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \int_0^t \int_0^l f_{xxx}(s,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}s ds \sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau) d\tau \Bigg] \sin\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

则满足定理条件 □

**定理 1.30.** （非齐次双曲型方程非齐次边界条件第二类边界问题解存在性）设有非齐次双

曲型方程非齐次边界条件第二类边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T & (1.162) \\ u_x(0,t) = \alpha(t), \quad u_x(l,t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T & (1.163) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.164) \end{cases}$$

则该非齐次双曲型方程非齐次边界条件第二类边值问题存在解

**证明**. 设 $u: u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{2l}x^2\beta(t) - \frac{1}{2l}(x-l)^2\alpha(t)$，则原问题变为

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + g(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T & (1.165) \\ v_x(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T & (1.166) \\ v(x,0) = \hat{\varphi}(x), \quad v_t(x,0) = \hat{\psi}(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l & (1.167) \end{cases}$$

其中

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2l}(x-l)^2\alpha(0) - \frac{1}{2l}x^2\beta(0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$
$$\hat{\psi}(x) = \psi(x) + \frac{1}{2l}(x-l)^2\alpha'(0) - \frac{1}{2l}x^2\beta'(0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$
$$g(x,t) = f(x,t) + \frac{1}{l}(\beta(t) - \alpha(t)) + \frac{1}{2l}(x-l)^2\alpha''(t) - \frac{1}{2l}x^2\beta''(t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

设其古典解可以记为形式：

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x)T_n(t) \tag{1.168}$$

假设 $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$（为零则给出一个平凡解），$g(x,t) = X(x)g(t)$ 代入泛定方程 (1.165) 与边界条件 (1.166) 即得

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t) + g(x,t) \tag{1.169}$$

$$X'(0)T(t) = X'(l)T(t) = 0 \tag{1.170}$$

**第一步：分离变量**

由 (1.169) 可以分离变量得

$$\frac{T''(t) - g(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

则由边界条件 (1.166) 有 $X(0) = X(l) = 0$ 并由此分离出关于 x 的二阶常微分方程的边值问题

与关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} T''(t)+\lambda a^2 T(t)=f(t), t_0\leqslant t\leqslant T \\ T(t_0)=\varphi, T'(t_0)=\psi \end{cases}$$

**第二步：解 SL 问题**

设有关于 x 的二阶常微分方程的 SL 问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$$

其本征值与对应本征函数为

$$\lambda_0=0, X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}, \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x \quad n=1,2,\cdots$$

**第三步：叠加定系数**

有关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} T_n''(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=g(t), t_0\leqslant t\leqslant T \\ T_n(t_0)=\hat{\varphi}_n, T_n'(t_0)=\hat{\psi}_n \end{cases}$$

其中令 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，则为满足初始条件 (1.167) 有解

$$T_n(t)=\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{an\pi}{l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

特别地，考虑到

$$T_0''(t)=g_0(t), T_0'(t)=\hat{\psi}_0+\int_0^t g_0(\tau)d\tau, T_0(t)=\hat{\varphi}_0+\hat{\psi}_0 t+\int_0^t\int_0^\theta g_0(\tau)d\tau d\theta$$

$$\int_0^t\int_0^\theta g_0(\tau)d\tau d\theta=\int_0^t\left(\int_\tau^t d\theta\right)g_0(\tau)d\tau=\int_0^t(t-\tau)g_0(\tau)d\tau$$

$$T_0(t)=\hat{\varphi}_0+\hat{\psi}_0 t+\int_0^t(t-\tau)g_0(\tau)d\tau$$

进而由叠加原理有

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=X_0(x)T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)\\
=&\frac{1}{\sqrt{l}}(\hat{\varphi}_0+\hat{\psi}_0t+\int_0^t(t-\tau)g_0(\tau)d\tau)+\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{l}x\cdot\left(\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\psi_n\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{an\pi}{l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau\right)
\end{aligned}
$$

其中，系数由 Euler-Fourier 公式计算

$$
\varphi_n(s)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds,\quad \psi_n(\xi)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds
$$

换元后即得一般形式解 □

**定理 1.31.** （非齐次双曲型方程非齐次边界条件第二类边值问题解存在性）设有非齐次双曲型方程非齐次边界条件第二类边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant T & (1.171)\\
u_x(0,t)=\alpha(t),\quad u_x(l,t)=\beta(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T & (1.172)\\
u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)\quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.173)
\end{cases}
$$

若满足

*1)* $\varphi(x)\in C^4[0;l],\psi(x)\in C^3[0;l],\ f(x,t)\in C^3\left(\bar{Q}_T\right)$

*2)* $\varphi'(0)=\varphi'(l)=0,\psi'(0)=\psi'(l)=0$

*3)* $f_x(0,0)=f_x(l,0)=0$

则存在 $u(x,t)\in C^2\left(\bar{Q}_T\right)$ 为该非齐次双曲型方程齐次边界条件第二类边值问题解

**定理 1.32.** （非齐次双曲型方程齐次边界条件混合边值问题解存在性）设有非齐次双曲型方程齐次边界条件混合边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant T & (1.174)\\
u(0,t)=0,\quad u(l,t)+\beta u_x(l,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T & (1.175)\\
u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)\quad 0\leqslant x\leqslant l & (1.176)
\end{cases}
$$

其中 $\beta>0$，则该非齐次双曲型方程齐次边界条件混合边值问题存在解

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}&\left(\frac{1}{\sqrt{\int_0^l\left(\sin\sqrt{\lambda_n}x\right)^2dx}}\sin\sqrt{\lambda_n}x\right)\times\\
&\left(\varphi_n\cos\sqrt{\lambda_n}at+\frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}a}\sin\sqrt{\lambda_n}at+\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\int_0^{\tau}f_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}a(t-\tau)d\tau\right)
\end{aligned}
$$

其中，系数由 *Euler-Fourier* 公式计算

$$\varphi_n(s)=\int_0^l \varphi(s)X_n(s)ds,\quad \psi_n(\xi)=\int_0^l \psi(s)X_n(s)ds,\quad f_n(t)=\int_0^l f(s,t)X_n(s)ds$$

且 $\lambda_n$ 为 $-\beta\sqrt{\lambda}=\tan\sqrt{\lambda}l$ 曲线法求解双曲线与正切函数交点的无穷序列 $\{\lambda_n\}$，并从 $\lambda_1>0$ 开始升序编号

**证明**. 设其古典解可以记为形式：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}X_n(x)T_n(t) \tag{1.177}$$

假设 $v(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$（为零则给出一个平凡解），$f(x,t)=X(x)f(t)$ 代入泛定方程 (1.174) 与边界条件 (1.175) 即得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)+f(x,t) \tag{1.178}$$

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)+\beta X'(l)T(t)=0 \tag{1.179}$$

**第一步：分离变量**

由 (1.178) 可以分离变量得

$$\frac{T''(t)-f(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

则由边界条件 (1.175) 有 $X(0)=X(l)+\beta X'(l)=0$ 并由此分离出关于 x 的二阶常微分方程的边值问题与关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,0<x<l \\ X(0)=X(l)+\beta X'(l)=0 \end{cases} \begin{cases} T''(t)+\lambda a^2T(t)=f(t),0\leqslant t\leqslant T \\ T(0)=\varphi,T'(0)=\psi \end{cases}$$

**第二步：解 SL 问题**

设有关于 x 的二阶常微分方程的 SL 问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,0<x<l \\ X(0)=X(l)+\beta X'(l)=0 \end{cases}$$

