数学分析（三）-多重积分

多重积分论

组织：深北莫数学学社分析小组

时间：2022/10/18

宗旨：执象而求，咫尺千里

时间是个常数，但对勤奋者来说，是个‘变数’。用‘分’来计算时间的人比用‘小时’来计算时间的人时间多 59 倍——雷巴柯夫

目录

第 1 章 前置内容

1.1 分析引论

1.1.1 基础通识

定理 1.1 (Heine-Borel-Lebesgue 定理)

有界闭区间 $[a,b]$ 的任何开覆盖必有有限子覆盖

证明 设 $(\omega_i)_{i\in I}$ 为覆盖 $[a,b]$ 的开集族，则有 $a<b$（当 $a=b$ 时定理显然）。令 A 为 $[a,b]$ 中有下列性质的 x 的全体：区间 $[a,x]$ 可被有限个开集 ω_i 所覆盖。于是定理证明转化为求证 $b\in A$。显然 A 非空，因为其包含 a，同时它又有上界 b，则其有属于 $[a,b]$ 的上确界 m

注意到 $\exists i_0\in I: m\in\omega_{i_0}$，而 ω_{i_0} 是 m 的邻域，且在这一邻域中，在 m 的左边存在 A 的点 x，使得 $[x,m]\subset\omega_{i_0}$，对于这样的 $x,[a,x]$ 具有有限个 ω_i 的覆盖，从而 $[a,m]=[a,x]\cup[x,m]$ 也有这样的覆盖，但是任何覆盖 $[a,m]$ 的有限个 ω_i 的子族也覆盖某一区间 $[a,m']$，其中 $m'>m$。这与 m 是 A 的上确界的事实仅当 $m=b$ 时才相容

注 也可陈述为：对于 $\mathbb{R}$ 的任何使 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i\in I}\omega_i$ 的开集族 $(\omega_i)_{i\in I}$，存在有限子集 $J\subset I<$ 使得 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i\in J}\omega_i$

定理 1.2 (Bolzano-Weierstrass 定理)

对于任何有界闭区间 $[a,b],[a,b]$ 的任何无限子集 X 在 $[a,b]$ 中有聚点

证明 若 $[a,b]$ 中任何点 x 都不是 X 的聚点，则任何 x 都具有开邻域 V_x，其中至多包含 X 的一个点，即 x 本身。上述 V_x 构成 $[a,b]$ 开覆盖；由定理 (1.1)，则存在有限个 V_x，例如 $V_{x_i}(i=1,2,\cdots,n)$，覆盖 $[a,b]$。因此 X 至多包含 n 个点 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$

注 也可等价陈述为：$[a,b]$ 的任何在 $[a,b]$ 上没有聚点的子集是有限集

定理 1.3 (Heine-Borel-Lebesgue 定理/Лемма Гейне-Бореля)

紧集开覆盖必有有限子覆盖

证明 反证：设 M 为紧集 (compact set)，$\sum$ 为其不能选出有限子覆盖的开覆盖。将 M 包围在一个矩形中，用分割线将该矩形分为相等的矩形，并考虑集合 M 与每个矩形的交集。这些交集是紧的（或空的），并且其中至少有一个交集没有有限覆盖（否则命题已经证明），记该矩形为 M_1。对 M_1 应用相同操作，依此类推，要么在某个步骤结束得证，要么得到一个无穷的嵌套紧集序列 M_k（包含在相应的嵌套矩形中，其直径趋于零）且其中每个都没有有限覆盖。由 Bolzano-Weierstrass 定理，该序列会有一个极限点会属于集合 M，该点连同从某个数开始的一些邻域，将属于集合系 $\sum$ 的一个集合，这些邻域将包含所有集合 M_k，则这些集合有有限覆盖，矛盾

注 证明同一维情形的定理 (1.1) 的证明是类似的

1.1.2 逐项积分

定理 1.4

（函数序列逐项积分充分条件）设 D 为 E^m 上封闭有界可积区域，函数序列 $\{f_n(x)\}$ 函数均在 D 上可积且一致收敛向函数 $f(x)$。则函数 $f(x)$ 在 D 上可积，且有等式

$$\int\limits_D f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_D f_n(x)dx$$

证明 （概述）注意 $f(x)$ 有界，某个号码开始满足 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，则 $f_n(x)$ 有界。类似一维情形证明 $f(x)$ 可积性：$f(x)$ 与 $f_n(x)$ 相差不大，通过选择划分 $f_n(x)$ 上下 Darboux 和可以不断接近。仍有待证明对于任意 $\varepsilon>0$ 能找到 n 对于任意区域划分满足 $S-s<S_n-s_n+\varepsilon$。与一维情形一样证明每个划分的子区域中振幅 $\omega_i(f)\leqslant\omega_i(f_n)+\varepsilon$，以下的转变容易说明

定理 1.5

（函数级数逐项积分充分条件）设 D 为 E^m 上封闭有界可积区域，函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 函数均在 D 上可积且一致收敛向函数 $S(x)$。则函数 $S(x)$ 在 D 上可积，且有等式

$$\int_D S(x)dx=\int_D\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_D u_k(x)dx$$

1.2 积分引论

1.2.1 不定积分

例题 1.1 （1703）求积分

$$\int\frac{dx}{\sin x}$$

解 解一：

凑微分求积如下：

$$I=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

解 解二：（万能代换）

令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，则有

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

于是可求积如下：

$$I=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

注 答案还可有其他形式，几个常用答案如下：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C$$

例题 1.2 （1704）求

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

解 利用代换 $x+\dfrac{\pi}{2}=t$ 就有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)},$$

于是已将问题归结为例题 (1.1)

注 几个常用答案如下：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\ln\left|\frac{\cos x}{1-\sin x}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C$$

例题 1.3 （1820/分部积分循环现象）求

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

解 利用 $\mathrm{d}\left[\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]=3x\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$，由分部积分法

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}\left[\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\\ &= \frac{1}{3}x\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int x^2\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

将右边第二项移到左边，对第三项利用公式即得

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{a^2}{8}x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

例题 1.4 （1886/部分分式分解）求

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$$

解 将分母因式分解得

$$\begin{aligned}x^6+1&=\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right)^2-3x^2\right]\\&=\left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)\end{aligned}$$

于是被积函数有部分分式展开如下：

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1}$$

两边乘 x^2+1，然后令 $x\to\mathrm{i}$ 得 $\frac{1}{3}=a\mathrm{i}+b$ ，于是同时得到 $a=0,b=\frac{1}{3}$，然后有差

$$\frac{1}{x^6+1}-\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{-x^2+2}{3\left(x^4-x^2+1\right)}$$

接着计算展开式

$$\frac{-x^2+2}{3\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1}$$

利用 x 换 $-x$ 时左边不变，而右边分母对换，有 $A=-C$，$B=D$。又令 $x=0$ 代入，得 $B+D=\dfrac{2}{3}$，则 $B=D=\dfrac{1}{3}$。再令 $x=\mathrm{i}$ 代入，并利用 $B=D$ 得

$$\frac{1}{3}=\frac{A\mathrm{i}+B}{-\sqrt{3}\mathrm{i}}+\frac{C\mathrm{i}+D}{\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(C-A)$$

即可解出 $A=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=-C$

最后求积如下：

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{3\left(x^2+1\right)}+\int\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3})+\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})+C\end{aligned}$$

性质 基本积分公式：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C(\alpha\lessgtr 0)$$

命题 1.1 (Euler 代换)

只考虑被积函数为有理函数（乘）除以二次无理式 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分问题。对于含有二次无理式的一般积分问题，即被积函数为 $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ 的不定积分，其中 $R(u,v)$ 是二元有理函数，则上述被积函数的不定积分一定是初等函数

注 欧拉代换有以下三种:

(1) 若 $a>0$, 则可用

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$$

(2) 若 $c>0$, 则可用

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$$

(3) 对于根号内为可约的二次三项式, 则可用

$$\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=t\left(x-x_1\right)$$

性质 基本积分公式：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C(a>0)$$
$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C(\alpha\neq 0)$$

定理 1.6 (Chebyshev 定理)

（Chebyshev 定理[a]）设 m,n,p 都是有理数，则二项式微分的不定积分

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p\,\mathrm{d}x$$

为初等函数的充要条件为有理数 m,n,p 满足以下三个条件之一:

(1) p 为整数

(2) $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数

(3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ 为整数

[a]切比雪夫 (ПафНутий Львович Чебышев,1821.5.26-1894.12.8) 俄罗斯数学家、力学家。一生发表了 70 多篇科学论文，内容涉及数论、概率论、函数逼近论、积分学等方面。他证明了贝尔特兰公式，自然数列中素数分布的定理，大数定律的一般公式以及中心极限定理。

证明 证明：（仅充分性）仅证明三个条件对可积性的充分条件

(1)：p 为整数，这时可设有理数 m,n 为具有公分母 N 的分数 $m=\dfrac{m_1}{N},n=\dfrac{n_1}{N}$，其中 m_1,n_1,N 都是整数，且 $N>0$。于是只要令 $x=t^N$，就有 $\mathrm{d}x=Nt^{N-1}\,\mathrm{d}t,x^m=t^{m_1},x^n=t^{n_1}$，满足有理化。

(2)：$\dfrac{m+1}{n}$ 为整数，先令 $x^n=u$，则有

$$x=u^{\frac{1}{n}},\ \mathrm{d}x=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$$

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p\ \mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int u^{\frac{m}{n}}(a+bu)^p u^{\frac{1}{n}-1}\ \mathrm{d}u=\frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}}(a+bu)^p u^{-1}\ \mathrm{d}u$$

若设 $p=\dfrac{M}{N}, M, N$ 为整数，且 $N>0$，则再令 $a+bu=t^N$ 就可实现有理化。

(3)：$\frac{m+1}{n}+p$ 为整数，与情况（2）一样，先令 $x^n=u$，则积分变换为

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p\ \mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int u^{\frac{m}{n}}(a+bu)^p u^{\frac{1}{n}-1}\ \mathrm{d}u=\frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}+p}\left(\frac{a+bu}{u}\right)^p u^{-1}\ \mathrm{d}u$$

若设 $p=\dfrac{M}{N}, M, N$ 为整数，且 $N>0$，则再令 $\dfrac{a+bu}{u}=t^N$ 就可实现有理化。

注 需要注意三种可积情况的条件，除此之外的二项式微分都不可积

注 合并以上陈述可知，情况（1）有理化代换为 $x=t^N$

情况（2）有理化代换为 $a+bx^n=t^N$，其中 $N>0$ 是有理分数 p 的分母

情况（3）有理化代换为

$$\frac{a+bx^n}{x^n}=\frac{a}{x^n}+b=t^N$$

其中 $N(>0)$ 是有理分数 p 的分母

命题 1.2 (三角函数万能代换)

由于三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的有理式可写成为 $R(\cos x, \sin x)$，其中 $R(u, v)$ 是二元有理函数，因此只考虑 $\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ 求积。利用所谓的万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$，则能够同时将 $\sin x, \cos x$ 实现有理化

证明 设 $t=\tan\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$，则有

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(2\arctan t)=\frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

则可以将有理三角函数的积分归结为有理函数的不定积分：

$$I=\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

注 万能代换缺点是可能引入繁复的计算，在几种特殊情况中，往往用下列有理化代换

（1）若 $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$，则可用代换 $t=\cos x$，其特例为 $R(\cos x)\sin x$

（2）若 $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$，则可用代换 $t=\sin x$，其特例为 $R(\sin x)\cos x$

（3）若 $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$，则可用代换 $t=\tan x$，其特例为 $R(\tan x)$

若被积表达式为 $P\left(\cos^2 x, \cos x\sin x, \sin^2 x\right)\mathrm{d}x$，其中 $P(u, v, w)$ 是 u, v, w 的有理函数，由 $t=\tan x$ 可计算得到 $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, \cos x\sin x=\frac{t}{1+t^2}, \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ 因此已经将积分 $\int P\left(\cos^2 x, \cos x\sin x, \sin^2 x\right)\mathrm{d}x$ 实现了有理化

性质 若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C$$

若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则

$$\begin{aligned}\int P(x)\cos ax\ \mathrm{d}x=&\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]\\&+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C\end{aligned}$$

$$\int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right] + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C$$

1.3 Jordan 测度

1.3.1 基本定义

定义 1.1 (Jordan 测度)

对任意给定的满足条件 $a_i < b_i (i=1,2,\cdots,m)$ 的两组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_m$，把 $\mathbb{R}^m$ 中的，点集

$$K=\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m : a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,2,\cdots,m\}$$

叫做 m 维长方体，定义它的 m 维体积为

$$|K|=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_m-a_m)$$

称有限个长方体的并为简单图形。显然，有限个简单图形的并和交仍然是简单图形，而且每个简单图形都可分解成有限个两两之间没有公共内点的长方体的并。假如一个简单图形 Q 分解成了 n 个两两之间没有公共内点的长方体 $K_1,K_2,\cdots,K_n$ 的并：

$$Q=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_n,\quad K_i^\circ\cap K_j^\circ=\varnothing(\text{当}\, i\neq j)$$

则定义 Q 的 m 维体积为

$$|Q|=|K_1|+|K_2|+\cdots+|K_n|$$

这个定义是合理的，即 $|Q|$ 的值不依赖于 Q 的分解方式的选择。现在对 $\mathbb{R}^m$ 中的任意有界点集 S，定义

$$m_*(S)=\sup\{|Q| : Q\ \text{为简单图形, 且}\ Q\subseteq S^\circ\}$$

$$m^*(S)=\inf\{|Q| : Q\ \text{为简单图形, 且}\ \bar{S}\subseteq Q^\circ\}$$

这里规定 $\sup\varnothing=0$ 。$m_*(S)$ 叫做 S 的内容量或若尔当内测度；$m^\circ(S)$ 叫做 S 的外容量或若尔当外测度。由定义知对 $\mathbb{R}^m$ 中任意有界点集 S，其内容量 $m_*(S)$ 和外容量 $m^*(S)$ 都有定义，且

$$m_*(S)\leqslant m^*(S)$$

定义对 $\mathbb{R}^m$ 中的有界点集 S，如果成立 $m_*(S)=m^*(S)$, 则称 S 为若尔当可测集，并称此公共值为 S 的若尔当测度，记作 $|S|$ 或 meas (S)

若尔当测度也叫做体积（$m=2$ 时改称面积），容量、容积、容度等，其中测度是英文 measure 的译文，体积是 volume 的译文，而容量、容积、容度等都是 content 的译文

♣

注 注意在内容量的定义中，要求简单图形 Q 包含于 S 的内域，而不只是包含于 S；在外容量的定义中，要求简单图形 Q 的内域包含 S 的闭包，而不只是 Q 包含 S 。这样做只是为了后面讨论的方便，并不影响问题的实质。另外，内容量的定义似乎和前面叙述的方式不太一样。这只是表象，本质上它们是一致的。