(1) 当 $\lambda=-\omega^2<0(\omega>0)$ 时，方程有通解 $X(x)=Ae^{\omega x}+Be^{-\omega x}$。代入边界条件得 $X(0)=A+B=0,X(l)+\beta X'(l)=Ae^{\omega l}+Be^{-\omega l}+\beta\omega(Ae^{\omega l}-Be^{-\omega l})=0$ 则 $A=B=0$，边值问题无非零解

(2) 当 $\lambda=0$ 时，方程有通解 $X(x)=Ax+B$。代入边界条件得 $X(0)=B=0,X(l)+\beta X'(l)=$

$Al+B+\beta A=0$，则 $A=B=0$，边值问题无非零解

(3) 当 $\lambda=\omega^2>0(\omega>0)$ 时，方程有通解 $X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$。代入边界条件得 $X(0)=A=0, X(l)+\beta X'(l)=A\cos\omega l+B\sin\omega l-\beta\omega A\sin\omega l+\beta\omega\cos\omega l=0$，则有

$$-\beta\omega=\tan\omega l$$

此为超越方程，考虑曲线法求解双曲线与正切函数交点的无穷序列 $\{\lambda_n\}$，若从 $\lambda_1>0$ 开始升序编号，则有当 $n\to\infty$ 时 $\lambda_n\to(\pi n)^2$，另外，显然方程所有根都为单根。于是每个根 $\lambda_i$ 都对应了正交函数系 $X_i(x)$，即

$$X_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\int_0^l\left(\sin\sqrt{\lambda_n}x\right)^2dx}}\sin\sqrt{\lambda_n}x$$

**第三步：叠加定系数**

有关于 t 的常微分方程问题

$$\begin{cases}T_n''(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=f(t),0\leqslant t\leqslant T\\ T_n(0)=\varphi_n,T_n'(0)=\psi_n\end{cases}$$

代入 $\lambda_n$ 得

$$T_n(t)=\varphi_n\cos\sqrt{\lambda_n}at+\frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}a}\sin\sqrt{\lambda_n}at+\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\int_0^\tau f_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}a(t-\tau)d\tau$$

进而由叠加原理有

$$\begin{aligned}u(x,t)=\sum_{n=1}^\infty X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^\infty&\left(\frac{1}{\sqrt{\int_0^l\left(\sin\sqrt{\lambda_n}x\right)^2dx}}\sin\sqrt{\lambda_n}x\right)\times\\ &\left(\varphi_n\cos\sqrt{\lambda_n}at+\frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}a}\sin\sqrt{\lambda_n}at+\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}a}\int_0^\tau f_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}a(t-\tau)d\tau\right)\end{aligned}$$

其中，系数由 Euler-Fourier 公式计算

$$\varphi_n(s)=\int_0^l\varphi(s)X_n(s)ds,\quad\psi_n(\xi)=\int_0^l\psi(s)X_n(s)ds,\quad f_n(t)=\int_0^l f(s,t)X_n(s)ds$$

且 $\lambda_n$ 为 $-\beta\sqrt{\lambda}=\tan\sqrt{\lambda}l$ 曲线法求解双曲线与正切函数交点的无穷序列 $\{\lambda_n\}$，并从 $\lambda_1>0$ 开始升序编号 □

### 1.3.3 直线问题与 Cauchy 问题

**定理 1.33.** （齐次双曲型方程直线上 *Cauchy* 问题古典解存在性）设齐次双曲型方程直线上 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad R^{2+} = \{(x,t)|(x \in R)(t > 0)\} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

若 $\varphi(x) \in C^2(R), \psi(x) \in C^1(R)$，则存在函数 $u(x,t) \in C^2\left(\overline{R^{2+}}\right)$ 为齐次双曲型方程直线上 *Cauchy* 问题古典解

**证明**. 利用 D'Alembert 公式 (формула Даламбера) 有

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds; (x,t) \in R^{2+}$$

下验证其确为齐次双曲型方程直线上 Cauchy 问题的解。计算得

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds \\ u_x(x,t) =& \frac{\varphi'(x-at)+\varphi'(x+at)}{2} + \frac{\psi(x+at)-\psi(x-at)}{2a} \\ u_{xx}(x,t) =& \frac{\varphi''(x-at)+\varphi''(x+at)}{2} + \frac{\psi'(x+at)-\psi'(x-at)}{2a} \\ u_t(x,t) =& a\frac{\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)}{2} + \frac{\psi(x+at)+\psi(x-at)}{2} \\ u_{tt}(x,t) =& a^2\frac{\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)}{2} + a\frac{\psi'(x+at)-\psi'(x-at)}{2} \end{aligned}$$

则把 $u_{tt}, u_{xx}$ 代入泛定方程得

$$\begin{aligned} & a^2\frac{\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)}{2} + a\frac{\psi'(x+at)-\psi'(x-at)}{2} = \\ = & \frac{a^2}{2}\left((\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)) + \frac{1}{a}(\psi'(x+at)-\psi'(x-at))\right) \end{aligned}$$

下仅需验证初始条件，由

$$u(x,t)|_{t=0} = \frac{\varphi(x)+\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_x^x \psi(s)ds = \varphi(x)$$

有 $u(x,0)$ 满足初始条件，又

$$u_t(x,t)|_{t=0} = a\frac{\varphi'(x)-\varphi'(x)}{2} + \frac{\psi(x)+\psi(x)}{2} = \psi(x)$$

则 $u_t(x,0)$ 也满足初始条件 □

**定理 1.34.** （非齐次双曲型方程直线上 *Cauchy* 问题古典解存在性）设非齐次双曲型方程直线上 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & R^{2+} = \{(x,t) : x \in R, t > 0\} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

若 $\varphi(x) \in C^2(R), \psi(x) \in C^1(R), f(x,t) \in C^1\left(\overline{R^{2+}}\right)$，则存在 $u(x,t) \in C^2\left(\overline{R^{2+}}\right)$ 满足该非齐次双曲型方程直线上 *Cauchy* 问题

**证明.** 利用 D'Alembert 公式 (фоормула Даламбера) 与 Duhamel 公式 (формула Дюамеля) 有

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau$$

直接验证即为非齐次双曲型方程 Cauchy 问题古典解 □

**定理 1.35.** （非齐次双曲型伪线性方程直线上 *Cauchy* 问题古典解存在性）设非齐次双曲型伪线性 *(квазилинейное)* 方程直线上 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(u(x,t)), & R^{2+} = \{(x,t) | (x \in R)(t > 0)\} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

若 $\varphi(x) \in C^2(R), \psi(x) \in C^1(R)$ 且 $f(s)$ 对 $s \in R$ 满足 *Lipschitz* 条件，则存在唯一的该非齐次双曲型伪线性方程直线上 *Cauchy* 问题古典解 $u(x,t) \in C^2\left(\overline{R^{2+}}\right)$

**证明.** 对于非齐次双曲型非线性方程有

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(u(s,\tau))dsd\tau$$

可以通过递归序列 $\left\{u^{(n)}(x,t)\right\}$ 收敛来建立唯一解

$$u^{(n+1)}(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f\left(u^{(n)}(s,\tau)\right)dsd\tau$$
$$(\forall (x,t))(x \in R)(t \geqslant 0) : u^{(1)}(x,t) = \varphi(x)$$

定理即证 □

**定理 1.36.** （非齐次双曲型非线性波动方程直线上 *Cauchy* 问题古典解存在唯一性）设非齐次双曲型非线性波动方程直线上 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(u(x,t)), & R^{2+} = \{(x,t) : x \in R, t > 0\} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