1.3.2 基本性质

用函数 $\mu(P)$ 代表图形 P 的面积，函数 $\mu(P)$ 在有限情况下满足下列公理

公理 1.1 (半正定性与单值性)

对每个有面积的图形 P，函数 $\mu(P)$ 非负且单值确定，即

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2) \geqslant 0$$

♡

公理 1.2 (单位元)

边长为单位长度的正方形的面积等于单位面积

♡

公理 1.3 (有限可加性)

函数 $\mu(P)$ 可加，即若图形 P 分成两个不相交的图形 P_1 和 P_2，则有

$$(P = P_1 \cup P_2) \wedge (P_1 \cap P_2 = \varnothing) \Rightarrow [\mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)]$$

♡

公理 1.4 (Chasles 定理性质)

（Chasles 定理[a]性质）函数 $\mu(P)$ 是关于平面的任何运动不变，即若图形 P_1 和 P_2 可借助平面绕一固定点的旋转，或经平面的平移而彼此重合，则 $\mu(P_1) = \mu(P_2)$

[a]沙勒定理 (Chasles theorem) 关于变换的著名定理，该定理断言：既非旋转也非平移的空间第一种合同变换是一个旋转与一个平移之积，且旋转轴平行于这平移的方向。

♡

公理 1.5 (单调性)

函数 $\mu(P)$ 单调，即

$$P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) \leqslant \mu(P_2)$$

♡

定义 1.2 (标准矩形)

称有限个其边平行于坐标轴的矩形的并集叫作是基本图形，称这样得到的矩形为标准矩形（标准矩形可以不含位于它的边上的任何一个点的子集）

♣

定义 1.3 (上面积与下面积)

对于平面有界图形 P，称一切包含 P 的基本平面图形 P_1 的面积 $\mu(P_1)$ 的下确界为平面有界图形 P 上面积，称一切包含在 P 内的基本图形 P_2 的面积 $\mu(P_2)$ 的上确界为平面有界图形 P 下面积；记上面积为 $\mu^*(P)$，下面积为 $\mu_*(P)$

若基本图形 P 满足 $\mu_*(P) = \mu^*(P)$ 则称 $\mu_*(P) = \mu^*(P) = \mu(P)$ 为图形 P 的面积，对于，情况完全一样，一般称三维或更高维立体图形 P 的 $\mu(P)$ 为体积

称所引入的图形体积的概念为 Jordan 测度，称借助此定义赋予其面积值的图形为可求面积的（或者在高维情况为称为可求体积的）或 Jordan 可测

♣

定义 1.4 (邻域、内点、外点、边界点)

设 $\delta > 0$，称位于以点 x_0 为中心，δ 为半径的圆的内部的点的集合为平面上点 x_0 的 δ 邻域；若存在点 x_0 的一个 δ 邻域 $E(x_0, \delta)$，整个包含在集合 P 中，即 $E(x_0, \delta) \subset P$，则称点 x_0 为集合 P 的内点；若存在邻域 $E(x_1, \delta)$ 使得 $E(x_1, \delta) \cap P = \varnothing$，则称点 x_1 为集合 P 外点；若点 x 既不是集合 P 的内点也不是它的外点，则称点 x 为集合 P 边界点；

称图形 P 全部边界点的集合为 P 的边界，记为 ∂P；若 $\partial P \subset P$ 则称图形 P 是闭的，若 $\partial P \cap P = \varnothing$ 则称图形 P 是开的，称 $\bar{P} = \partial P \cup P$ 为 P 的闭包

♣

引理 1.1 (线段连通性)

设在给定线段 l 以 A_1 和 A_2 为端点，且给定一个集合 M。若 $A_1 \in M, A_2 \notin M$，则 $\exists A_0 \in l : A_0 \in \partial M$ ♡

证明 对点 $\alpha \in l$ 考虑值等于从点 α 到点 A_1 的距离的函数 $\rho(\alpha)$。显然 $\forall \alpha \in l : \rho(\alpha) \leqslant |l|$。设 $B = l \cap M$，则 B 非空（因为 A_1 既属于 l 又属于 M），则可设 $\rho_0 = \sup\limits_{\alpha \in B} \rho(\alpha)$，以下考虑在 l 上与 A_1 距离 ρ_0 的点 α_0。

在 l 上，任何与 A_1 距离 $\rho(\alpha) > \rho_0$ 的点 α, 皆不属于 B，则不属于 M，则有 α_0 不可能是集合 M 的内点。另一方面，在线段 l 上点 α_0 的任何邻域内，都存在属于 $B \subset M$ 的点。因此，点 α_0 不是集合 M 的外点。综合上述讨论即得 $\alpha_0 \in \partial M$

定理 1.7 (图形 Jordan 可测准则)

图形 P Jordan 可测充要条件为 $\mu(\partial P) = 0$ ♡

证明

（必要性）只需对于任意的 $\varepsilon > 0$，指出一个基本图形 H，使得 $\partial P \subset H$ 且 $\mu(H) < \varepsilon$。由图形 P 为 Jordan 可测的，则有 $\mu(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$，因此对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在开基本图形 P_1 和闭基本图形 P_2 满足 $P_2 \subset P \subset P_1$ 且有：

$$\mu(P) = \mu^*(P) \leqslant \mu\left(P_1\right) < \mu(P) + \varepsilon_1, \quad \mu(P) - \varepsilon_1 < \mu\left(P_2\right) \leqslant \mu(P) = \mu_*(P)$$

观察基本图形 $P_3 = P_1 \backslash P_2$，令 $H = \bar{P}_3$，则在此图形 H 之外仅含有图形外点或内点，即有 $\partial P \subset H$。由 $P_1 = P_2 \cup P_3, P_2 \cap P_3 = \varnothing$，则有 $\mu\left(P_1\right) = \mu\left(P_2\right) + \mu\left(P_3\right)$。由此即得

$$\mu\left(P_3\right) = \mu\left(P_1\right) - \mu\left(P_2\right) < \mu(P) + \varepsilon_1 - \mu(P) + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1$$

注意到基本图形的边界有零测度，则有 $\mu\left(P_3\right) = \mu(H)$。取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$，得 $\mu(H) < \varepsilon, \partial P \subset H$，则 $\mu(\partial P) = 0$。

（充分性）设 $\mu(\partial P) = 0$，欲证 $\mu^*(P) = \mu_*(P)$。由 $\mu(\partial P) = 0$，则对任意 $\varepsilon > 0$ 存在开基本图形 P_3 满足 $\partial P \subset P_3$ 且 $\mu\left(P_3\right) < \varepsilon$。由 P_3 为开基本图形，则边界 ∂P_3 由有限条平行于坐标轴的线段组成，于是可把图形 P 与 P_3 均包含在一个其边与坐标轴平行的正方形 K 中，接着把边界 ∂P_3 上平行于 Ox 轴的线段都延长到与正方形 K 的边界相交。于是正方形 K 以及图形 P_3 都被分成一些单独的标准矩形。设这些标准矩形是 $h_1, \cdots, h_m$（把每个标准矩形视作没有边界），则有 $(\forall s \in \overline{1; m}) : (h_s \subseteq P_3) \vee (h_s \cap P_3 = \varnothing)$。下证若 h_s 不是 P_3 子集，矩形又与图形 P 至少有一个公共点，则 $h_s \subset P$。

反证：设在矩形 h_s 中 $x_1 \in P, x_2 \notin P$，则以 x_1, x_2 为端点的线段 l 上某些点属于 P 而某些点不属于 P。利用引理 (1.1)，线段 l 含有点 $x_0 \in \partial P$，于是点 $x_0 \in h_s, x_0 \in \partial P \subset P_3$，这表明 $h_s \subset P_3$，这与矩形 h_s 不是 P_3 的子集这个条件相矛盾。

于是，若 $h_s \cap P \neq \varnothing$，则矩形 $h_s \subseteq P$，取所有矩形 h_s 并集为 P_2，显然有 $P_2 \subset P$

观察基本图形 $P_1 = \overline{P_2 \cup P_3}$，欲证 $P \subset P_1$。注意到图形 P 为内点集 $P \backslash \partial P$ 与边界点集 ∂P 的某个子集 $\Gamma \subset \partial P$ 的并集，仅需证明 $\partial P \subset P_1, P \backslash \partial P \subset P_1$

包含关系 $\partial P \subset P_1$ 从 $\partial P \subset P_3 \subset P_1$ 推出。而集 P 的任何内点 x 有且仅有三种情况：1) 属于 P_3；2) 属于某开矩形 h_s；3) 属于某开矩形边界 ∂h_s。

在第一种情形 $x \in P_3 \subset P_1$，从而 $x \in P_1$；在第二种情形 $x \in h_s, x \in P$，这表明 $h_s \subset P_2$（根据 P_2 特征），则 $x \in h_3 \subset P_2 \subset P_1$；在第三种情形，集 P 内点 x 属于开矩形 h_s 边界，而此点某 ε 邻域全由集 P 的点组成，从而其中含有矩形 h_s 的点，则 $h_s \subset P_2$。由此 $\partial h_s \subset \bar{P}_2$。则有 $x \in \partial h_s \subset \bar{P}_2 \subset P$。由此有 $P \subset P_1$

又由 $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$，及 P_1, P_2 和 P_3 都是基本图形，则有

$$\mu\left(P_1\right) = \mu\left(\bar{P}_2\right) + \mu\left(P_3\right) < \mu\left(\bar{P}_2\right) + \varepsilon,$$

则有

$$\mu\left(P_2\right) \leqslant \mu_*(P) \leqslant \mu^*(P) \leqslant \mu\left(P_1\right) < \mu\left(\bar{P}_2\right) + \varepsilon$$

于是我们得到

$$0 \leqslant \mu^*(P) - \mu_*(P) < \mu\left(\bar{P}_2\right) + \varepsilon - \mu\left(P_2\right) = \varepsilon$$

而由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以

$$\mu^*(P) = \mu_*(P)$$

即图形 P 是 Jordan 可测的

1.4 Lebesgue 测度

1.4.1 基本定义

定义 1.5 (Lebesgue 测度)

区间 $I = [a, b]$ 的长度定义为 $|I| = b - a$ 。对 $E \subseteq \mathbb{R}$，勒贝格外测度定义为对每一列能覆盖 E 的开区间 $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$，作长度和 $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} |I_k|$ 。所有这些 μ 组成一个有下界的数集，下确界称为勒贝格外测度，记做 $\lambda^*(E)$ 。

勒贝格测度定义在勒贝格 σ 代数上，若集合 E 满足：对所有 $A \subseteq \mathbb{R}$，皆有 $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*\left(A \cap E^c\right)$ ，则 E 为勒贝格 σ 代数的元素，称为勒贝格可测集。对勒贝格可测集，其勒贝格测度 $\lambda(E)$ 就定义为勒贝格外测度 $\lambda^*(E)$ 。

不在勒贝格 σ 代数中的集合不是勒贝格可测的，这样的集合确实存在，故勒贝格 σ 代数严格包含于 $\mathbb{R}$ 的幂集

♣

1.4.2 基本性质

注 不再过细地研究 Lebesgue 可测集的性质，除了关于平面运动的不变性及单调性相同之外，本质上的优越性在于 Lebesgue 测度取代了 Jordan 测度所具有的有限可加性，变为了可数可加性

定理 1.8 (Lebesgue 测度可数可加性)

设 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两不交的 Lebesgue 可测集，并集 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为有界集，则集合 A 为 Lebesgue 可测集，且满足

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty}\left(\mu\left(A_1\right) + \cdots + \mu\left(A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

♡

定义 1.6 (零测度集)

若对于任意 $\varepsilon > 0$，存在集合 E 的由最多可数个开区间组成的覆盖 $\{I_k\}$，且这些区间的长度和 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$ 不超过 ε，则称集合 $E \subset \mathbb{R}$ 为 Lebesgue 零测度集[a]

[a] 亨利 · 勒贝格 (Henri Léon Lebesgue,1875.6.28-1941.7.26) 法国数学家，以函数微分、积分理论的研究著称。他是法国数学家 Borel 的学生，1922 年被作为 Jordan 的后继者被选为巴黎科学院院士。

♣

注 由级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$ 绝对收敛，求和顺序对结果没有影响，则上面的定义合理

性质 （Lebesgue 零测度集性质）在 Lebesgue 意义下

a) 一个点或有限多个点的集合是零测度集
b) 有限多个或可数多个零测度集的并是零测度集
c) 零测度集的子集本身也是零测度集
d) 当 $a < b$ 时，区间 $[a, b]$ 不是零测度集

证明 a) 点可以用一个长度小于事先指定的任意小的 $\varepsilon > 0$ 的开区间覆盖，因此点是零测度集，而 a) 的其余部分可由 b) 推出

b) 设 $E = \bigcup_n E^n$ 是最多可数个零测度集 E^n 的并。对于每个 E^n，关于 $\varepsilon > 0$，做 E^n 的覆盖 $\{I_k^n\}$ 使 $\sum_k |I_k^n| < \varepsilon/2^n$。由于有限或可数集的有限或可数并本身最多是可数的，开区间 $I_k^n, k, n \in \mathbb{N}$，所组成的 E 的覆盖最多也只能是可数的，而且

$$\sum_{n,k} |I_k^n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = \varepsilon$$

在 $\sum_{n,k} |I_k^n|$ 中关于指标 n 和 k 的求和顺序是无关紧要的，因为该级数只要在某求和顺序下收敛于一个，那么它在任何求和顺序下收敛于同一个和。由于级数的部分和以 ε 为上界，因此级数在某一求和顺序下的收敛性显然。于是，E 是勒贝格意义下的零测度集

c) 这个断言显然可由零测度集的定义和覆盖的定义直接推出

d) 由于闭区间的任一个由开区间作成的覆盖有有限覆盖，它的开区间的长度和显然不超过原覆盖的开区间的长度和。因此，只要证明组成区间 $[a, b]$ 的任意一个有限覆盖的开区间的长度和不小于这个区间的长度 $b - a$ 即可

对覆盖的开区间数进行归纳证明：当 $n = 1$ 时，也就是区间 $[a, b]$ 被一个开区间 (α, β) 包含的情形，显然 $\alpha < a < b < \beta$，从而 $\beta - \alpha > b - a$。假设对于 $n = 1, \cdots, k$ 断言正确，现在考察覆盖是由 $k+1$ 个开区间组成的情形。取开区间 (α_1, α_2)，它覆盖点 a 如果 $\alpha_2 \geqslant b$，则 $\alpha_2 - \alpha_1 > b - a$，从而证明了断言。如果 $a < \alpha_2 < b$，则区间 $[\alpha_2, b]$ 就由最多 k 个区间所组成的开区间系所覆盖，根据归纳假定，它的区间长度的和不小于 $b - \alpha_2$。但是

$$b - a = (b - \alpha_2) + (\alpha_2 - a) < (b - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

从而，区间 $[a, b]$ 原来的覆盖所含开区间的长度和大于 $b - a$

定义 1.7 (Lebesgue 零测度)

若对于任何 $\varepsilon > 0$, 集合 E 的由至多可数个 n 维区间组成的覆盖 $\{I_i\}$ 存在, 并且这些区间体积之和 $\sum_i |I_i|$ 不超过 ε，则称集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 零测度集（有 n 维 Lebesgue 零测度）♣

性质 （n 维 Lebesgue 零测度集性质）在 Lebesgue 意义下

a) 单点集和有限个点的集合都是零测度集

b) 有限个或可数个零测度集的并集是零测度集. c) 零测度集的子集本身也是零测度集

d) 非退化区间 $I_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ 不是零测度集。其中 $I_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i, i = 1, \cdots, n\right\}$，并且 $\forall i \in \overline{1;n} : a^i < b^i$

证明 由性质 (1.4.2) 即证

定义 1.8 (容许集/admissible set)

若集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中有界且边界 ∂E 为 Lebesgur 零测度集，则称集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为容许集 ♣

性质 （边界集上的运算）对于任何集合 $E, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 满足：

a) ∂E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集

b) $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$

c) $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$

d) $\partial(E_1 \backslash E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$

引理 1.2 (容许集有限运算性质)

有限个容许集的并集，交集和差集都是容许集 ♡

注 对于无穷个容许集，该引理不成立，另外性质 (1.4.2) 中的 b) 与 c) 也不成立

第 2 章 二重积分

2.1 基本概念

定义 2.1 (矩形划分)

设二元函数 $f(x,y)$ 在矩形 (rectangle) 上 $R=[a;b]\times[c;d]$ 上定义，划分 T_x 把 $[a;b]$ 分为 n 个部分闭区间 $[x_{k-1};x_k]\,,k=1,2,\ldots,n$ 且有 $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$；划分 T_y 把 $[c;d]$ 分为 p 个部分闭区间 $[y_{l-1};y_l]\,,l=1,2,\ldots,p$ 且有 $c=y_0<y_1<\ldots<y_p=d$。称平行于 O_x 轴借助于分法 T_x 的分点和平行于 O_y 轴借助分法 T_y 的分点的直线为分割线 (линия разбиений)。使用这些分割线将整个矩形 R 分成 np 个部分，称

$$R_{kl}=[x_{k-1},x_k]\times[y_{l-1},y_l]\,,k=1,2,\ldots,n,l=1,2,\ldots,p$$

为部分矩形，称全体部分矩形 $R_{kl}(k=1,\cdots,m,l=1,\cdots,n)$ 的集合为矩形 R 的一种划分 T，称 R_{kl} 为矩形 R 划分 T 的脚标为 (k,l) 的元素

在每个矩形 R_{kl} 中取一个坐标为 (ξ_{kl},θ_{kl}) 的介点 (промежуточные точки) A_{kl}，则称矩形 R_{kl} 和点 A_{kl} 的序偶 (R_{kl},A_{kl}) 的集合为矩形 R 的标记划分，记为 V。记 ΔR_{kl} 为部分矩形 R_{kl} 的面积：

$$\Delta R_{kl}=(x_k-x_{k-1})\,(y_l-y_{l-1})$$

再在每个部分矩形 R_{kl} 上选择任意点 (ξ_k,η_l)，称部分矩形的对角线 (диагональ) 长度为部分矩形的直径 (диаметр)，记为 d_{kl}。记划分 T 的所有部分矩阵直径的最大值为

$$\Delta_T=d=\max_{1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant l\leqslant p}d_{kl}$$

♣

定义 2.2 (积分和)

称和

$$\sigma=\sigma\left(\xi_k,\eta_l\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}f\left(\xi_k,\eta_l\right)\Delta R_{kl}$$

为 $f(x,y)$ 在矩形 R 上对于 R 上对应给定划分 R_{kl} 与部分矩形上点 (ξ_k,η_l) 的积分和。若此时 $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0):[(d<\delta)\Rightarrow(|\sigma-I|<\varepsilon)]$ （δ 与点 (ξ_k,η_l)) 的选择无关），则称数 I 为积分和 σ 在 $d\to 0$ 时的极限，形式化记为

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0):\left[(d<\delta)\Rightarrow\left(\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}g\left(\xi_{k,l},\theta_{k,l}\right)\Delta x_k\Delta y_l-I\right|<\varepsilon\right)\right]$$

或者利用符号标记划分 V 简记为

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall V):[(\Delta_V<\delta)\Rightarrow(|\sigma(V)-I|<\varepsilon)]$$

♣

定义 2.3 (二重积分)

若 $f(x,y)$ 函数积分和 σ 当 $d\to 0$ 时存在有限极限 I，则称 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 上 Riemann 可积 (интегрируемая по Риману)，称极限 I 为函数 $f(x,y)$ 沿矩形区域 R 的二重积分，记为

$$\lim_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)=I=\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\iint\limits_R f(x,y)d\sigma$$

♣

注 （有界性）

与一维情况一样，可以证明矩形上可积的每个函数都是有界的；因此进一步只考虑有界函数。

定义 2.4 (基)

记矩形 R 全体划分的集合为 A_R，而全体标记划分的集合为 A'_R，取集合 $\{V \mid \Delta_V < \delta\}$ 即 A'_R 中那些直径 Δ_V 小于 $\delta > 0$ 的全体元素的集合作为集 B' 的终端 b'_δ

由于 $\sigma(V)$ 在 A'_R 上定义，则定义 (2.3) 给出的二重积分定义等价于沿着基 B' 的极限 $\lim\limits_{B'} \sigma(V)$ 的定义，形式化地用 $\Delta_V \to 0$ 来表示基 B'。类似定义关于一切分法 A_R 的基 $\Delta_T \to 0$ ♣

定义 2.5 (标准划分集)

矩形 R 每个标准划分 V 都单值地对应于矩形 R 的一个从 V 删除"标记划分"点 $(\xi_{k,l}, \theta_{k,l})$ 所得的非标记划分 T，于是 $T = T(V)$。记对应于同一个划分 T_0 的全体标记划分的集合为 $A'_R(T_0)$，即称 $A'_R(T_0) = \{V|T(V) = T_0\}$ 为 T_0 的标准划分集，其元素叫作 T_0 的标准划分集 ♣

命题 2.1 (可分离二重积分)

(3909) 证明等式

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^A X(x)\mathrm{d}x \cdot \int_b^B Y(y)\mathrm{d}y$$

其中 R 为矩形 $\{(x,y)|(a \leqslant x \leqslant A)(b \leqslant y \leqslant B)\}$，且函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 在相应区间上连续 ♠

证明 把积分 $\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant A\\ b\leqslant y\leqslant B}} X(x)Y(y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ 看作积分和的极限，用直线

$$x = (A-a)\frac{i}{n}, \quad y = (B-b)\frac{j}{n} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n-1)$$

把积分区域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右上顶点的值，则有

$$\Delta x_i = (A-a)\frac{1}{n}, \Delta y_j = (B-b)\frac{1}{n}, x_i = (A-a)\frac{i}{n}, y_j = (B-b)\frac{j}{n}, (i,j = 1,\cdots,n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j \Delta x_i \Delta y_j = \lim_{n\to\infty}\left[\left((A-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X(\frac{i}{n})\right)\cdot\left((B-b)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y(\frac{j}{n})\right)\right]$$

则由函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 在区间上连续性有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left((A-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X(\frac{i}{n})\right)\cdot\left((B-b)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y(\frac{j}{n})\right)\right] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left((A-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X(\frac{i}{n})\right)\right] = 0, \lim_{n\to\infty}\left[\left((B-b)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y(\frac{j}{n})\right)\right] = 0$$

则原等式成立

例题 2.1 (3911) 设 $f(x)$ 为区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的连续函数，则有不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

解

证明一 (命题**2.1**)

对于二元连续函数 $[f(x)-f(y)]^2$ 在区域 $[a;b]\times[a;b]$ 上二重积分，利用命题 (2.1) 有

$$\begin{aligned}0 \leqslant \iint_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} [f(x)-f(y)]^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \iint_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} \left[f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y)\right] \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ &=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y + (b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

然后将其中积分变量 y 改为 x 整理即证不等式。

注 参考习题 2205 可以证明不等式当且仅当 $f(x)$ 恒等于某常数时取等

解

证明二（**Hilbert** 不等式）

对任意在 $[a;b]$ 在可积函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有 Hilbert 不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

取 $g(x)=1$ 即证

注 本题给出了在区间 $[a;b]$ 上的函数 f 的积分与 f^2 的积分之间的一个基本关系，并可推广到有限区间 $[a;b]$ 上的无界函数的广义积分情况。由此不等式可推出，若 $f^2(x)$ 在 $[a;b]$ 上广义可积，则 $f(x)$ 在 $[a;b]$ 上必定绝对可积

2.2 Darboux 和与 Darboux 积分

定义 2.6 (Darboux 和)

（Darboux[a]和）若 $f(x,y)$ 在矩形 R 上有界，则在每个部分矩形有

$$M_{kl}=\sup_{R_{kl}} f(x,y)=\sup_{(x,y)\in R_{kl}} f(x,y),\quad m_{kl}=\inf_{R_{kl}} f(x,y)=\inf_{(x,y)\in R_{kl}} f(x,y)$$

称矩形 R 划分 T 对应的两个和

$$S(T)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\Delta R_{kl},\quad s(T)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\Delta R_{kl}.$$

为沿矩形 R 划分 T 的 Darboux 上和与 Darboux 下和

[a]让 · 加斯东 · 达布 (Jean Gaston Darboux,1842.8.14-1917.2.23) 法国数学家，对数学分析（积分，偏微分方程）和微分几何（曲线和曲面的研究）作出了重要贡献。

♣

引理 2.1 (标记划分与积分和上下界无关)

设矩形 R 有部分矩形 R_{kl} 的划分，则任意选择介点 (ξ_k,η_l) 都满足 $s\leqslant\sigma\leqslant S$，形式化记为

$$(\forall V\in A'_R): s(T(V))\leqslant\sigma(V)\leqslant S(T(V))$$

♡

引理 2.2 (标记划分必达积分和上下确界)

设矩形 R 有部分矩形 R_{kl} 的划分 T_0，则 $\forall\varepsilon>0$ 可选择介点 (ξ_k,η_l) 使其满足 $0\leqslant S-\sigma<\varepsilon$ 或者满足 $0\leqslant\sigma-s<\varepsilon$，形式化记为

$$(\forall T_0\in A_R):\left[\left(s\left(T_0\right)=\inf_{V\in A'_R(T_0)}\sigma(V)\right)\wedge\left(S\left(T_0\right)=\sup_{V\in A'_R(T_0)}\sigma(V)\right)\right]$$

♡

证明 利用上确界和下确界的定义即证

定义 2.7 (加细划分)

若矩形 R 划分 T_2 为从划分 T_1 在 O_x 轴和 O_y 轴上添加有限个新的分点而得到的划分（或者也可以定义为：添加一个或多个分割线后所得划分），则称划分 T_2 为划分 T_1 的加细（измельчение），也称 T_2 跟随 T_1，记为 $T_2\supset T_1$ 或 $T_1\subset T_2$

♣

引理 2.3 (Darboux 和第一性质/划分加细必要条件)

设矩形 R 有部分矩形 R_{kl} 的划分 T，若划分 T 加细，则上和 S 不增，下和 s 不减。

♡

证明 利用上确界和下确界的定义即证

引理 2.4 (Darboux 和第二性质)

函数的每个 Darboux 下和都不超过 Darboux 上和，即使对应矩形的不同划分，即 $s' \leqslant S'', s'' \leqslant S'$，形式化记为

$$(\forall T_1, T_2 \in A_R) : s(T_1) \leqslant S(T_2)$$

证明 由 Darboux 和第一性质 (2.3)，将划分 T_1 和划分 T_2 相并作为共同加细即有 $s\left(T_1\right) \leqslant s\left(T_3\right) \leqslant S\left(T_3\right) \leqslant S\left(T_2\right)$，由此 $s\left(T_1\right) \leqslant S\left(T_2\right)$ 得证

定义 2.8 (Darboux 积分)

称 $I^* = \inf\limits_{T \in A_R} S(T)$ 为函数 $f(x,y)$ 沿矩形 R 的 Darboux 上积分，称 $I_* = \sup\limits_{T \in A_R} s(T)$ 为函数 $f(x,y)$ 沿矩形 R 的 Darboux 下积分

引理 2.5 (Darboux 和与 Darboux 积分关系)

$(\forall T \in A_R) : s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T)$

证明 若构造全体 $s(T)$ 的集合 M_1 和全体 $S(T)$ 的集合 M_2，则由 Darboux 和第二性质 (2.4) 有任何一个元素 $a \in M_2$ 都是集合 M_1 的上界，从而集合 M_1 的最小上界，即 I_* 不超过此元素 a。则有 I_* 是集合 M_2 的下界，但 I^* 由定义为 M_2 下确界，则 $I_* \leqslant I^*$，于是对于任意划分 $T \in A_R$ 满足 $s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T)$

引理 2.6 (Darboux 定理/Darboux 积分存在性)

若实值函数在矩形 R 上有界，则

$$\left(\exists \sup_{T \in A_R} \{s(T)\}\right) \wedge \left(\sup_{T \in A_R} \{s(T)\} = I_*\right)$$
$$\left(\exists \inf_{T \in A_R} \{S(T)\}\right) \wedge \left(\inf_{T \in A_R} \{S(T)\} = I^*\right)$$

引理 2.7 (关于划分加细的估计)

设 S 和 s 为对应矩形 R 划分 T 的 Darboux 上和与 Darboux 下和，对于某个 $d < \delta$ 设 S' 和 s' 为矩形 R 的通过从 T 添加 r 个新线获得的划分 T' 对应的 Darboux 积分上和和 Darboux 积分下和，则有估计

$$S - S' \leqslant (M - m)\delta r D, \quad s' - s \leqslant (M - m)\delta r D$$

其中 D 为 R 的对角线长度，$M = \sup\limits_R f(x,y), m = \inf\limits_R f(x,y)$

引理 2.8 (Darboux 基本引理/основная лемма Дарбу)

$I^* = \lim\limits_{d \to 0} S, I_* = \lim\limits_{d \to 0} s$

定理 2.1 (可积性准则)

设函数 $f(x,y)$ 在矩形 R 上定义，则

$$f \in \mathcal{R}(R) \Leftrightarrow [(f\text{在}R\text{有界}) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists T \in A_R : S(T) - s(T) < \varepsilon)]$$