若 $\varphi(x)\in C^2(R),\psi(x)\in C^1(R)$ 且 $f(x,t,s)\in\mathcal{C}(\overline{R^{3+}}),R^{3+}=\{(x,s,t)|(x,s\in R)(t>0)\}$ 对 $s\in R$ 满足 *Lipschitz* 条件，则存在唯一的该非齐次双曲型非线性波动方程直线上 *Cauchy* 问题古典解 $u(x,t)\in C^2\left(\overline{R^{2+}}\right)$

**证明**. 对于非齐次双曲型非线性方程有

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau,u(s,\tau))dsd\tau$$

可以通过递归序列 $\left\{u^{(n)}(x,t)\right\}$ 收敛来建立唯一解

$$\begin{aligned}u^{(n+1)}(x,t)=&\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds\\&+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f\left(s,\tau,u^{(n)}(s,\tau)\right)dsd\tau\end{aligned}$$

而 $(\forall(x,t))(x\in R)(t\geqslant 0):u^{(1)}(x,t)=\varphi(x)$，定理即证 □

### 1.3.4 射线问题与第一类、第二类、第三类 Cauchy 问题

**定理 1.37.** （齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题解存在性）设齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases}u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t & (1.180)\\ u(0,t)=0,\quad 0<t & (1.181)\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)\quad 0<x<+\infty & (1.182)\end{cases}$$

则该齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题存在解

$$\begin{aligned}&(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant at\leqslant x)):u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds\\&(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant x\leqslant at)):u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds\end{aligned}$$

**证明**. 原齐次双曲型方程齐次边界条件第一类 Cauchy 问题 (1.180)(1.181)(1.182) 可变为同解 Cauchy 问题 (1.183)(1.184)

$$\begin{cases}v_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<t & (1.183)\\ v\left(x,0\right)=\begin{cases}\varphi(x), & 0\leqslant x<+\infty\\ -\varphi(-x), & -\infty<x<0\end{cases},\psi_t(x,0)=\begin{cases}\psi(x), & 0\leqslant x<+\infty\\ -\psi(-x), & -\infty<x<0\end{cases} & (1.184)\end{cases}$$

则由齐次双曲型方程直线上 Cauchy 问题古典解存在性 (1.33) 有

$$(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant at\leqslant x)):v(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$
$$(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant x\leqslant at)):v(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

其满足原齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第一类 Cauchy 问题 (1.180)(1.181)(1.182) □

**定理 1.38.** (齐次双曲型方程非齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题解存在性) 设齐次双曲型方程非齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases}u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t & (1.185)\\ u(0,t)=\alpha(x), \quad 0<t & (1.186)\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \quad 0<x<+\infty & (1.187)\end{cases}$$

则该齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第一类 *Cauchy* 问题存在换元解

$$\begin{aligned}(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant at\leqslant x):w(x,t)=&\frac{\hat{\varphi}(x+at)+\hat{\varphi}(x-at)}{2}\\&+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{\psi}(s)ds+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}g(s,\tau)dsd\tau\\(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant x\leqslant at):w(x,t)=&\frac{\hat{\varphi}(x+at)-\hat{\varphi}(at-x)}{2}\\&+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{\psi}(s)ds+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}g(s,\tau)dsd\tau\end{aligned}$$

其中 $g(x,t)=\begin{cases}-\alpha''(t), & 0\leqslant x<+\infty, & 0<t\\ \alpha''(t), & -\infty<x<0, & 0<t\end{cases}$ $,\hat{\varphi}(x)=\varphi(x)-\alpha(0),\hat{\psi}(x)=\psi(x)-\alpha'(0)$ 且对应换元为 $u(x,t)=w(x,t)+\alpha(t)$

**证明.** 设 $u(x,t)=w(x,t)+\alpha(t)$,则原齐次双曲型方程非齐次边界条件第一类 Cauchy 问题 (1.185)(1.186)(1.187) 变为新齐次双曲型方程非齐次边界条件第一类 Cauchy 问题

$$\begin{cases}w_{tt}(x,t)=a^2w_{xx}(x,t)+\hat{f}(t), \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t & (1.188)\\ w(0,t)=0, \quad 0<t & (1.189)\\ w(x,0)=\hat{\varphi}(x)=\varphi(x)-\alpha(0),w_t(x,0)=\hat{\psi}(x)=\psi(x)-\alpha'(0) \quad 0<x<+\infty & (1.190)\end{cases}$$

其中 $\hat{f}(t)=-\alpha''(t)$

再将新齐次双曲型方程非齐次边界条件第一类 Cauchy 问题 (1.188)(1.189)(1.190) 变为同解

Cauchy 问题 (1.191)(1.192)

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+\begin{cases} -\alpha''(t), & 0\leqslant x<+\infty, \quad 0<t \\ \alpha''(t), & -\infty<x<0, \quad 0<t \end{cases} \\ v\left(x,0\right)=\begin{cases} \hat{\varphi}(x), & 0\leqslant x<+\infty \\ -\hat{\varphi}(-x), & -\infty<x<0 \end{cases}, \psi_t(x,0)=\begin{cases} \hat{\psi}(x), & 0\leqslant x<+\infty \\ -\hat{\psi}(-x), & -\infty<x<0 \end{cases} \end{cases} \begin{matrix} (1.191) \\ (1.192) \end{matrix}$$

则由非齐次双曲型方程直线上 Cauchy 问题古典解存在性 (1.34) 有

$$\begin{aligned}(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant at\leqslant x):v(x,t)=&\frac{\hat{\varphi}(x+at)+\hat{\varphi}(x-at)}{2}\\&+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{\psi}(s)ds+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}g(s,\tau)dsd\tau\\(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant x\leqslant at):v(x,t)=&\frac{\hat{\varphi}(x+at)-\hat{\varphi}(at-x)}{2}\\&+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{\psi}(s)ds+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}g(s,\tau)dsd\tau\end{aligned}$$

其中 $g(x,t)=\begin{cases} -\alpha''(t), & 0\leqslant x<+\infty, \quad 0<t \\ \alpha''(t), & -\infty<x<0, \quad 0<t \end{cases}$

则该解为新齐次双曲型方程非齐次边界条件射线上第一类 Cauchy 问题 (1.188) 的解 (1.189)(1.190)，换元即得原齐次双曲型方程非齐次边界条件第一类 Cauchy 问题 (1.185)(1.186)(1.187) 的解 □

**定理 1.39.** （齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题解存在性）设齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t & (1.193) \\ u_x(0,t)=0, \quad 0<t & (1.194) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \quad 0<x<+\infty & (1.195) \end{cases}$$

则该齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第二类 *Cauchy* 问题存在解

$$\begin{aligned}(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant at\leqslant x)):v(x,t)=&\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds\\(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant x\leqslant at)):v(x,t)=&\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}\\&+\frac{1}{a}\int_0^{at-x}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds\end{aligned}$$

证明. 原齐次双曲型方程齐次边界条件第二类 Cauchy 问题 (1.193)(1.194)(1.195) 可变为同

解 Cauchy 问题 (1.196)(1.197)

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t & (1.196) \\ v\,(x,0) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leqslant x < +\infty \\ \varphi(-x), & -\infty < x < 0 \end{cases}, \psi_t(x,0) = \begin{cases} \psi(x), & 0 \leqslant x < +\infty \\ \psi(-x), & -\infty < x < 0 \end{cases} & (1.197) \end{cases}$$

则由齐次双曲型方程直线上 Cauchy 问题古典解存在性 (1.33) 有

$$\begin{aligned} (\forall (x,t) \in R^{2+})(0 \leqslant at \leqslant x)) : v(x,t) =& \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds \\ (\forall (x,t) \in R^{2+})(0 \leqslant x \leqslant at)) : v(x,t) =& \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} \\ &+ \frac{1}{a}\int_{0}^{at-x} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds \end{aligned}$$

其满足原齐次双曲型方程齐次边界条件射线上第二类 Cauchy 问题 (1.193)(1.194)(1.195) □

**例题 1.11.** (齐次双曲型方程非齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题) 求齐次双曲型方程非齐次边界条件射线上第三类 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t & (1.198) \\ u(0,t) - u_x(0,t) = \mu(t), \quad 0 < t & (1.199) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty & (1.200) \end{cases}$$

**解.** 原齐次双曲型方程齐次边界条件第三类 Cauchy 问题 (1.198)(1.199)(1.200) 可利用对称性并引入函数 $\chi(x), x \leqslant 0$,转为求齐次双曲型方程直线上 Cauchy 问题 (1.201)(1.202)

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t & (1.201) \\ v\,(x,0) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leqslant x < +\infty \\ \varphi(-x), & -\infty < x < 0 \end{cases}, \psi_t(x,0) = \begin{cases} \psi(x), & 0 \leqslant x < +\infty \\ \psi(-x), & -\infty < x < 0 \end{cases} & (1.202) \end{cases}$$

则由齐次双曲型方程直线上 Cauchy 问题古典解存在性 (1.33) 有

$$\begin{aligned} (\forall (x,t) \in R^{2+})(0 \leqslant at \leqslant x)) : v(x,t) =& \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds \\ (\forall (x,t) \in R^{2+})(0 \leqslant x \leqslant at)) : v(x,t) =& \frac{\varphi(x+at)+\chi(x-at)}{2} \\ &+ \frac{\psi(0)}{2a}(at-x) + \frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at} \psi(s)ds \end{aligned}$$

下选择待定函数 $\chi(x)$ 使得 $v(x,t)$ 满足原齐次双曲型方程非齐次边界条件射线上第三类

Cauchy 问题的边界条件 (1.199)。直接计算即得

$$
\begin{aligned}
(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant x\leqslant at)): v_x(x,t) =& \frac{\varphi'(x+at)+\chi'(x-at)}{2}+\frac{\psi(x+at)}{2a}-\frac{\psi(0)}{2a} \\
(\forall t\geqslant 0): v(0,t) =& \frac{\varphi(at)+\chi(-at)}{2}+\frac{\psi(0)}{2}t+\frac{1}{2a}\int_0^{at}\psi(s)ds \\
(\forall t\geqslant 0): v_x(0,t) =& \frac{\varphi'(at)+\chi'(-at)}{2}+\frac{\psi(at)}{2a}-\frac{\psi(0)}{2a}
\end{aligned}
$$

再代入边界条件 (1.199) 得

$$
\chi'(-at)-\chi(-at)=-\varphi'(at)+\varphi(at)-2\mu(t)-\frac{\psi(at)}{a}+\frac{\psi(0)}{a}+\psi(0)t+\frac{1}{a}\int_0^{at}\psi(s)ds
$$

进而利用代换 $x=-at$ 即得

$$
\chi'(x)-\chi(x)=-\varphi'(-x)+\varphi(-x)-2\mu(\frac{-x}{a})-\frac{\psi(-x)}{a}+\frac{\psi(0)}{a}-\frac{\psi(0)}{a}x+\frac{1}{a}\int_0^{-x}\psi(s)ds
$$

为了满足初始条件函数 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续性，亦即 $\chi(0)=\varphi(0)$，则解常微分方程即得

$$
\begin{aligned}
\chi(x) =& \varphi(0)e^x-\int_x^0 e^{x-s}\left[-\varphi'(-s)+\varphi(-s)-2\mu\left(\frac{-s}{a}\right)-\right. \\
&\left.-\frac{\psi(-s)}{a}+\frac{\psi(0)}{a}-\frac{\psi(0)}{a}s+\frac{1}{a}\int_0^{-s}\psi(\xi)d\xi\right]ds
\end{aligned}
$$

直接检验知边界条件 (1.199) 满足，由此 $(\forall x\geqslant 0)(\forall t\geqslant 0): u(x,t)\equiv v(x,t)$，于是

$$
\begin{aligned}
(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant at\leqslant x)): u(x,t) =& \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds \\
(\forall(x,t)\in R^{2+})(0\leqslant x\leqslant at)): u(x,t) =& \frac{\varphi(x+at)+\chi(x-at)}{2} \\
&+\frac{\psi(0)}{2a}(at-x)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(s)ds
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\chi(x) =& \varphi(0)e^x-\int_x^0 e^{x-s}\left[-\varphi'(-s)+\varphi(-s)-2\mu\left(\frac{-s}{a}\right)-\right. \\
&\left.-\frac{\psi(-s)}{a}+\frac{\psi(0)}{a}-\frac{\psi(0)}{a}s+\frac{1}{a}\int_0^{-s}\psi(\xi)d\xi\right]ds
\end{aligned}
$$

即为原齐次双曲型方程齐次边界条件第三类 Cauchy 问题 (1.198)(1.199)(1.200) 的解 □

#### 1.3.5 线性双曲型方程 Riemann 方法

## 1.4 Goursat 问题

### 1.4.1 线性方程 Goursat 问题

**定理 1.40.** （非齐次线性方程非齐次边界条件 *Goursat* 问题解存在性）设非齐次线性方程非齐次边界条件 *Goursat* 问题 *(1.203)(1.204)*

$$\begin{cases} u_{xy}(x,y)=f(x,y), \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t & (1.203)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x; \quad u(0,y)=\psi(y), \quad 0\leqslant y & (1.204)\end{cases}$$

其中 $\varphi,\psi\in\mathcal{C}^1$ 且 $f\in\mathcal{C}$，则问题 *(1.203)(1.204)* 的解为

$$u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta$$

其中 $(x,y)\in R^{++}=\{(x,y)|(x>0)(y>0)\}$

**证明.** 若在 $[0;x]$ 上对 (1.203) 第一个参数积分，在 $[0,y]$ 上对 (1.203) 第二个参数积分，即得 (1.203) 左端变为

$$\begin{aligned}\int_0^y\int_0^x u_{xy}(s,\eta)dsd\eta &= \int_0^y u_y(s,\eta)\Big|_{s=0}^{s=x} d\eta=\int_0^y\left(u_y(x,\eta)-\psi'(\eta)\right)d\eta\\ &= u(x,\eta)|_{\tau\eta=0}^{\eta=y}-\int_0^y\psi'(\eta)d\eta=u(x,t)-\varphi(x)-\psi(y)+\psi(0)\end{aligned}$$

(1.203) 右侧积分则得累次积分

$$\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta$$

即得问题 (1.203)(1.204) 的解 □

**定理 1.41.** （非齐次线性方程非齐次边界条件 *Goursat* 问题唯一解存在第一充分条件）设非齐次线性方程非齐次边界条件 *Goursat* 问题 *(1.205)(1.206)*

$$\begin{cases} u_{xy}(x,y)=f(x,y), \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t & (1.205)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x; \quad u(0,y)=\psi(y), \quad 0\leqslant y & (1.206)\end{cases}$$

若满足

*1)*$\varphi\in\mathcal{C}^1\left(\overline{R^+}\right),\psi\in\mathcal{C}^1\left(\overline{R^+}\right)$