定理 2.2

在矩形区域上连续的函数也在矩形上可积，即设函数 $f(x,y)$ 在矩形 R 上定义，则可形式化记为

$$f(x,y) \in \mathcal{C}(R) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(R)$$

2.3 *Riemann 可积函数的 Lebesgue 准则

定理 2.3 (Lebesgue 准则)

$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow$ (f 在 I 上有界) $\wedge$ (f 在 I 上几乎处处连续)

注 几乎处处连续：不连续点构成零测度集1.7

证明

(必要性)

如果 $f \in \mathcal{R}(I)$，则函数 f 在 I 上有界，设在 I 上 $|f| \leqslant M$。接下来验证，f 几乎在 I 的所有点连续。为此，证明：如果函数间断点的集合 E 不是零测度集，则 $f \notin \mathcal{R}(I)$

其实，把 E 表示为 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 的形式，其中 $E_n = \{x \in I \mid \omega(f;x) \geqslant 1/n\}$，则根据零测度的性质可以推出，如果 E 不是零测度集，就可以找到序号 n_0，使集合 E_{n_0} 也不是零测度集。设 P 是把区间 I 分为一组区间 $\{I_i\}$ 的任意分割，把 P 的分割区间分为 A 和 B 两类，其中 $A = \{I_i \in P \mid I_i \cap E_{n_0} \neq \varnothing \wedge \omega(f;I_i) \geqslant 1/(2n_0)\}, B = P \backslash A$

区间组 A 构成集合 E_{n_0} 的一个覆盖。其实，E_{n_0} 的每个点或者位于某个区间 $I_i \in P$ 的内部，这时显然 $I_i \in A$，或者位于分割 P 的某些区间的边界上。在后一种情况下，函数至少在一个这样的区间上的振幅应当（根据三角形不等式）不小于 $1/(2n_0)$，所以该区间属于 A

现在证明，只要在分割 P 的区间中用不同方式选择各标记点 ξ，就可以显著改变积分和的值

具体而言，选择两组标记点 ξ' 和 ξ''，使属于 B 的区间上的相应标记点相同，而属于 A 的区间 I_i 的相应标记点 ξ_i', ξ_i'' 满足

$$|f(\xi_i') - f(\xi_i'')| > \frac{1}{3n_0}$$

于是

$$|\sigma(f,P,\xi') - \sigma(f,P,\xi'')| = \left|\sum_{I_i \in A} (f(\xi_i') - f(\xi_i''))\right| I_i|| > \frac{1}{3n_0} \sum_{I_i \in A} |I_i| > c > 0$$

因为区间组 A 覆盖集合 E_{n_0}，又假设 E_{n_0} 不是零测度集，所以常数 c 存在。因为 P 是区间 I 的任意一个分割，所以从柯西基本准则推出，当 $\lambda(P) \to 0$ 时，积分和 $\sigma(f,P,\xi)$ 不可能有极限，即 $f \notin \mathcal{R}(I)$

(充分性)

设 ε 是任意正数，$E_\varepsilon = \{x \in I \mid \omega(f;x) \geqslant \varepsilon\}$。根据条件，$E_\varepsilon$ 是零测度集

此外，E_ε 显然是 I 中的闭集，所以 E_ε 是紧集。根据零测度集覆盖引理，在 $\mathbb{R}^n$ 中存在有限个区间 $I_1, \cdots, I_k$，使 $E_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$，并且 $\sum_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$。取 $C_1 = \bigcup_{i=1}^{k} I_i$，用 C_2 和 C_3 分别表示以 I_i 的中心为中心、位似系数为 2 和 3 的情况下区间 I_i 的位似区间的并集。显然，E_ε 严格位于集合 C_2 的内部，C_2 的边界与 C_3 的边界之间的距离 d 是正的

可以指出，C_3 中两两没有公共内点的任何有限个区间的体积之和不大于 $3^n\varepsilon$，其中 n 是空间 $\mathbb{R}^n$ 的维数。这得自集合 C_3 的定义和区间测度的性质

再指出，区间 I 的任何直径小于 d 的子集或者包含于集合 C_3，或者包含于紧集 $K = I \backslash (C_2 \backslash \partial C_2)$，其中 ∂C_2 是 C_2 的边界（因而 $C_2 \backslash \partial C_2$ 是集合 C_2 的内点的集合）

根据构造，$E_\varepsilon \subset I \backslash K$，所以 $\omega(f;x) < \varepsilon$ 在任何点 $x \in K$ 都应当成立。根据紧集上的一致连续性，可以找到数 $\delta > 0$，使不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\varepsilon$ 对于任何相距不超过 δ 的两个点 $x_1, x_2 \in K$ 都成立

上述构造现在可以用以下方法证明可积条件的充分性。取区间 I 的任意两个分割 P', P''，并且分割参数 $\lambda(P'), \lambda(P'')$ 都小于 $\lambda = \min\{d, \delta\}$。设 P 是由分割 P', P'' 的区间的交集构成的加细分割。在自然的记号下，

$P=\left\{I_{ij}=I_i'\cap I_j''\right\}$。接下来比较积分和 $\sigma(f,P,\xi)$ 与 $\sigma\left(f,P',\xi'\right)$。利用 $|I_i'|=\sum_j|I_{ij}|$，可以写出

$$\begin{aligned}\left|\sigma\left(f,P',\xi'\right)-\sigma(f,P,\xi)\right|&=\left|\sum_{ij}\left(f\left(\xi_i'\right)-f\left(\xi_{ij}\right)\right)\right|I_{ij}||\\&\leqslant\sum_1\left|f\left(\xi_i'\right)-f\left(\xi_{ij}\right)\right|\left|I_{ij}\right|+\sum_2\left|f\left(\xi_i'\right)-f\left(\xi_{ij}\right)\right|\left|I_{ij}\right|\end{aligned}$$

其中第一个求和式 $\sum_1$ 包括对分割 P 的一部分区间 I_{ij} 求和，这些区间位于既属于分割 P' 又包含于集合 C_3 的区间 I_i' 中，而第二个求和式 $\sum_2$ 包括对分割 P 的其余区间求和，这些区间必然全部包含在 K 中（因为 $\lambda(P)<d$）

因为在 I 上 $|f|\leqslant M$，所以在第一个求和式中把 $\left|f\left(\xi_i'\right)-f\left(\xi_{ij}\right)\right|$ 替换为量 $2M$，就得到，第一个求和式不超过 $2M\cdot 3^n\varepsilon$

因为在第二个求和式中 $\xi_i',\xi_{ij}\in I_i'\subset K$，而 $\lambda\left(P'\right)<\delta$，所以 $\left|f\left(\xi_i'\right)-f\left(\xi_{ij}\right)\right|<2\varepsilon$。因此，第二个求和式不超过 $2\varepsilon|I|$

于是，$\left|\sigma\left(f,P',\xi'\right)-\sigma(f,P,\xi)\right|<\left(2M\cdot 3^n+2|I|\right)\varepsilon$。根据这个结果（它对 P' 和 P'' 均成立），再利用三角形不等式，就得到

$$\left|\sigma\left(f,P',\xi'\right)-\sigma\left(f,P'',\xi''\right)\right|<4\left(3^nM+|I|\right)\varepsilon$$

它对任何具有充分小参数的分割 P',P'' 都成立。从柯西准则现在推出 $f\in\mathcal{R}(I)$

推论 2.1

因为函数极限存在的 Cauchy 准则在任何完备的度量空间中都成立，所以从证明中可以看出，对于在任何完备的赋范线性空间中取值的函数，Lebesgue 准则的充分性部分（但不包括必要性部分）都成立 ♡

2.4 Zorich 一般重积分的引入

无论是 Lebesgue 判据、还是 Darboux 判据，所定义的重积分都是在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 内的区间上，而非一般集合上

定义 2.9 (容许集)

集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 称为容许集，如果它在 $\mathbb{R}^n$ 中有界，并且它的边界 ∂E 是（勒贝格）零测度集 ♣

引理 2.9

对于任何集合 $E,E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n$

a) ∂E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集

b) $\partial\left(E_1\cup E_2\right)\subset\partial E_1\cup\partial E_2$

c) $\partial\left(E_1\cap E_2\right)\subset\partial E_1\cup\partial E_2$

d) $\partial\left(E_1\backslash E_2\right)\subset\partial E_1\cup\partial E_2$ ♡

引理 2.10

有限个容许集的并集或交集是容许集，容许集的差也是容许集 ♡

注 上述两个引理对无穷个容许集一般不成立

2.5 一般二重积分

定义 2.10 (初等图形)

称任何有限数目矩形区域（边平行于坐标轴，可以有共同内点或没有）的并集为初等图形 (элементарная фигура)（或基本图形）

注 （连通性）初等图形可能不连通（矩形可能没有公共点）。但是，通过添加必要的矩形，可以通过其面积的任意微小变化将不连同的基本图形变成连通的图形，因此连通性并不重要

定义 2.11 (初等图形 $I-$ 性质)

若定义在矩形区域（闭区域）上的函数有界且对 $\varepsilon > 0$ 能找到面积小于 ε 的包含函数所有点和分割线的基本图形，则称函数在该矩形区域（闭区域）上有 $I-$ 性质

定理 2.4

在矩形区域上有 I-性质的函数也在该矩形区域上可积

定义 2.12 (零面积)

若 $\forall\varepsilon > 0$ 都能找到面积小于 $\varepsilon > 0$ 包含曲线所有点的多角形，则称该曲线有零面积

定义 2.13 (积分定义一)

观察边界为 Γ 的任意区域 D，设 D 有界封闭且 Riemann 可积（这等价于边界 Γ 有零面积），设 $f(x,y)$ 在 D 上有界。由于 D 有界，必有边平行于轴的矩形 R 包含 D，在矩形 R 上观察函数

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \in R/D \end{cases}$$

若函数 $F(x,y)$ 在矩形 R 可积，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积。称 $\iint\limits_R F(x,y)dxdy$ 为函数 $f(x,y)$ 沿区域 D 的二重积分，记为

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(M)d\sigma$$

命题 2.2 (面积与非零二重积分形式一致)

区域 D 的面积为沿 D 的非零二重积分

$$S_D = \iint\limits_D dxdy$$

证明 若加细矩形 R 上划分，有划分上和将等于包含 D 的基本图形的面积，而划分的下和将等于 D 中包含的基本图形。

定理 2.5

在 D 上具有 I-性质的函数在 D 上可积

证明 利用定义 (2.13)，取 $\forall\varepsilon > 0$，注意到 $F(x,y)$ 所有点和分割线与 $f(x,y)$ 有相同的点和分割线，这时它们被位于区域 D 的边界 Γ 的满足 $S < \frac{\varepsilon}{2}$ 的基本图形包含。由 Γ 的所有点可以包含在一个图形中 $S < \frac{\varepsilon}{2}$，则函数 D 在可积，则函数 F 有 I-性质，则函数 F 在 D 可积

定义 2.14 (积分定义二)

若存在有限极限 I 为在 $\widetilde{\Delta}\to 0$ 时积分和，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上 Riemann 可积，称极限 I 为函数 $f(x,y)$ 沿区域 D 的二重积分，形式化记为：

$$\exists \lim_{\widetilde{\Delta}\to 0}\widetilde{\sigma}=I$$

♣

注 （不变性）进一步证明二重积分不依赖于平面坐标轴的选择，也不依赖于矩形 R 的选择。下面证明上述不同定义 (2.13) 与 (2.14) 的等价性。

定理 2.6 (二重积分定义等价性)

利用标记划分与最大直径的二重积分的两个定义是等价的

♡

证明 1) 设 $f(x,y)$ 在最大直径的定义下可积，由一般情形的划分也是矩形划分，则函数在 D 上可积且按照定义其极限显然等于按照标记划分定义的极限。

2) 设 $f(x,y)$ 在 D 上按矩形划分的定义可积且其极限为 I。观察 D 在任意最大直径满足 $\widetilde{\Delta}<\delta$ 的区域的任意划分，记 $\widetilde{M}=\sup\limits_D f(x,y),\widetilde{m}=\inf\limits_D f(x,y),\widetilde{S}=\sum_{i=1}^r\widetilde{M}_i\cdot\Delta D_i,\widetilde{s}=\sum_{i=1}^r\widetilde{m}_i\cdot\Delta D_i$。由对于任意划分 $\widetilde{s}\leqslant\widetilde{\sigma}\leqslant\widetilde{S}$，则仅需证

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):[(\widetilde{\Delta})<\delta\to(|\widetilde{S}-I|<\varepsilon)\wedge(|\widetilde{s}-I|<\varepsilon)]$$

取包含区域 D 的矩形 R，固定 $\varepsilon>0$ 则能找到矩形 R 对应部分矩形为 R_k 的划分 T 满足 $S-s<\frac{\varepsilon}{2}$，又由边界 Γ 有零面积，记 $M_0=\sup\limits_D|f(x,y)|$，则有

$$\sum_{R_k\cap\Gamma}\Delta R_k=\frac{\varepsilon}{6M_0}$$

设 E 为对应划分 T 所有闭区间的集合，区域 D 的边界为 Γ。固定严格在基本图形 Q 内的集合 E，面积小于 $\dfrac{\varepsilon}{6M_0}$。这时存在集合的点 E 到 ∂Q 的点的距离的正的下极限 δ

$$\delta=\inf_{P'\in E,P''\in\partial Q}\rho\left(P',P''\right)>0$$

其中 $\delta\neq 0$ 可以使用封闭性和 Bolzano-Weierstrass 定理反证导出矛盾得到。

每一个部分区域 D_i 要么有 E 的公共点，要么或完全位于划分 T 的一个部分矩形中

$$\widetilde{S}=\sum_{i=1}^r\widetilde{M}_i\cdot\Delta D_i=\sum_{D_i\subseteq R_k}\widetilde{M}_i\cdot\Delta D_i+\text{其余部分}$$

欲证其余部分总面积很小。对于所有部分区域 D_i 都满足 $d_i\leqslant d<\delta$，则有 $D_i\subseteq Q$ 且面积小于 $\dfrac{\varepsilon}{6M_0}$。在这些部分区域上都满足 $\widetilde{M}_i\leqslant M_0$，则有剩余加数的和 $<\dfrac{\varepsilon}{6}$。

注意到在 $M_k=\sup\limits_{R_k}f(x,y)$ 中加数 $\widetilde{M}_i$ 有 $\widetilde{M}_i\leqslant M_k$ 上。在区域 R_k 的确界上改变 $D_i\subseteq R_k$ 的确界。记 $\widetilde{R}_k$ 为 D_i 完全包含在矩形 R_k 中的并集

$$\widetilde{R}_k=\bigcup_{D_i\subseteq R_k}D_i$$

该区域面积记为 $\Delta\widetilde{R}_k$，则有

$$\sum_{D_i\subseteq R_k}\widetilde{M}_i\cdot\Delta D_i\leqslant\sum_k M_k\Delta\widetilde{R}_k$$

$$\widetilde{S}<\sum_k M_k\Delta\widetilde{R}_k+\frac{\varepsilon}{6}$$

若 $R_k\subset D$，则 $R_k\backslash\widetilde{R}_k\subseteq Q$，则有

$$\sum_k\Delta\left(R_k\backslash\widetilde{R}_k\right)\leqslant S(Q)<\frac{\varepsilon}{6M_0}$$

若 $R_k\bigcap\Gamma\neq\emptyset$，则

$$\sum_k\Delta\left(R_k\backslash\widetilde{R}_k\right)\leqslant\sum_k\Delta R_k<\frac{\varepsilon}{6M_0}$$

结果有估计

$$\left|S-\sum_k M_k\Delta\widetilde{R}_k\right|=\left|\sum_k M_k\left(\Delta R_k-\Delta\widetilde{R}_k\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$
$$\sum_k M_k\widetilde{R}_k<S+\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow\widetilde{S}<S+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{6}=S+\frac{\varepsilon}{2}$$

同理可证 $s-\dfrac{\varepsilon}{2}<\widetilde{s}$，结果有估计 $s-\dfrac{\varepsilon}{2}<\widetilde{s}\leqslant\widetilde{S}<S+\dfrac{\varepsilon}{2}$

性质 积分运算基本性质：

1. （线性性）若 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上可积，则 $\forall\alpha,\beta:\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ 在 D 上可积，形式化记为
$$\iint\limits_D\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)dxdy=\alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy+\beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

2. （可加性）若函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积且 D 被零面积曲线划分为没有公共内点的 D_1 和 D_2，则函数 $f(x,y)$ 在 D_1 和 D_2 上都可积，且有等式：
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy$$

证明 由定义有

$$\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy,\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$$

其中

$$f_1(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D_1\\ 0, & (x,y)\in D\backslash D_1\end{cases}$$
$$f_2(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D_2\\ 0, & (x,y)\in D\backslash D_2\end{cases}$$

又由积分的线性性得

$$\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy=\iint\limits_D\left(f_1(x,y)+f_2(x,y)\right)dxdy=\iint\limits_{D_1\bigcup D_2}f(x,y)dxdy$$

性质 积分其他性质：

3. （区域上可乘性）若 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 可积，则函数 $f(x,y)\cdot g(x,y)$ 在 D 上可积，形式化记为：
$$f,g\in R(D)\Rightarrow fg\in R(D)$$

4. （区域上单调性）若函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上可积，且 D 上处处满足 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy\leqslant\iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

5. （绝对值不等式）若函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则函数 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积且
$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\leqslant\iint\limits_D|f(x,y)|dxdy$$

6. （中值定理）若 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上可积且在 D 上满足 $g(x,y)\geqslant 0$ （或 $g(x,y)\leqslant 0$）记 $M=\sup\limits_D f(x,y),m=\inf\limits_D f(x,y)$，则有 $\exists\mu\in[m,M]$ 满足
$$\exists\mu\in[m,M]:\iint\limits_D f(x,y)\cdot g(x,y)dxdy=\mu\iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

另外，若函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 D 连通，且有

$$(\exists(\xi,\eta)\in D):\iint\limits_D f(x,y)\cdot g(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

7.（几何性质）

$$S_D=\iint\limits_D 1dxdy.$$

2.6 累次积分

定理 2.7 (矩形区域二重积分化累次积分)

设函数 $f(x,y)$ 在矩形 R 上可积且对于任意 $x\in[a;b]$ 存在极限

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

则存在累次积分

$$\int_a^b I(x)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

且成立等式

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

证明 把 $[a;b]$ 分为 n 个部分闭区间 $[x_{k-1};x_k],k=1,2,\ldots,n$ 且有 $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$，把 $[c;d]$ 划分为 p 个部分闭区间 $[y_{l-1};y_l],l=1,2,\ldots,p$ 且有 $c=y_0<y_1<\ldots<y_p=d$。设 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1},\Delta y_l=y_l-y_{l-1}$，即有将矩形 R 划分为 np 个部分矩形 $R_{kl}=[x_{k-1},x_k]\times[y_{l-1},y_l],k=1,2,\ldots,n,l=1,2,\ldots,p$，记 $\Delta R_{kl}=\Delta x_k\cdot\Delta y_l$ 为部分矩形 R_{kl} 面积，记 $M_{kl}=\sup\limits_{R_{kl}}f(x,y),m_{kl}=\inf\limits_{R_{kl}}f(x,y)$，显然有

$$(\forall(x,y)\in R_{kl}):m_{kl}\leqslant f(x,y)\leqslant M_{kl}$$

其中在不等式中取 $x=\xi_k$，取任意介点 $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$。由于 $[y_{l-1};y_l]\subseteq[c;d]$ 可以对 y 从 y_{l-1} 到 y_l 积分，又由定理条件得到不等式

$$m_{kl}\Delta y_l\leqslant\int_{y_{l-1}}^{y_l}f(\xi_k,y)\,dy\leqslant M_{kl}\Delta y_l$$

对 l 从 1 到 p 累加并利用定理条件的记号得

$$\sum_{l=1}^p m_{kl}\Delta y_l\leqslant I(\xi_k)\leqslant\sum_{l=1}^p M_{kl}\Delta y_l$$

最后的不等式两边同乘 Δ_k 且对 k 从 1 到 n 累加得

$$\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p m_{kl}\Delta x_k\Delta y_l\leqslant\sum_{k=1}^n I(\xi_k)\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p M_{kl}\Delta x_k\Delta y_l$$

若部分矩形的最大直径 $\Delta\to0$，则最大长度 $\Delta x_k\to0$ 满足

$$\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p m_{kl}\Delta x_k\Delta y_l=s\to\iint\limits_R f(x,y)dxdy$$

$$\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p M_{kl}\Delta x_k\Delta y_l=S\to\iint\limits_R f(x,y)dxdy$$

则当 $\Delta\to0$ 时有

$$\sum_{k=1}^n I(\xi_k)\Delta x_k\to\iint_R f(x,y)dxdy$$

另一方面，根据一重积分的定义，该极限为

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

累次积分存在性得证，且等于二重积分

注定理中 x 与 y 可以交换顺序，这时定理改述为设函数 $f(x,y)$ 在矩形 R 上可积且对于任意 $y \in [a;b]$ 存在极限

$$K(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

则存在累次积分

$$\int_c^d K(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

且成立等式

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

注 此外，可以给出各种示例来说明迭代积分的存在与二重积分之间的关系

定理 2.8 (一般区域二重积分化累次积分)

设区域 D 有界且封闭，并且平行于轴的任何直线与该区域的边界相交不超过两点 $(x,y_1(x)),(x,y_2(x)),y_1(x) \leqslant y_2(x)$，若函数 $f(x)$ 在 D 上可积，则

$$\exists \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

及在 $\forall x \in [x_1;x_2]$ 上可积的函数 $f(x)$（x_1,x_2 为区域 D 上对应的最大横坐标与最小横坐标）进一步有

$$\exists \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

这时存在累次积分

$$\int_{x_1}^{x_2} I(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

且成立等式

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

♡

证明 用矩形 R 围住 D，其边平行于坐标轴，记 $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y),(x,y) \in D \\ 0,(x,y) \in R/D \end{cases}$，该函数在 R 上满足定理 (2.7) 的条件，则有

$$\iint_R F(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b F(x,y)dx$$

该公式等价于

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

例题 2.2 (3929/改变积分顺序）改变积分

$$\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\mathrm{d}y(a>0)$$

积分顺序

解 变量 x 取值范围为区间 $[0;2a]$，在此范围内区域上边界方程为 $y=\sqrt{2ax}$，即抛物线 $x=\dfrac{1}{2a}y^2$ 一段弧，且可以看出当 x 从 0 到 $2a$ 时，变量 y 也从 0 到 $2a$。区域的下边界方程为 $y=\sqrt{2ax-x^2}$，即圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的上半圆（见附图）

改变积分顺序为先 x 后 y 时，由区域 Ω 知其外层积分积分范围为 y 从 0 到 $2a$，但在固定 $y_0 \in (0,a)$ 时，

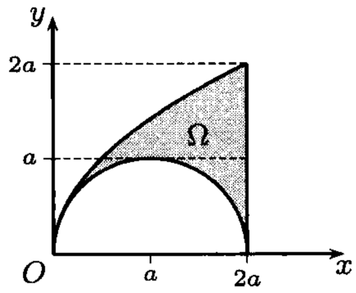

图 2.1: 3929 附图

直线 $y=y_0$ 与区域 Ω 的边界交于 4 个点，因此这一部分积分要分成两项。

将所有边界都表示为 y 的函数，则有

$$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x$$

2.7 *Fubini 定理

2.7.1 Fubini 定理的概念

关于二重积分化成累次积分的定理 (2.7) 条件，有更严格的 Fubini 定理

定理 2.9 (Fubini 定理)

设 $f(x,y)$ 是在矩形 $R(a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d)$ 上所定义的可和函数，则

1) 几乎对于所有的 $x\in[a,b]$, 将 $f(x,y)$ 看作单是 y 的函数时乃为 $[c,d]$ 上的可和函数（定积分上下限可求和）

2) 设 Δ 表示这样的 $x\in[a,b]$ 的全体，其使 $f(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上关于 y 是可和的 $(m\Delta=b-a)$，则函数

$$\int_c^d f(x,y)dy$$

在 Δ 上关于 x 是可和的

3) 成立下面的式子：

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_\Delta dx\int_c^d f(x,y)dy$$

♡

定理 2.10 (富比尼定理)

设 $X\times Y$ 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的区间，它是区间 $X\subset\mathbb{R}^m$ 与 $Y\subset\mathbb{R}^n$ 的笛卡尔直积。如果函数 $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ 在 $X\times Y$ 上可积，则以下积分同时存在并且彼此相等：

$$\int_{X\times Y}f(x,y)dxdy,\quad\int_X dx\int_Y f(x,y)dy,\quad\int_Y dy\int_X f(x,y)dx$$

♡

注 与经典微积分书上累次积分和重积分的转化定理条件不同，这里不要求函数 f 连续，仅要求函数 f 是可积函数，即几乎处处连续

证明 （形式上的证明）

解释定理表述中记号的含义：

通过变量 $x\in X, y\in Y$ 写出的积分 $\int_{X\times Y}f(x,y)dxdy$ 表示函数 f 在区间 $X\times Y$ 上的积分

对于记号 $\int_X dx \int_Y f(x,y)dy$，应当按照以下方式理解：首先在 $x \in X$ 取固定值时计算区间 Y 上的积分 $F(x)=\int_Y f(x,y)dy$，然后计算所得函数 $F: X \to \mathbb{R}$ 在区间 X 上的积分。这时，如果积分 $\int_Y f(x,y)dy$ 对于某个值 $x \in X$ 不存在，就可以让 $F(x)$ 等于介于下积分 $\underline{\mathcal{J}}(x)=\int_Y f(x,y)dy$ 与上积分 $\overline{\mathcal{J}}(x)=\int_Y f(x,y)dy$ 之间的任何一个数，包括下积分与上积分本身在内，将证明 $F \in \mathcal{R}(X)$。记号 $\int_Y dy \int_X f(x,y)dx$ 有类似的含义

在证明定理的过程中将会阐明，满足 $\underline{\mathcal{J}}(x) \neq \overline{\mathcal{J}}(x)$ 的点 $x \in X$ 的集合是 X 中的 m 维零测度集。类似地，使积分 $\int_X f(x,y)dx$ 不存在的点 $y \in Y$ 的集合是 Y 中的 n 维零测度集

将在最后指出，与当时约定称为重积分的 $m+n$ 维区间 $X \times Y$ 上的积分不同，这里需要先计算函数 $f(x,y)$ 在 Y 上的积分，后计算在 X 上的积分；或者先计算在 X 上的积分，后计算在 Y 上的积分。这样的积分通常称为这个函数的累次积分

如果 X 和 Y 是直线上的区间，则上述定理在原则上把计算区间 $X \times Y$ 上的二重积分化为先后计算两个一维积分。显然，借助数学归纳法，只要多次应用这个定理，就可以把计算 k 维区间上的积分化为先后计算 k 个一维积分

如下所述，上述定理的实质非常简单。考虑把区间 $X \times Y$ 分为区间 $X_i \times Y_j$ 的分割和相应的积分和 $\sum_{i,j} f(x_i,y_j)|X_i| \cdot |Y_j|$。因为 f 在区间 $X \times Y$ 上的积分存在，所以可以随意选择标记点 $\xi_{ij} \in X_i \times Y_j$，于是选择 $x_i \in X_i \subset X$ 和 $y_j \in Y_j \subset Y$ 并把它们的“直积”当做标记点，从而可以写出

$$\sum_{i,j} f(x_i,y_j)|X_i| \cdot |Y_j| = \sum_i |X_i| \sum_j f(x_i,y_j)|Y_j| = \sum_j |Y_j| \sum_i f(x_i,y_j)|X_i|$$

这正是富比尼定理在取极限以前的形式

证明 （严格证明）

区间 $X \times Y$ 的任何一个分割 P 由区间 X 和 Y 的相应分割 P_X, P_Y 生成。这时，分割 P 的每个区间是分割 P_X, P_Y 的相应区间 X_i, Y_j 的直积 $X_i \times Y_j$。根据区间体积 (Jordan measure) 的性质，$|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$，其中每个体积是在相应区间所属空间 $\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ 中计算的

利用下确界和上确界的性质、下积分和与上积分和的定义以及下积分与上积分的定义，现在给出以下估计：

$$\begin{aligned}
s(f,P) &= \sum_{i,j} \inf_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)|X_i \times Y_j| \leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i}\left(\sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\right)|X_i| \\
&\leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i}\left(\int_Y f(x,y)dy\right)|X_i| \leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i} F(x)|X_i| \\
&\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} F(x)|X_i| \leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i}\left(\int_Y f(x,y)dy\right)|X_i| \\
&\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i}\left(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\right)|X_i| \\
&\leqslant \sum_{i,j} \sup_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)|X_i \times Y_j| = S(f,P)
\end{aligned}$$

因为 $f \in \mathcal{R}(X \times Y)$，所以当 $\lambda(P) \to 0$ 时，这些不等式两端的项趋于函数 f 在区间 $X \times Y$ 上的积分值。从上述估计中可得 $F \in \mathcal{R}(X)$，并且以下等式成立：

$$\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int_X F(x)dx$$

已证累次积分中先在 Y 上积分后在 X 上积分的情况。显然，可以类似地讨论先在 X 上积分后在 Y 上积分的情况

2.7.2 Fubini 定理的推论

推论 2.2

如果 $f \in \mathcal{R}(X \times Y)$，则（在勒贝格意义下）对于几乎所有的值 $x \in X$，积分 $\int_Y f(x,y)dy$ 存在；对于几乎所有的值 $y \in Y$，积分 $\int_X f(x,y)dx$ 存在