*2)*$\varphi(0)=\psi(0)$

*3)*$f(x,t)\in C\left(\overline{R^{++}}\right)$

则有且仅有一个 $u(x,y)\in\mathcal{C}^1\left(\overline{R^{++}}\right)$ 为 Goursat 问题 (1.205)(1.206) 的解，即

$$u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta$$

其中 $(x,y)\in R^{++}=\{(x,y)|(x>0)(y>0)\}$，且其在 $\overline{R^{++}}$ 上有连续导数 $u_{xy}(x,y)$

**定理 1.42.** （非齐次线性方程非齐次边界条件 Goursat 问题唯一解存在第二充分条件）设非齐次线性方程非齐次边界条件 Goursat 问题 (1.207)(1.208)

$$\begin{cases} u_{xy}(x,y)=f(x,y), \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t & (1.207)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x; \quad u(0,y)=\psi(y), \quad 0\leqslant y & (1.208)\end{cases}$$

若满足

1)$\varphi\in\mathcal{C}^2\left(\overline{R^+}\right),\psi\in\mathcal{C}^2\left(\overline{R^+}\right)$

2)$\varphi(0)=\psi(0)$

3)$f(x,t)\in C\left(\overline{R^{++}}\right)$ 且 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在 $\overline{R^{++}}$ 上可积

则有且仅有一个 $u(x,y)\in\mathcal{C}^2\left(\overline{R^{++}}\right)$ 为 Goursat 问题 (1.207)(1.208) 的解，即

$$u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta$$

其中 $(x,y)\in R^{++}=\{(x,y)|(x>0)(y>0)\}$

**定理 1.43.** （线性方程非齐次边界条件 Goursat 问题唯一解存在第一充分条件）设线性方程非齐次边界条件 Goursat 问题 (1.209)(1.210)

$$\begin{cases} u_{xy}=a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u+f(x,y), \quad 0\leqslant x, \quad 0\leqslant y & (1.209)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x; \quad u(0,y)=\psi(y), \quad 0\leqslant y & (1.210)\end{cases}$$

若满足

1)$\varphi,\psi\in\mathcal{C}^1\left(\overline{R^+}\right)$

2)$\varphi(0)=\psi(0)$

3)$f(x,y)\in\mathcal{C}\left(\overline{R^{++}}\right)$

4)$a,b,c\in\mathcal{C}\left(\overline{R^{++}}\right),a_x,b_y\in\mathcal{C}\left(\overline{R^{++}}\right)$

则有且仅有一个 $u(x,y)\in\mathcal{C}^1\left(\overline{R^{++}}\right)$

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y(a(x,\eta)u(x,\eta)-a(0,\eta)\psi(\eta))d\eta\\&+\int_0^x(b(s,y)u(s,y)-b(s,0)\varphi(s))ds-\int_0^y\int_0^x[a_x(s,\eta)+b_y(s,\eta)-c(s,\eta)]u(s,\eta)dsd\eta\\&+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta, \quad x,y\geqslant 0\end{aligned}$$

为 *Goursat* 问题 *(1.209)(1.210)* 的解，且有 $u_{xy}(x,y)$ 在 $\overline{R^{++}}$ 上连续

**证明.** 对左部积分，即得

$$\int_0^y\int_0^x u_{xy}(s,\eta)dsd\eta=\int_0^y u_y(s,\eta)\Big|_{s=0}^{s=x}d\eta=\int_0^y(u_y(x,\eta)-\psi'(\eta))\,d\eta$$
$$=u(x,\eta)|_{\eta=0}^{\eta=y}-\int_0^y\psi'(\eta)d\eta=u(x,t)-\varphi(x)-\psi(y)+\psi(0)$$

现合并右部前两项

$$\begin{aligned}&\int_0^y\left(\int_0^x a(s,\eta)u_x(s,\eta)ds\right)d\eta+\int_0^x\left(\int_0^y b(s,\eta)u_y(s,\eta)d\eta\right)ds\\=&\int_0^y\left(a(s,\eta)u(s,\eta)|_{s=0}^{s=x}-\int_0^x a_x(s,\eta)u(s,\eta)ds\right)d\eta\\&+\int_0^x\left(b(s,\eta)u(s,\eta)|_{\eta=0}^{\eta=y}-\int_0^y b_y(s,\eta)u(s,\eta)d\eta\right)ds\end{aligned}$$

则方程可改写为

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y(a(x,\eta)u(x,\eta)-a(0,\eta)\psi(\eta))d\eta\\&+\int_0^x(b(s,y)u(s,y)-b(s,0)\varphi(s))ds-\int_0^y\int_0^x[a_x(s,\eta)+b_y(s,\eta)-c(s,\eta)]u(s,\eta)dsd\eta\\&+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta,\quad x,y\geqslant 0\end{aligned}$$

再次利用递归序列即得

$$\begin{aligned}u^{(n+1)}(x,y)=&\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\left(a(x,\eta)u^{(n)}(x,\eta)-a(0,\tau)\psi(\eta)\right)d\eta\\&+\int_0^x\left(b(s,y)u^{(n)}(s,y)-b(s,0)\varphi(s)\right)ds+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta\\&-\int_0^y\int_0^x[a_x(s,\eta)+b_y(s,\eta)-c(s,\eta)]u^{(n)}(s,\eta)dsd\eta;\quad x,y\geqslant 0\end{aligned}$$

则解存在且有连续导数 □

**定理 1.44.** （线性方程非齐次边界条件 *Goursat* 问题唯一解存在第二充分条件）设线性方程非齐次边界条件 *Goursat* 问题 *(1.211)(1.212)*

$$\begin{cases}u_{xy}=a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u+f(x,y),\quad 0\leqslant x,\quad 0\leqslant y & (1.211)\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x;\quad u(0,y)=\psi(y),\quad 0\leqslant y & (1.212)\end{cases}$$

若满足

*1)*$\varphi,\psi\in C^1\left(\overline{R^+}\right)$

*2)*$\varphi(0)=\psi(0)$

*3)*$f(x,y)\in\mathcal{C}\left(\overline{R^{++}}\right)$

*4)*$a,b,c\in\mathcal{C}\left(\overline{R^{++}}\right)$

则有且仅有一个 $u(x,y)\in\mathcal{C}^1\left(\overline{R^{++}}\right)$

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta\\&+\int_0^y\int_0^x[a(s,\eta)u_x(s,\eta)+b(s,\eta)u_y(s,\eta)+c(s,\eta)u(s,\eta)]dsd\eta\end{aligned}$$

为 *Goursat* 问题 *(1.211)(1.212)* 的解，且有 $u_{xy}(x,y)$ 在 $\overline{R^{++}}$ 上连续

**证明**. 存在性：积分右部的第一项，则得积分方程

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)++c(s,\eta)u(s,\eta)]dsd\eta+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta\\&+\int_0^y\int_0^x[a(s,\eta)u_x(s,\eta)+b(s,\eta)u_y(s,\eta)\end{aligned}$$

再对 $x$ 微分，后相对于 $y$ 微分得

$$\begin{aligned}u_x(x,y)&=\varphi'(x)+\int_0^y[a(x,\eta)u_x(x,\eta)+b(x,\eta)u_y(x,\eta)+c(x,\eta)u(x,\eta)]d\eta+\int_0^y f(x,\eta)d\eta\\u_y(x,y)&=\psi'(y)+\int_0^x[a(s,y)u_x(s,y)+b(s,y)u_y(s,y)+c(s,y)u(s,y)]ds+\int_0^x f(s,y)ds\end{aligned}$$

其中 $x,y\geqslant 0$

对于 $u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y)$ 有积分方程组

$$\left\{\begin{aligned}u(x,y)=&\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta\\&+\int_0^y\int_0^x\left[a(s,\eta)u_x(s,\eta)+b(s,\eta)u_y(s,\eta)+c(s,\eta)u(s,\eta)\right]dsd\tau\\u_x(x,y)=&\varphi'(x)+\int_0^y f(x,\eta)d\eta\\&+\int_0^y[a(x,\eta)u_x(x,\eta)+b(x,\eta)u_y(x,\eta)+c(x,\eta)u(x,\eta)]d\eta\\u_y(x,y)=&\psi'(y)+\int_0^x f(s,y)ds\\&+\int_0^x[a(s,y)u_x(s,y)+b(s,y)u_y(s,y)+c(s,y)u(s,y)]ds\end{aligned}\right.$$

下利用方程组构造一个收敛到解的序列 $u^{(n)}(x,y)$：

$$u^{(0)}(x,y)\equiv 0;\quad u^{(1)}(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta$$

$$u^{(n+1)}(x,y)=u^{(1)}(x,y)+\int_0^y\int_0^x\left[a(s,\eta)\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}(s,\eta)+b(s,\eta)\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}(s,\eta)+c(s,\eta)u^{(n)}(s,\eta)\right]dsd\eta$$

$$\frac{\partial u^{(n+1)}(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial x}+\int_0^y[a(x,\eta)\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}(x,\eta)+b(x,\eta)\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}(x,\eta)+c(x,\eta)u^{(n)}(x,\eta)]d\tau$$

$$\frac{\partial u^{(n+1)}(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial u^{(1)}(x,y)}{\partial y}+\int_0^x[a(s,y)\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}(s,y)+b(s,y)\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}(s,y)+c(s,y)u^{(n)}(s,y)]ds$$

下证序列 $\left\{u^{(n)}(x,y)\right\},\left\{u_x^{(n)}(x,y)\right\},\left\{u_y^{(n)}(x,y)\right\}$ 一致收敛。考虑

$$\begin{aligned}
z^{(n)}(x,y)=&u^{(n+1)}(x,y)-u^{(n)}(x,y)\\
=&\int_0^y\int_0^x[a(s,\eta)\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x}(s,\eta)+b(s,\eta)\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial y}(s,\eta)+c(s,\eta)z^{(n-1)}(s,\eta)]dsd\eta\\
\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x}(x,y)=&\frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}(x,y)\\
=&\int_0^y[a(x,\eta)\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x}(x,\eta)+b(x,\eta)\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial y}(x,\eta)+c(x,\eta)z^{(n-1)}(x,\eta)]d\tau\\
\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y}(x,y)=&\frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}(x,y)\\
=&\int_0^x[a(s,y)\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial x}(s,y)+b(s,y)\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial y}(s,y)+c(s,y)z^{(n-1)}(s,y)]ds
\end{aligned}$$

再设 $(x,y)\in\Pi_{L,L}=\{(x,y):0\leqslant x,y\leqslant L\}$ 且对 $\forall L>0$，设

$$\begin{aligned}
M&=\max_{(x,y)\in\Pi_{L,L}}\{|a(x,y)|,|b(x,y)|,|c(x,y)|\}\\
H&=\max_{(x,y)\in\Pi_{L,L}}\left\{\left|z^{(0)}(x,y)\right|,\left|\frac{\partial z^{(0)}}{\partial x}(x,y)\right|,\left|\frac{\partial z^{(0)}}{\partial y}(x,y)\right|\right\}
\end{aligned}$$

显然对于 $n=1$ 满足估计

$$\begin{aligned}
\left|z^{(1)}(x,y)\right|&<3HMxy<3HM\frac{(x+y)^2}{2!}\\
\left|z_x^{(1)}(x,y)\right|&<3HMy<3HM(x+y)\\
\left|z_y^{(1)}(x,y)\right|&<3HMx<3HM(x+y)
\end{aligned}$$

并设估计对于 $n\in\mathbb{N}$ 与某个 $K\geqslant 0$ 成立，则有

$$\begin{aligned}\left|z^{(n)}(x,y)\right|&<3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\\\left|z_x^{(n)}(x,y)\right|&<3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n}}{n!}\\\left|z_y^{(n)}(x,y)\right|&<3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n}}{n!}\end{aligned}$$

假设当 $K\geqslant 1$ 时递归估计成立，则有

$$\begin{aligned}\left|z^{(n)}(x,y)\right|&<3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\\\left|z_x^{(n)}(x,y)\right|&<3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n}}{n!}\\\left|z_y^{(n)}(x,y)\right|&<3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n}}{n!}\end{aligned}$$

而当 $K\geqslant 2L+2$ 时有

$$\begin{aligned}\left|z^{(n+1)}(x,y)\right|&<3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+y}{n+3}+2\right)<3HM^{n+1}K^{n}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\\&<\frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}\\\left|z_x^{(n+1)}(x,y)\right|&<3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right)<3HM^{n+1}K^{n}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\\&<\frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}\\\left|z_y^{(n+1)}(x,y)\right|&<3HM^{n+1}K^{n}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

则由估计

$$\left|z^{(n)}(x,y)\right|<\frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!};\left|z_x^{(n)}(x,y)\right|,\left|z_y^{(n)}(x,y)\right|<\frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n}}{n!}$$

即有函数序列

$$\begin{aligned}\left\{u^{(n)}(x,y)\right\}&=\left\{u^{(0)}(x,y)+z^{(1)}(x,y)+z^{(2)}(x,y)+..+z^{(n-1)}(x,y)\right\},\\\left\{u_x^{(n)}(x,y)\right\}&=\left\{u_x^{(0)}(x,y)+z_x^{(1)}(x,y)+z_x^{(2)}(x,y)+..+z_x^{(n-1)}(x,y)\right\},\\\left\{u_y^{(n)}(x,y)\right\}&=\left\{u_y^{(0)}(x,y)+z_y^{(1)}(x,y)+z_y^{(2)}(x,y)+..+z_y^{(n-1)}(x,y)\right\}\end{aligned}$$

由控制级数

$$\frac{3H}{K^2M}e^{2KLM}=\frac{3H}{K^2M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2KLM)^n}{n!};\frac{3H}{K}e^{2KLM}=\frac{3H}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2KLM)^n}{n!}$$

一致收敛到极限函数，其表示为

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u^{(n)}(x,y);\quad v(x,y)=\lim_{n\to\infty}u_x^{(n)}(x,y);\quad w(x,y)=\lim_{n\to\infty}u_y^{(n)}(x,y)$$

在定义 $u^{(n)},u_x^{(n)},u_y^{(n)}$ 的递归公式组上，令 $n\to\infty$ 即得 $\forall x,y\in\Pi_{L,L}$ 时有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=u^{(1)}(x,y)+\int_0^y\int_0^x[a(s,\eta)v(s,\eta)+b(s,\eta)w(s,\eta)+c(s,\eta)u(s,\eta)]dsd\eta\\v(x,y)&=u_x^{(1)}(x,y)+\int_0^y[a(x,\eta)v(x,\eta)+b(x,\eta)w(x,\eta)+c(x,\eta)u(x,\eta)]d\tau\\w(x,y)&=u_y^{(1)}(x,y)+\int_0^x[a(s,y)v(s,y)+b(s,y)w(s,y)+c(s,y)u(s,y)]ds\end{aligned}$$