♡

证明 根据上述 Fubini 定理

$$\int_X \left(\overline{\int_Y} f(x,y)dy - \underline{\int_Y} f(x,y)dy \right) dx = 0$$

但是，括号中的上积分与下积分之差是非负的。可以看出，这个差在几乎所有的点 $x \in X$ 等于零

于是，根据达布准则，对于几乎所有的值 $x \in X$，积分 $\int_Y f(x,y)dy$ 存在

可以类似地证明上述推论的第二部分

推论 2.3

如果区间 $I \subset \mathbb{R}^n$ 是闭区间 $I_i = \left[a^i, b^i\right]$ $(i = 1, \cdots, n)$ 的直积，则

$$\int_I f(x)dx = \int_{a^n}^{b^n} dx^n \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \cdots \int_{a^1}^{b^1} f\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) dx^1$$

♡

证明 借助归纳法重复利用 Fubini 定理，显然可以得到这个公式。对右边所有内部积分的理解都与定理中的情况一样。例如处处都可以加入上积分号和下积分号

第 3 章 多重积分

3.1 基本概念

定义 3.1 (初等体)

称 n 维矩形平行六面体 (n-мерного прямоугольного параллелепипеда/n-dimensional rectangular parallelepiped) 从一个顶点出来的所有边的长度的乘积为 n 维矩形平行六面体的体积 (объём)。称有限数量的无公共点且边平行于坐标轴的 n 维矩形平行六面体的并集的点集为初等体 (элементарное тело)。称所有点都属于任意小体积的初等体的封闭集为 n 维的零体积曲面 (поверхность) (或流形 (многообразие)) ♣

定义 3.2 (体积)

对于任意有界区域，类似二维情况，定义上体积和下体积。若区域上体积与下体积相等，则称该区域为可立方的 (кубируемая) 亦即三重可积的。立方体的判别准则类似于平面情况 ♣

注 有界区域可立方当且仅当边界为一个 n 维体积为零的流形。类似对于二维情况，首先定义 n 维积分矩形平行六面体，然后是一般情况。重积分公式的建立方法也类似。剩余的类似的性质也是成立的

3.2 换元法

设函数 $f(y)=f\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ 沿区域 D 的 n 重积分已给定，考虑变换

$$\left\{\begin{array}{l}
y_1=\psi_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\
y_2=\psi_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\
\cdots \\
y_n=\psi_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)
\end{array}\right.$$

该变换简记为 $y=\psi(x)$，认为 $x \in E^n, y \in E^n, \psi$ 均为 n 个函数的总和。则 D 变换为 D' （$\psi\left(D'\right)=D$ 也假设存在逆变换 $D'=\psi^{-1}(D)$ ）

定理 3.1 (多重积分换元法/Замена переменных в n-кратном интеграле)

设 D 为 E^n 上可立方有界闭区域，函数 $f(y)=f\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ 在 D 上 Riemann 可积。设单值映射 $\psi: D' \rightarrow D$ 在 D' 上所有偏导数连续，则有 $\forall i, j=1, \ldots, n$ 任意偏导数 $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ 在 D' 所有内点上连续且可以延拓到在 D' 上所有点连续，还满足在 D' 上恒有非零 Jacobi 矩阵

$$J(\psi)=\det\left(\frac{\mathcal{D}\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)}{\mathcal{D}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}\right)=\left|\begin{array}{ccccc}
\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}
\end{array}\right| \neq 0$$

则 D' 可立方且有换元公式

$$\int\limits_D f(y) d y=\int\limits_{D'} f(\psi(x))\left|\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}\right| d x .$$

♡

例题 3.1 （3936/换元法/摆线）计算积分 $\iint\limits_{\Omega} y^2 \mathrm{~d} x \mathrm{~d} y$, 其中 Ω 是被横坐标轴和摆线

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \quad(0 \leqslant t \leqslant 2 \pi)$$

的第一拱所包围的区域

解 将参数方程记为 $x=x(t), y=y(t)$，则 $x(t)$ 为严格单调递增。如附图 (3.1) 所示，区域 Ω 在 O_x 轴方向的范围为 $0\leqslant x\leqslant 2\pi a$，固定 x，则 y 的范围为从 0 到 $y(t(x))$，其中参数 $t=t(x)$ 为 $x(t)$ 的反函数

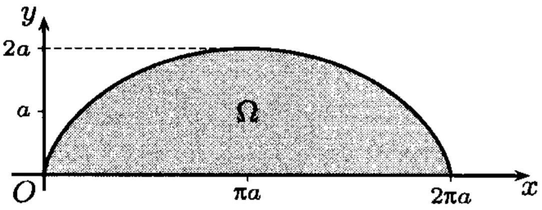

图 3.1: 3936 附图

根据区域 Ω 的形状可考虑用先 y 后 x 的二次积分来计算，则有

$$\iint\limits_{\Omega} y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\ \mathrm{d}x\int_0^{y(t(x))}\ y^2\ \mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}\ y^3(t(x))\mathrm{d}x$$

作变换 $x=x(t)=a(t-\sin t)$ 有 $\mathrm{d}x=a(1-\cos t)\mathrm{d}t, y(t(x))=y(t(x(t)))=y(t)$，进一步得

$$\iint\limits_{\Omega} y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\ a^4(1-\cos t)^4\ \mathrm{d}t=\frac{16a^4}{3}\int_0^{2\pi}\ \sin^8\frac{t}{2}\ \mathrm{d}t=\frac{32a^4}{3}\int_0^{\pi}\ \sin^8\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{64a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \sin^8\theta\mathrm{d}\theta=\frac{64a^4}{3}\cdot\frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35}{12}\pi a^4$$

推论 3.1 (平面极坐标变换/Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$)

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, (r\geqslant 0, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

$$\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$$

对 $r=0$，$\varphi=0$ 或 $\varphi=2\pi$ 不满足单值的条件

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot rdrd\varphi$$

作为推广有广义极坐标变换 $x=ar\cos^n\varphi, y=br\sin^n\varphi, (r\geqslant 0, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$，其中 a,b 与 n 为常数且有

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=nabr\sin^{n-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi$$

♡

例题 3.2 (3938,3948/极坐标变换) 设 Ω 为圆 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$，对二重积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ 作极坐标代换，并设定其积分限

解 令 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$，将区域 Ω 边界 $x^2+y^2=ax$ 变换为极坐标系中 $r=a\cos\varphi$。由此变量 φ 取值范围为 $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$，固定 φ，变量 r 取值范围为从 0 到 $a\cos\varphi$，则有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\ rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\mathrm{d}r$$

另一方面，也可以写出先 φ 后 r 的二次积分。外层对 r 积分范围为从 0 到 a，固定 r，内层对 φ 积分范围为从 $-\arccos\frac{r}{a}$ 到 $\arccos\frac{r}{a}$ （见附图 (3.2) 虚线）

则有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^{a}\ \mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}\ rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

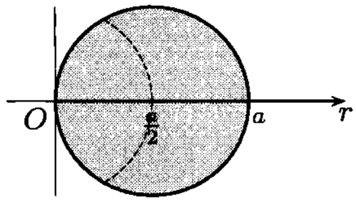

图 3.2: 3938 附图

例题 3.3 (3942,3955/极坐标变换单变量情形) 计算二重积分

$$\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

解 记二重积分为 I，积分区域极坐标表示为 $\pi\leqslant r\leqslant 2\pi$，与变量 φ 无关，则范围为 $[0;2\pi]$。由换元公式被积函数变为 $\sin r$，$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ 变为 $r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi$，则有

$$I=\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\iint\limits_{\pi\leqslant r\leqslant 2\pi} r\sin r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\ \mathrm{d}r$$

则利用可分离二重积分的命题 (2.1) 有

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\mathrm{d}r=2\pi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\ \mathrm{d}r=-2\pi\ (r\cos r)|_\pi^{2\pi}+2\pi\int_\pi^{2\pi}\cos r\ \mathrm{d}r=-6\pi^2$$

注 二重积分极坐标变换后与变量 φ 无关，则积分上下限均为常数

例题 3.4 (3967/椭圆) 计算

$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy,\quad \Omega=\left\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$$

解 由变换 $\begin{cases} x=p+ar\cos\varphi \\ y=q+br\sin\varphi\end{cases}$ 取 $p,q=0$ 得被积函数变为 $\sqrt{1-r^2}$，积分区域变为 $0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi<2\pi$，则由换元公式，计算 Jacobi 矩阵 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=abr$ ，则有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\varphi<2\pi}} abr\sqrt{1-r^2}drd\varphi=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=\frac{2}{3}ab\pi$$

例题 3.5 (3995/广义极坐标变换) 计算有界曲线面积:

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1, x=0, y=0$$

解 引入广义极坐标变换 $x=ar\cos^n\varphi, y=br\sin^n\varphi, r\geqslant 0$ ，其中 a,b 与 n 为常数且有

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=nabr\sin^{n-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi$$

于是在公式中取 $n=8$ 即有

$$8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\varphi\cos^7\varphi d\varphi\int_0^1 rdr=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\varphi\cos^6\varphi d(\sin\varphi)=4ab\int_0^1 t^7(1-t^2)^3dt=\frac{ab}{70}$$

推论 3.2 (柱坐标系变换/Цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$)

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z, (r\geqslant 0, 0\leqslant\varphi<2\pi)$$

$$\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(r,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot rdrd\varphi dz$$

♡

推论 3.3 (球坐标系变换/Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$)

$$x=r\cos\varphi\sin\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\theta, (r\geqslant 0, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

$$\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(r,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta$$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{D'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$$

作为推广有广义球坐标变换:

$$x=ar\cos^\alpha\varphi\sin^\beta\theta,\quad y=br\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta,\quad z=cr\cos^\beta\theta, (r\geqslant 0, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

则可计算得到 Jacobi 行列式为

$$\begin{aligned}\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}&=\begin{vmatrix}a\cos^\alpha\varphi\sin^\beta\theta & -\alpha ar\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^\beta\theta\sin\varphi & \beta ar\cos^\alpha\varphi\sin^{\beta-1}\theta\cos\theta\\ b\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta & \alpha br\sin^{\alpha-1}\varphi\sin^\beta\theta\cos\varphi & \beta br\sin^\alpha\varphi\sin^{\beta-1}\theta\cos\theta\\ c\cos^\beta\theta & 0 & -\beta cr\cos^{\beta-1}\theta\sin\theta\end{vmatrix}\\ &=-\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\beta-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta\end{aligned}$$

♡

例题 3.6 (4088/球坐标变换/柱坐标变换) 计算:

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$$

解 解一:(球坐标变换)

记积分为 I,从外层和中层积分知积分区域在坐标面 xOy 上的投影是单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 在第一象限的四分之一,记为 σ_{xy}。从内层积分知曲顶为球面 $x^2+y^2+z^2=2$,而曲底为锥面 $z^2=x^2+y^2$,见附图 (??)

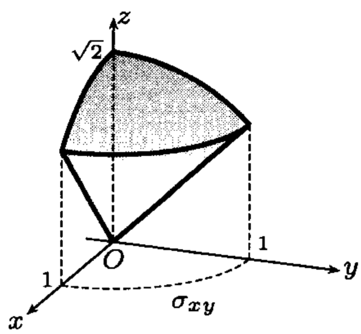

图 3.3: 4088 附图

作球坐标变换 $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$,则积分区域变为 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant$

$\frac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$，Jacobi 行列式等于 $r^2 \sin\theta$，则有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^4 \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos^3\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \cdot \frac{1}{5} 4\sqrt{2} = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}
$$

解 解二：（柱坐标变换）

利用柱坐标变换，积分区域变为 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1, r \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - r^2}$，Jacobi 行列式等于 r，则有

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r \, \mathrm{d}r \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{6} \int_0^1 \left[r\left(2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} - r^4 \right] \mathrm{d}r = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2} - 1)
$$

例题 3.7 （4116/广义球坐标变换）求以曲面

$$
\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k} (x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)
$$

为界的物体的体积

解 解一：（线性变换）

令 $u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, v = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}, w = \frac{z}{c}$ 得积分变换 Jacobi 行列式绝对值

$$
\left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} \right|} = \frac{abc}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}}
$$

曲面方程变换为 $v = (u + w)^2$，从变换式解出 u, v 的线性函数 x, y：

$$
x = \frac{bu + kv}{\frac{b}{a} + \frac{k}{h}}, \quad y = \frac{au - hv}{\frac{a}{b} + \frac{h}{k}}
$$

则约束条件 $y \geqslant 0$ 在变换后为 $au - hv \geqslant 0$，与曲面在 $w = 0$ 时约束 $v = u^2$ 给出了坐标面 uOv 上有界区域 $D_{uv} = \left\{(u,v) \mid 0 \leqslant u \leqslant \frac{a}{h}, u^2 \leqslant v \leqslant \frac{a}{h} u \right\}$，其中 $x \geqslant 0$ 也成立，而当 $(u,v) \in D_{uv}$ 时 $0 \leqslant w \leqslant \sqrt{v} - u$，则有

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{abc}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}} \int_0^{\frac{a}{h}} \mathrm{d}u \int_{u^2}^{\frac{au}{h}} \mathrm{d}v \int_0^{\sqrt{v}-u} \mathrm{d}w = \frac{abc}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}} \int_0^{\frac{a}{h}} \mathrm{d}u \int_{u^2}^{\frac{au}{h}} (\sqrt{v} - u) \mathrm{d}v \\
&= \frac{abc}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}} \int_0^{\frac{a}{h}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{h} u^2 + \frac{1}{3} u^3 \right] \mathrm{d}u = \frac{abc}{60\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right)} \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^4
\end{aligned}
$$

解 解二：（广义球坐标变换）

由于变量 x, y, z 均大于等于 0，作广义球坐标代换

$$
x = ar\cos^\alpha \varphi \sin^\beta \theta, \quad y = br\sin^\alpha \varphi \sin^\beta \theta, \quad z = cr\cos^\beta \theta
$$

则可计算得到 Jacobi 行列式为

$$
\begin{aligned}
\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} &= \begin{vmatrix} a\cos^\alpha \varphi \sin^\beta \theta & -\alpha ar\cos^{\alpha-1} \varphi \sin^\beta \theta \sin\varphi & \beta ar\cos^\alpha \varphi \sin^{\beta-1} \theta \cos\theta \\ b\sin^\alpha \varphi \sin^\beta \theta & \alpha br\sin^{\alpha-1} \varphi \sin^\beta \theta \cos\varphi & \beta br\sin^\alpha \varphi \sin^{\beta-1} \theta \cos\theta \\ c\cos^\beta \theta & 0 & -\beta cr\cos^{\beta-1} \theta \sin\theta \end{vmatrix} \\
&= -\alpha\beta abcr^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\beta-1} \theta \sin^{2\beta-1} \theta
\end{aligned}
$$