由此即得 $v(x,y)=u_x(x,y),w(x,y)=u_y(x,y)$ 且 $u(x,y)$ 满足积分-微分方程

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta)dsd\eta\\&+\int_0^y\int_0^x[a(s,\eta)u_x(s,\eta)+b(s,\eta)u_y(s,\eta)+c(s,\eta)u(s,\eta)]dsd\eta\end{aligned}$$

由 $L>0$，$u(x,y)$ 满足泛定方程 (1.211) 与边界条件 (1.212)

唯一性：设存在问题 (1.211)(1.212) 的两个解 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$，二者的差 $U(x,y)=u(x,y)-v(x,y)$ 满足方程

$$U(x,y)=\int_0^y\int_0^x[a(s,\eta)U_x(s,\eta)+b(s,\eta)U_y(s,\eta)+c(s,\eta)U(s,\eta)]\,dsd\eta$$

并记函数模上界为 $\widehat{H}$，亦即

$$\widehat{H}=\max_{(x,y)\in\Pi_{L,L}}\{|U(x,y)|,|U_x(x,y)|\,,|U_y(x,y)|\}$$

设 $\forall L>0$ 且 $\Pi_{L,L}=\{(x,y):0\leqslant x,y\leqslant L\}$，由上述讨论即有

$$(\forall n\in\mathbb{N}):|U(x,y)|<\frac{3\widehat{H}}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

因此 $U(x,y)\equiv 0$，亦即 $(\forall x,y\geqslant 0):u(x,y)=v(x,y)$ $\square$

### 1.4.2 非线性方程 Goursat 问题

**定理 1.45.** （非线性方程非齐次边界条件 *Goursat* 问题唯一解存在充分条件）设非线性方程非齐次边界条件 *Goursat* 问题 *(1.213)(1.214)*

$$\begin{cases} u_{xy} = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u + f(x,y,u); \quad x,y \in [0;d] & (1.213) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0;d]; \quad u(0,y) = \psi(y), \quad y \in [0;d] & (1.214) \end{cases}$$

其中 $\varphi,\psi \in \mathcal{C}^1$ 且 $a,b,c,f \in \mathcal{C}$，设 $\Pi_{d,d} = \{(x,y) : 0 \leqslant x,y \leqslant d\}$ 若

*1)*$\varphi,\psi \in \mathcal{C}^1[0;d]$

*2)*$\varphi(0) = \psi(0)$

*3)*$f(x,y,s) \in \mathcal{C}\left(\Pi_{d,d} \times R\right)$ 且 $f(x,y,s)$ 对 $s \in R$ 满足 *Lipschitz* 条件，*Lipschitz* 常数 $L > 0$

*4)*$a,b,c \in C\left(\Pi_{d,d}\right)$

则有且仅有一个 $u(x,y) \in \mathcal{C}^1\left(\Pi_{d,d}\right)$ 为 *Goursat* 问题 *(1.213)(1.214)* 在 $\Pi_{d,d}$ 上的解，且在 $\Pi_{d,d}$ 上有连续导数

**证明.** 对左部积分即得

$$\begin{aligned}\int_0^y \int_0^x u_{xy}(s,\eta)dsd\eta &= \int_0^y u_y(s,\eta)\Big|_{s=0}^{s=x} d\eta = \int_0^y \left(u_y(x,\eta) - \psi'(\eta)\right)d\eta \\ &= u(x,\eta)|_{\eta=0}^{\eta=y} - \int_0^y \psi'(\eta)d\eta = u(x,t) - \varphi(x) - \psi(y) + \psi(0)\end{aligned}$$

方程可改写为

$$\begin{aligned}u(x,y) =& \varphi(x) + \psi(y) - \psi(0) + \int_0^y \int_0^x f(s,\eta,u(s,\eta))dsd\eta \\ &+ \int_0^y \int_0^x \left[a(s,\eta)u_x(s,\eta) + b(s,\eta)u_y(s,\eta) + c(s,\eta)u(s,\eta)\right]dsd\eta\end{aligned}$$

对 $x$ 微分后，再对 $y$ 微分即得

$$\begin{aligned}u_x(x,y) =& \varphi'(x) + \int_0^y f(x,\eta,u(x,\eta))d\eta \\ &+ \int_0^y \left[a(x,\eta)u_x(x,\eta) + b(x,\eta)u_y(x,\eta) + c(x,\eta)u(x,\eta)\right]d\eta, \quad x,y \in [0;d] \\ u_y(x,y) =& \psi'(y) + \int_0^x f(s,y,u(s,y))ds \\ &+ \int_0^x \left[a(s,y)u_x(s,y) + b(s,y)u_y(s,y) + c(s,y)u(s,y)\right]ds \quad x,y \in [0;d]\end{aligned}$$

则有方程组

$$\begin{cases} u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \psi(0) + \int_0^y \int_0^x f(s,\eta,u(s,\eta))dsd\eta \\ \qquad + \int_0^y \int_0^x [a(s,\eta)u_x(s,\eta) + b(s,\eta)u_y(s,\eta) + c(s,\eta)u(s,\eta)]\,dsd\eta \\ u_x(x,y) = \varphi'(x) + \int_0^y f(x,\eta,u(x,\eta))d\eta \\ \qquad + \int_0^y [a(x,\eta)u_x(x,\eta) + b(x,\eta)u_y(x,\eta) + c(x,\eta)u(x,\eta)]\,d\eta, \quad x,y \in [0;d] \\ u_y(x,y) = \psi'(y) + \int_0^x f(s,y,u(s,y))ds \\ \qquad + \int_0^x [a(s,y)u_x(s,y) + b(s,y)u_y(s,y) + c(s,y)u(s,y)]\,ds \quad x,y \in [0;d] \end{cases}$$

下利用该方程组构造序列 $u^{(n)}(x,y), u_x^{(n)}(x,y), u_y^{(n)}(x,y)$:

$$\begin{cases} u^{(n+1)}(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \psi(0) + \int_0^y \int_0^x f(s,\eta,u(s,\eta))dsd\eta \\ \qquad + \int_0^y \int_0^x \left[a(s,\eta)u_x^{(n)}(s,\eta) + b(s,\eta)u_y^{(n)}(s,\eta) + c(s,\eta)u^{(n)}(s,\eta)\right] dsd\eta \\ u_x^{(n+1)}(x,y) = \varphi'(x) + \int_0^y f(x,\eta,u^{(n)}(x,\eta))d\eta \\ \qquad + \int_0^y \left[a(x,\eta)u_x^{(n)}(x,\eta) + b(x,\eta)u_y^{(n)}(x,\eta) + c(x,\eta)u^{(n)}(x,\eta)\right] d\eta, \quad x,y \in [0;d] \\ u_y^{(n+1)}(x,y) = \psi'(y) + \int_0^x f(s,y,u^{(n)}(s,y))ds \\ \qquad + \int_0^x \left[a(s,y)u_x^{(n)}(s,y) + b(s,y)u_y^{(n)}(s,y) + c(s,y)u^{(n)}(s,y)\right] ds \quad x,y \in [0;d] \end{cases}$$

其中 $u^{(0)}(x,y) \equiv 0$。由 $u^{(0)}(x,y) \equiv 0$ 即有

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x,y) &= \varphi(x) + \psi(y) - \psi(0) + \int_0^y \int_0^x f(s,\eta,0)dsd\eta \\ u_x^{(1)}(x,y) &= \varphi'(x) + \int_0^y f(x,\eta,0)d\eta \\ u_y^{(1)}(x,y) &= \psi'(y) + \int_0^x f(s,y,0)ds \end{aligned}$$

由此设

$$M = \max_{(x,y)\in\Pi_{d,d}} \{|a(x,y)|, |b(x,y)|, |c(x,y)|\}$$

$$H = \max_{(x,y)\in\Pi_{d,d}} \left\{ \left|z^{(0)}(x,y)\right|, \left|\frac{\partial z^{(0)}}{\partial x}(x,y)\right|, \left|\frac{\partial z^{(0)}}{\partial y}(x,y)\right| \right\}$$

当 $n=1$ 时满足估计

$$
\begin{aligned}
\left|z^{(1)}(x,y)\right| &< H(3M+L)xy < H(3M+L)\frac{(x+y)^2}{2!}\\
\left|z_x^{(1)}(x,y)\right| &< H(3M+L)y < H(3M+L)(x+y)\\
\left|z_y^{(1)}(x,y)\right| &< H(3M+L)x < H(3M+L)(x+y)
\end{aligned}
$$

下记 $z^{(n)}(x,y)=u^{(n+1)}(x,y)-u^{(n)}(x,y)$，则有

$$
\begin{cases}
z^{(n)}(x,y)=\displaystyle\int_0^y\int_0^x\left[a(s,\eta)z_x^{(n-1)}(s,\eta)+b(s,\eta)z_y^{(n-1)}(s,\eta)+c(s,\eta)z^{(n)}(s,\eta)\right]dsd\eta\\
\qquad\qquad\quad+\displaystyle\int_0^y\int_0^x\left[f\left(s,\eta,u^{(n)}(s,\eta)\right)-f\left(s,\eta,u^{(n-1)}(s,\eta)\right)\right]dsd\eta\\
z_x^{(n)}(x,y)=\displaystyle\int_0^y\left[a(x,\eta)z_x^{(n-1)}(x,\eta)+b(x,\eta)z_y^{(n-1)}(x,\eta)+c(x,\eta)z^{(n-1)}(x,\eta)\right]d\tau\\
\qquad\qquad\quad+\displaystyle\int_0^y\left[f\left(x,\eta,u^{(n)}(x,\eta)\right)-f\left(x,\eta,u^{(n-1)}(x,\eta)\right)\right]d\eta\\
z_y^{(n)}(x,y)=\displaystyle\int_0^x\left[a(s,y)z_x^{(n-1)}(s,y)+b(s,y)z_y^{(n-1)}(s,y)+c(s,y)z^{(n-1)}(s,y)\right]ds\\
\qquad\qquad\quad+\displaystyle\int_0^x\left[f\left(s,y,u^{(n)}(s,\eta)\right)-f\left(s,y,u^{(n-1)}(s,\eta)\right)\right]ds
\end{cases}
$$

则有估计 $\left|z^{(n)}(x,y)\right|,\left|z_x^{(n)}(x,y)\right|,\left|z_y^{(n)}(x,y)\right|,n>1$

当 $K\geqslant 1$ 时递归序列满足

$$
\begin{aligned}
\left|z^{(n)}(x,y)\right| &< H(3M+L)^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\\
\left|z_x^{(n)}(x,y)\right| &< H(3M+L)^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n}}{n!}\\
\left|z_y^{(n)}(x,y)\right| &< H(3M+L)^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n}}{n!}
\end{aligned}
$$

而当 $K\geqslant 2d+2$ 时有

$$
\begin{aligned}
\left|z^{(n+1)}(x,y)\right| &< H(3M+L)^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+y}{n+3}+2\right)\\
&< H(3M+L)^{n+1}K^{n}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}<\frac{H}{(3M+L)K^2}\frac{((3M+L)2Kd)^{n+2}}{(n+2)!}\\
\left|z_x^{(n+1)}(x,y)\right| &< H(3M+L)^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right)\\
&< H(3M+L)^{n+1}K^{n}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{H}{K}\frac{((3M+L)2Kd)^{n+1}}{(n+1)!}\\
\left|z_y^{(n+1)}(x,y)\right| &< \frac{H}{K}\frac{(2(3M+L)Kd)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

则由估计

$$\left|z^{(n)}(x,y)\right| < \frac{H}{(3M+L)K^2}\frac{((3M+L)2Kd)^{n+2}}{(n+2)!}$$
$$\left|z_x^{(n)}(x,y)\right|,\left|z_y^{(n)}(x,y)\right| < \frac{H}{K}\frac{((3M+L)2Kd)^{n+1}}{(n+1)!}$$

有函数序列

$$\left\{u^{(n)}(x,y)\right\} = \left\{u^{(0)}(x,y)+z^{(1)}(x,y)+z^{(2)}(x,y)+..+z^{(n-1)}(x,y)\right\}$$
$$\left\{u_x^{(n)}(x,y)\right\} = \left\{u_x^{(0)}(x,y)+z_x^{(1)}(x,y)+z_x^{(2)}(x,y)+..+z_x^{(n-1)}(x,y)\right\}$$
$$\left\{u_y^{(n)}(x,y)\right\} = \left\{u_y^{(0)}(x,y)+z_y^{(1)}(x,y)+z_y^{(2)}(x,y)+..+z_y^{(n-1)}(x,y)\right\}$$

由控制级数

$$\frac{H}{(3M+L)K^2}e^{(3M+L)2Kd} = \frac{H}{(3M+L)K^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((3M+L)2Kd)^n}{n!}$$
$$\frac{3H}{K}e^{(3M+L)2Kd} = \frac{3H}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((3M+L)2Kd)^n}{n!}$$

一致收敛到极限函数

在定义 $u^{(n)},u_x^{(n)},u_y^{(n)}$ 的递归公式组上，令 $n\to\infty$ 即得 $\forall x,y\in\Pi_{d,d}$ 时有

$$\begin{aligned} u(x,y) =& \varphi(x)+\psi(y)-\psi(0)+\int_0^y\int_0^x f(s,\eta,u(s,\eta))dsd\eta \\ &+\int_0^y\int_0^x \left[a(s,\eta)u_x(s,\eta)+b(s,\eta)u_y(s,\eta)+c(s,\eta)u(s,\eta)\right]dsd\eta \end{aligned}$$

且 $u(x,y)$ 满足泛定方程 (1.213) 与边界条件 (1.214)

唯一性：设存在 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 为问题 (1.213)(1.214) 的解，则差 $U(x,y)=u(x,y)-v(x,y)$ 满足方程

$$\begin{aligned} U(x,y) =& \int_0^y\int_0^x \left[a(s,\eta)U_x(s,\eta)+b(s,\eta)U_y(s,\eta)+c(s,\eta)U(s,\eta)\right]dsd\eta \\ &+\int_0^y\int_0^x [f(s,\eta,u(s,\eta))-f(s,\eta,v(s,\eta))]dsd\eta \end{aligned}$$

这时设 $\widehat{H}=\max\limits_{(x,y)\in\Pi_{d,d}}\{|U(x,y)|,|U_x(x,y)|,|U_y(x,y)|\}$，则由上述讨论即得

$$(\forall n\in\mathbb{N}):|U(x,y)| < \frac{\widehat{H}}{(3M+L)K^2}\frac{((3M+L)2Kd)^{n+2}}{(n+2)!}$$

因此 $U(x,y)\equiv 0$，则 $(\forall x,y)\in[0;d]:u(x,y)=v(x,y)$ □

## 1.5 Laplace 方程与椭圆型方程

## References

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики. Изд. 6-е, испр. и доп. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.

[2] 顾樵, 数学物理方法 (Mathematical Methods for Physics)[M]. 北京: 科学出版社, 2012.1.

[3] 季孝达, 薛兴恒, 陆英, 宋立功, 数学物理方程（第二版）[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[4] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 郑宋穆, 谭永基, 数学物理方程（第三版）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.7.