取 $\alpha = 2, \beta = 2$ 则有 Jacobi 行列式绝对值为 $4abcr^2 \sin^3\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi$，曲面方程变为

$$
r = \left(\frac{a}{h} \cos^2\theta - \frac{b}{k} \sin^2\theta \right) \sin^2\varphi
$$

由题设曲面方程有在坐标面 xOy 第一象限中，则有

$$
\frac{x}{h} - \frac{y}{k} \geqslant 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 = \arctan\sqrt{\frac{ak}{bh}}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}
$$

计算体积：

$$
\begin{aligned}
V &= 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left[(a/h)\cos^2\varphi-(b/k)\sin^2\varphi\right]\sin^2\theta} r^2\ \mathrm{d}r\\
&= \frac{4abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi-\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3\ \mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{abc}{15}\int_0^{\varphi_0}\left[\frac{a}{h}-\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\sin^2\varphi\right]^3\ \mathrm{d}\left(\sin^2\varphi\right)\\
&= \frac{abc}{15}\cdot\frac{-1}{4\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)}\left[\frac{a}{h}-\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\sin^2\varphi\right]^4\Bigg|_0^{\theta_0} = \frac{abc}{60}\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}
\end{aligned}
$$

3.3 体积计算

例题 3.8 （3956/换元法面积比）利用函数组

$$u=\frac{y^2}{x},\quad v=\sqrt{xy}$$

把正方形 $S\{a\leqslant x\leqslant a+h, b\leqslant y\leqslant b+h\}(a>0,b>0)$ 变换为区域 S'，求区域 S' 与 S 的面积之比；当 $h\to 0$ 时求面积比极限

解 取 $h>0$，则 S 面积为 $|S|=h^2$，而 S' 为面积为 $|S'|=\iint\limits_{S'}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$ 的曲边四边形。在题设变换的逆变换下，区域 S' 映射为正方形 S。计算 Jacobi 行列式

$$I=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$$

然后则有

$$|S'|=\iint\limits_S|I|\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{3}{2}\int\limits_a^{a+h}x^{-\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x\int\limits_b^{b+h}y^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}y=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)\cdot\left[(b+h)^{\frac{5}{2}}-b^{\frac{5}{2}}\right]$$

则有面积比

$$\frac{|S'|}{|S|}=\frac{6}{5h^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)\cdot\left[(b+h)^{\frac{5}{2}}-b^{\frac{5}{2}}\right]$$

当 $h\to 0$ 时极限为

$$\lim_{h\to 0}\frac{|S'|}{|S|}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

注 注意，面积之比的极限恰好等于 $|I|$ 在 $x=a,y=b$ 处的值，同时雅可比行列式 $I<0$ 的几何意义为当正方形 S 的边界 (闭折线) $ABCDA$ 取逆时针方向时，曲边四边形 S' 的边界 $A'B'C'D'A'$ 取顺时针方向

定理 3.2 (积分降维)

a) 设函数 $g(x,y,z)$ 在矩形 $P=I_1\times I_2\times I_3$ 上有三重积分 $\iiint\limits_P g(x,y,z)$，在矩形 $Q=I_2\times I_3$ 上有二重积分 $h(x)=\iint\limits_Q g(x,y,z)dydz$，则函数 $h(x)$ 在闭区间 I_1 上可积且成立等式

$$\iiint\limits_P g(x,y,z)=\int_{I_1}h(x)dx$$

b) 设 $D\subset P=I_1\times I_2\times I_3$，对于固定 $x\in I_1$ 记号 $\dot{D}(x)$ 代表集合 $\{(y,z)\in I_2\times I_3\mid(x,y,z)\in D\}$，并

设 $D(x)$ 是二维 Jordan 可测区域，对于每个 $x\in I_1$，积分

$$h(x)=\iint\limits_{D(x)} g(x,y,z)dydz$$

存在，则有

$$\iiint\limits_{P} g(x,y,z)=\int\limits_{I_1} h(x)dx$$

♡

注 对于固定的 x，施用类似定理于二重积分 $h(x)$，可得

$$h(x)=\int\limits_{a_2}^{b_2}dy\int\limits_{D(x,y)}g(x,y,z)dz$$

其中集合 $D(x,y)$ 是集合 D 与直线 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z\in\mathbb{R}\}$ 的交。(此处须假定 $D(x,y)$ 是 Jordan 可测，该假设并非必然成立)

例题 3.9 (4012/曲顶柱体) 求 $z=xy, x+y+z=1, z=0$ 所围区域的体积

解 $z=xy$ 是双曲抛物面 (马鞍面) 且在 xOy 第一、三象限内 $z>0$，而在第二、四象限内 $z<0$，则所求曲顶柱体在第一卦限内，其底为 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成的直角三角形，而其曲顶是由 $z=1-x-y$ 和 $z=xy$ 的两片组成。下面求出交线然后分为两个积分求积。

从曲面 $z=xy$ 和平面 $x+y+z=1$ 消去 z，即得到 $xy+x+y=1$，这就是它们的交线在坐标面 xOy 上的投影. 将该方程写为 $(x+1)(y+1)=2$，即可看出它是坐标面 xOy 上以点 $(-1,-1)$ 为中心的直角双曲线的一部分。

曲顶柱体的底为上述曲线段分为两个区域 Ω_1 和 Ω_2，如附图 (??)

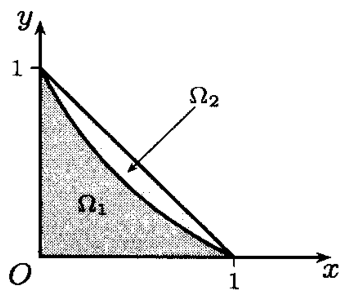

图 3.4: 4012 附图

曲顶方程分别为 $z=xy$ 和 $z=1-x-y$，则有

$$\begin{aligned}
V&=\iint_{\Omega_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Omega_2}(1-x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}y\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y\\
&=\frac12\int_0^1\left[\frac{x(1-x)^2}{(1+x)^2}+(1-x)^2-\frac{(1+2x)(1-x)^2}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac12\int_0^1\frac{x(1-x)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac12\int_0^1\left(x^2-3x+4-\frac{4}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{17}{12}-2\ln 2
\end{aligned}$$

例题 3.10 (4020/曲顶曲底柱体) 求由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=x+y$ 所围区域的体积

解 消去 z 得 $x^2+y^2=x+y$，即两个曲面交线在坐标面 xOy 上投影，由此可确定积分区域为 Ω 为 $x^2+y^2-x-y\leqslant 0$。注意到

$$x^2+y^2-x-y=\left(x-\frac12\right)^2+\left(y-\frac12\right)^2-\frac12=0$$

则 Ω 为以点 $\left(\frac12,\frac12\right)$ 为圆心和以 $\frac{\sqrt2}{2}$ 为半径的圆，则 Ω 中的点满足 $x^2+y^2-x-y\leqslant 0$，因此柱体的顶为

$z=x+y$, 底为 $z=x^2+y^2$，于是所求体积为

$$V=\iint_{\Omega}\left(x+y-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

由极坐标变换 $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，区域 Ω 变为 $r\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，被积函数变为 $x+y-x^2-y^2=\frac{1}{2}-r^2$，Jacobi 行列式为 r，因此则有

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}r\left(\frac{1}{2}-r^2\right)\mathrm{d}r=2\pi\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{8}$$

例题 3.11 （4040/Viviani 问题[1]）求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 之外的部分的面积

解 解一：

求球面上从球中挖去两个 Viviani 体后表面积，Viviani 体见附图 (??)

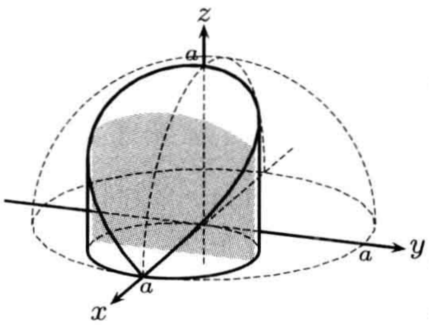

图 3.5: 4040 附图

计算曲面面积元：

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\frac{a\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

利用对称性即可求得两个 Viviani 体在球面上挖去的面积为

$$\begin{aligned}S&=8\iint_{x^2+y^2-ax\leqslant 0}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\&=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\ \mathrm{d}r=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\end{aligned}$$

利用已知的球面积公式即有 $4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2$

解 解二：（球坐标变换）

曲面在球坐标下为 $r=a$，即与 φ 和 θ 无关，则有曲面面积元 $\mathrm{d}S=a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$。对于满足 $x^2+y^2-ax\leqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$ 的曲面片，可见有 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$。从 $x^2+y^2=ax$ 和 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 可求得 $z=a\sin\theta$，再与 $z=a\cos\varphi$ 比较有 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$。则有两个 Viviani 体从球面挖去的表面积为

$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

利用已知的球面积公式即有 $4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2$

例题 3.12 （4104/体积计算）求以 $az=x^2+y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$ 为界的物体的体积.

解 解一：（三重积分/柱坐标变换）

消去 z 得 $x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}$，即曲面交线在坐标面 O_{xy} 上投影，除点 $x=y=0$ 之外为圆 $\sqrt{x^2+y^2}=a$。

[1]Viviani 曲线由球面上经纬度相等或相反的点组成。Viviani 在整理修复佛罗伦萨图书馆所藏东方学者对 Apollonius《圆锥曲线论》第 5 卷评注时，于 1692 年提出佛罗伦萨之迷：在屋顶四面挖去相同圆孔形窗户，求教堂半球形屋顶面积，即球面与两柱面交线。该问题曾引起 Bernoulli · Johann、J.Wallis 和 L⊠Hospital 等人重视，早在 1689 年，Leibniz 从德国到意大利去会见 Viviani 并给出了积分法解法

在圆内有 $\frac{1}{a}\left(x^2+y^2\right) \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ ，则考虑用柱坐标变换得：

$$V=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r \,\mathrm{d}r \int_{r^2/a}^r \mathrm{d}z=2\pi \int_0^a r\left(r-\frac{1}{a} r^2\right) \mathrm{d}r=2\pi\left(\frac{a^3}{3}-\frac{1}{4a} \cdot a^4\right)=\frac{\pi}{6} a^3$$

解 解二：（二重积分）

按曲顶曲底柱体体积写为二重积分

$$V=\iint_{x^2+y^2 \leqslant a}\left[\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{a}\left(x^2+y^2\right)\right] \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

然后极坐标变换得

$$V=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a r\left(r-\frac{1}{a} r^2\right) \mathrm{d}r=2\pi\left(\frac{a^3}{3}-\frac{1}{4a} \cdot a^4\right)=\frac{\pi}{6} a^3$$

解 解三：（旋转体）

从曲面方程知所求区域为旋转轴为 O_z 轴的旋转体，令 $y=0$ 作出在坐标面 O_{xz} 上阴影区，如附图 (3.6)

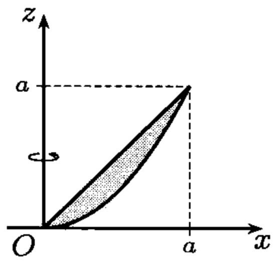

图 3.6: 4104 附图

$\left\{(x,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, \frac{1}{a} x^2 \leqslant z \leqslant x\right\}$ ，则旋转体与平面 $Z=z \in[0;a]$ 的截面为圆环，内半径为 z，外半径为 $\sqrt{az}$，则圆环面积为 $\pi az-\pi z^2$，求积得

$$V=\int_0^a\left(\pi az-\pi z^2\right) \mathrm{d}z=\pi\left.\left(\frac{az^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)\right|_0^a=\frac{\pi}{6} a^3$$

第 4 章 反常积分

4.1 基本概念

定义 4.1 (可行区域与反常积分)

设区域 D_n 为 Jordan 可测的有界连通开区域，若满足：

a) （单调性）$\forall n \in \mathbb{N} : D_n \subset D_{n+1}$

b) （穷竭性）$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} g(x,y)dxdy = I$$

称数 I 为函数 $g(x,y)$ 沿无界区域 D 的第一类反常二重积分，称 $\{D_n\}$ 或 D 为可行区域，记为 $D_n \uparrow D$

设区域 D_n 为 Jordan 可测的有界连通区域，且具有奇点集 $L \subset \bar{D}$ 若满足：

a) （单调性）$\forall n \in \mathbb{N} : D_n \subset D_{n+1}$

b) （穷竭性）$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

c) （奇点集）$\forall n \in \mathbb{N} : L \cap \bar{D}_n = \varnothing$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} g(x,y)dxdy = I$$

称数 I 为无界函数 $g(x,y)$ 沿有界 Jordan 可测的具有奇点集 $L \subset \bar{D}$ 的第二类反常积分，称 $\{D_n\}$ 或 D 为可行区域，记为 $D_n \uparrow D$

♣

注 定义可以简述为：

1) 有界函数 $g(\bar{x})$ 沿无界区域 D 的积分为第一类反常多重积分；

2) 有有限多个奇点 $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k$ 的函数 $g(\bar{x})$ 在有界 Jordan 可测区域 D 上积分为第二类反常多重积分（奇点即在此点的任何邻域内函数都无界的点，本身不必属于函数的定义域）

注 为使第二类反常积分存在，显然必须要有 $\mu(L) = 0$；在两类反常积分中都保持使用标准的记号 $I = \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy$；在重数大于 2 的情形下，反常重积分的定义与二重情形完全一样

定义 4.2 (开、闭球与两类反常积分)

记 $B(R, x_0)$ 为中心为 x_0 半径为 R 的开球（открытый шар радиуса R с центром в точке x_0），$\bar{B}(R,0)$ 为闭球。

（第一类反常积分）设 $f(x)$ 在 $x \in E^m$ 上定义且对每个闭球 $\bar{B}(R,0)$ 可积，若存在极限

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\bar{B}(R,0)} f(x)dx$$

则称 $f(x)$ 在 E^m 上在 Cauchy 主值意义下可积（интегрируема в смысле главного значения по Коши），称极限为函数 $f(x)$ 反常积分的 Cauchy 主值，记为

$$V.p. \int\limits_{E^m} f(x)dx$$

（第二类反常积分）若 $f(x)$ 在 $D \subset E^m$ 上有奇点 x_0 且在每一个区域 $D_R = D \backslash B(R, x_0)$ 可积，则引入

Cauchy 主值作为极限：

$$\text{V.p.}\int\limits_{D} f dx = \lim_{R\to 0+0}\int\limits_{D_R} f(x)dx$$

4.2 非负项反常积分

定理 4.1 (非负项反常积分收敛充要条件)

设 $f(x)\geqslant 0, x\in D$，则反常积分 $\int\limits_{D} f(x)dx$ 收敛的充要条件为序列 $\left\{\int\limits_{D_n} f(x)\right\}$ 对于任意可行区域 $D_n\uparrow D$ 均有界

证明 证明一：(反证法)

若积分 I 存在，则由任何收敛数列必有界即得必要性，以下证明充分性。设序列

$$I_n = \int\limits_{\bar{D}_n} f(x)dx$$

对于任意可行区域 $D_n\uparrow D$ 有界。由 $\forall x\in D: f(x)\geqslant 0$，则有 $\{I_n\}$ 不减，则由 Weierstrass 定理知有界不减序列 $\{I_n\}$ 必收敛，即有 $(\exists I=\lim\limits_{n\to\infty} I_n)(\forall n\in\mathbb{N}):(I_n\leqslant I)$

取另一个可行区域序列 $\{D_n'\}$，记序列 $\{I_n'\}$

$$I_n' = \int_{\overline{D_n'}} f(x)dx.$$

为该序列对应反常积分。固定任意号码 n，观察 D_n'，欲证能找到区域 D_m 满足 $\overline{D_n'}\subset D_m$

反证：设 $(\forall k\in\mathbb{N})(\exists M_k\in\overline{D_n'}):(M_k\notin D_k)$。由区域 $\overline{D_n'}$ 有界封闭，则根据 Bolzano-Weierstrass 定理可知，可以从 $\{M_k\}$ 选出收敛到某个点 $M\in\overline{D_n'}$ 的序列。但 $\exists k_1\in\mathbb{N}: M\in D_{k_1}$。由于集合 D_{k_1} 开，则有点 M 与其邻域属于其中。但这时带有充分大号码的点 M_k 属于这个集合 (及所有 $D_k, k>k_1$)，这与点 M_k 的选择矛盾。因此得证 $\exists D_m:\overline{D_n'}\subset D_m$，这时

$$I_n' = \int_{D_n'} f(x)dx \leqslant \int_{D_m} f(x)dx = I_m\leqslant I$$

则有序列 $\{I_n'\}$ 有界不减，由 Weierstrass 定理有其收敛到 I'，且 $I'\leqslant I$。

同理，对换 $\{I_n'\}$ 与 $\{I_n\}$ 位置，则有 $I\leqslant I'$，则有 $I=I'$

证明 证明二：(**Heine-Borel** 引理)

上同证明一，下证能找到 D_m 满足 $\overline{D_n'}\subset D_m$。

显然有 $(\forall x\in\overline{D_n'})(\exists m_x):(x\in D_{m_x})$，又集合系 $\{D_{m_x}\}$ 为 $\overline{D_n'}$ 紧覆盖，则由 Heine-Borel 引理可以选出有限子覆盖。通过这个子覆盖最大的号码 m 则有 $\overline{D'}_n\subset D_m$。其余同证明一。

定理 4.2 (比较判别法/общий признак сравнения)

设函数 $g(x), f(x)$ 在 D 包含的任意 Jordan 可测的紧集上可积且 $\forall x\in D: 0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则由反常积分 $\int\limits_{D} g(x)dx$ 收敛推出反常积分 $\int\limits_{D} f(x)dx$ 收敛

证明 设可行区域 $\{D_n\}\uparrow D$，则

$$I_n = \int\limits_{D_n} f(x)dx \leqslant \int\limits_{D_n} g(x)dx = I_n'$$

由此得若 $\{I_n'\}$ 有界，则有 $\{I_n\}$ 有界。由定理 (4.1) 即得 $\int\limits_{D} f(x)dx$ 收敛

注 自然有由反常积分 $\int\limits_{D} f(x)dx$ 发散推出反常积分 $\int\limits_{D} g(x)dx$ 发散

推论 4.1

若反常积分 $\int\limits_{D} |f(x)|dx$ 收敛，则 $\int\limits_{D} f(x)dx$ 收敛

命题 4.1 (闭可行区域性质)

(4166) 若函数 $f(x,y)$ 为非负连续函数，有界闭区域 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 为区域 S 可行区域，则成立等式 (左端与右端同时有意义或无意义)：

$$\iint\limits_{S} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

证明 由于 $\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ 关于 n 为单调递增数列，则有且仅有两种可能性，收敛于有限极限或发散于正无穷大。

设可行区域序列 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 有下列有限极限 I

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

则有

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\leqslant I$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}):I-\varepsilon<\iint\limits_{S_{n_0}} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\leqslant I$$

现设 $T_n(n=1,2,\cdots)$ 是 S 的另一个可行闭区域序列，则 $(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N):T_n\supset S_{n_0}$，由于 f 非负则有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S_{n_0}} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{T_n} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

另一方面，$(\forall n>N)(\exists n_1\in\mathbb{N}):T_n\subset S_{n_1}$，于是又有

$$\iint\limits_{T_n} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{S_{n_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\leqslant I$$

综上当 $n>N$ 时成立不等式

$$I-\varepsilon<\iint_{T_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant I$$

得证

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{T_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I$$

对发散情形，用反证法并重复前面的推导即得若有某个区域序列 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=+\infty$$

则任何其他区域序列也必定如此

例题 4.1 (4161/无界区域反常重积分) 设 $0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$，研究

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

敛散性

解 由题设有

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p} \leqslant \frac{M}{(x^2+y^2)^p}$$

则题给积分与

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}$$

敛散性相同。则设可行区域序列 $D_n=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant n^2\right\} \quad (n=2,3,\cdots)$，有当 $n\to\infty$ 时序列 $\{D_n\}$ 穷尽积分区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\right\}$。利用极坐标变换即有

$$\iint\limits_{D_n} \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^n \frac{r\ \mathrm{d}r}{r^{2p}} = 2\pi \int_1^n \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}$$

考虑 $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}$ 敛散性，利用比较判别法得：当 $p>1$ 时收敛，而当 $p\leqslant 1$ 时发散

例题 4.2 （4199）计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

解 用球坐标代换可求积如下：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty} r^2\mathrm{e}^{-r^2}\ \mathrm{d}r\\ =&4\pi\left(-\frac{r}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\ \mathrm{d}r\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \pi^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

4.3 变号项反常积分

定义 4.3 (绝对收敛)

若绝对值反常积分 $\int\limits_D |f(x)|dx$ 收敛，则称反常积分 $\int\limits_D f(x)dx$ 绝对收敛

注 与一维情况一样，容易证明绝对收敛满足收敛的性质。但与一维情况不同的是，收敛也意味着绝对收敛，则对于多重反常积分，二者是等价的，下面证明之

定理 4.3 (多重反常积分绝对收敛必要条件)

若多重反常积分 $\int\limits_D |f(x)|dx$ 收敛，则 $\int\limits_D f(x)dx$ 收敛，即多重反常积分绝对收敛必收敛

证明 由 $f(x)$ 沿 D 可积则有在区域 D 任意可立方区域上可积，由此有 $|f(x)|$ 沿 D 可积，于是观察在 D 上可积函数

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}, f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

注意到函数在 D 上满足 $0\leqslant f_+(x)\leqslant |f(x)|, 0\leqslant f_-(x)\leqslant |f(x)|, f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ ，则由定理 (4.2) 有积分 $\int\limits_D f_+(x)dx, \int\limits_D f_-(x)dx$ 收敛，则 $f(x)=f_+(x)+f_-(x)$ 的积分也收敛

定理 4.4 (多重反常积分绝对收敛充分条件)

若多重反常积分 $\int\limits_D f(x)dx$ 收敛，则有 $\int\limits_D |f(x)|dx$ 收敛，即多重反常积分收敛必绝对收敛

证明 反证：假设多重反常积分 $\int\limits_D f(x)dx$ 收敛且 $\int\limits_D |f(x)|dx$ 发散，对于任意可行区域递增序列 $\{D_n\}: D_n\uparrow D$

有积分 $a_n := \int\limits_{D_n} |f(x)|dx$ 为单调递增无穷大序列，由此可选出序列 $\{D_n\}$ 满足 $a_{k_{n+1}} > 3a_{k_n} + 2n$ 即

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \int\limits_{D_{n+1}} |f(x)|dx > 3\int\limits_{D_n} |f(x)|dx + 2n$$

记 $P_n = D_{n+1} \backslash D_n$，则有

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \int\limits_{P_n} |f(x)|dx > 2\int\limits_{D_n} |f(x)|dx + 2n$$

注意到 $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$，则有

$$\int\limits_{P_n} |f(x)|dx = \int\limits_{P_n} f_+(x)dx + \int\limits_{P_n} f_-(x)dx$$

$$\int\limits_{P_n} f_+(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{P_n} |f(x)|dx \geqslant \frac{1}{2}\left(2\int\limits_{D_n} |f(x)|dx + 2n\right)$$

$$2\int\limits_{P_n} f_+(x)dx \geqslant \int\limits_{P_n} |f(x)|dx = \int\limits_{P_n} f_+(x)dx + \int\limits_{P_n} f_-(x)dx$$

不失一般性，假设在等式右边两个积分中第一个更大 $\int\limits_{P_n} f_+(x)dx > \int\limits_{P_n} f_-(x)dx$，则有

$$\forall n \in \mathbb{N}: \int_{P_n} f_+(x)dx > \int_{D_n} |f(x)|dx + n$$

把 P_n 划分为有限数目子区域使得函数 $f_+(x)$ 的积分下和 $\sum_i m_i\Delta\sigma_i$ 对于该划分与积分差值很小，则 $\int\limits_{P_n} f_+(x)dx$ 可以用下列不等式代替

$$\sum_i m_i\Delta\sigma_i > \int_{D_n} |f(x)|dx + n$$

注意，所有 $m_i \geqslant 0$ 且在积分和 $\sum_i m_i\Delta\sigma_i$ 中加数 $m_i > 0$；记对应子区域的并集为 P_n'，在区域 P_n' 满足 $f(x) > 0$，则在区域 P_n' 上 $f(x) = f_+(x)$ 满足

$$\int_{P_n'} f(x)dx > \int_{D_n} |f(x)|dx + n$$

将该不等式与下面的不等式相加

$$\int_{D_n} f(x)dx \geqslant -\int_{D_n} |f(x)|dx$$

得到

$$\int_{D_n^*} f(x)dx > n$$

其中 $D_n^* = D_n \bigcup P_n'$。显然 $D_n^* \uparrow D$，但由此得积分 $\int_D f(x)dx$ 发散，矛盾

推论 4.2 (反常多重积分绝对收敛充要条件)

反常多重积分 $\int\limits_D |f(x)|dx$ 与 $\int\limits_D f(x)dx$ 敛散性相同，即反常多重积分收敛与绝对收敛等价

注 若在多维情况下定义一维反常积分，则该推论在一维情况下也有效，即作为单调穷尽积分域的任意集合序列上的积分极限

定理 4.5

若积分 $\iint\limits_D g(x,y)d\mu$ 收敛且函数 $g(x,y)$ 沿区域 D 累次积分存在，则两者相等

定理 4.6

若积分 $\iint\limits_{D} g(\bar{y})d\mu$ 收敛且 $\bar{y}=\bar{\varphi}(\bar{x})$ 为区域 D_0 到 D 的光滑映射，它在 D_0 的内部是双方单值的，则成立下述变元变换公式：

$$\iint\limits_{D} g(\bar{y})d\mu=\iint\limits_{D_0} g(\bar{\varphi}(\bar{x}))\left|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})\right|d\bar{x}$$

第 5 章 曲线积分

5.1 基本概念

定义 5.1 (沿曲线连续)

设 $L = AB$ 为平面 O_{xy} 上由参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leqslant t \leqslant b$ 定义的可求长闭曲线，且没有自交点 (точка самопересечения) 和重叠区域 (участков самоналегания)，若

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall M', M'' \in L) : [\rho(M', M'') < \delta \Rightarrow |f(M') - f(M'')| < \varepsilon]$$

则称函数 $f(x, y)$ 沿曲线 L 连续 ♣

注 这即是一致连续性的定义，但是由于曲线的点集的有界性和封闭性，这些概念是等价的

定义 5.2 (曲线积分)

将闭区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 划分成 n 个部分闭区间 $[t_{k-1}; t_k]$，在每个对应部分闭区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 的部分弧 $M_{k-1}M_k$ 上选取任意介点 N_k。记 $M_{k-1}M_k$ 弧长为 Δl_k，称 $\Delta l = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta l_k$ 为划分的直径 (диаметр разбиения)。观察积分和：

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(N_k) \Delta l_k$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(N_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(N_k)(y_k - y_{k-1})$$

若当 $\Delta l \to 0$ 时，积分和 σ_1 存在极限 I_1，称该极限为函数 $f(x, y)$ 沿曲线 L 第一型积分 (криволинейный интеграл I рода от функции $f(x, y)$ по кривой L)，记为

$$I_1 = \int\limits_L f(x, y) dl \text{ 或} I_1 = \int\limits_{AB} f(x, y) dl$$

若当 $\Delta l \to 0$ 时，积分和 σ_2 存在极限 I_2，称该极限为函数 $P(x, y)$ 沿曲线 L 从 A 到 B 的方向关于第一坐标的第二型积分 (криволинейный интеграл II рода от функции $P(x, y)$ по кривой L)，记为

$$I_2 = \int\limits_{AB} P(x, y) dl$$

类似地，定义函数 $g(x, y)$ 沿曲线 L 从 A 到 B 的方向关于第二坐标的第二型积分，记为

$$I_3 = \int\limits_{AB} Q(x, y) dl$$

称表达式

$$I = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$

为线性微分形式 $Pdx + Qdy$ 沿曲线 $L = AB$ 的一般第二型曲线积分 (общий криволивнейный интеграл II рода) ♣

注 **(曲线积分物理意义)**

第一型曲线积分：曲线 L 带有给定的线密度 $f(x)$(линейная плотность) 的质量 (масса)

第二型曲线积分：带有分量 $P(x, y), Q(x, y)$ 沿曲线 L 从 A 到 B 轨迹沿点位移的力的功 $\vec{F}(x, y)$ (работа силы $\vec{F}(x, y)$ с компонентами $P(x, y), Q(x, y)$ по перемещению точки по заданной траектории из точки A

в B вдоль кривой L)

注 **(曲线积分方向)**

由积分形式得出，第一型曲线积分不依赖于沿曲线的运动方向，第二型曲线积分变化时改变方向

定义 5.3 (光滑性/分段光滑性/奇点)

若由参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 定义的曲线在闭区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上有连续导数，则称曲线为光滑的 (гладкая)。若曲线是连续的并且分为有限数量的没有公共内点的光滑段，则称该曲线为分段平滑的 (кусочно-гладкая)。称曲线上满足 $\varphi'=\psi'=0$ 的点为奇点 (особая) ♣

定理 5.1 (曲线积分的 Riemann 积分表示)

设 $L=AB$ 为没有奇点的光滑曲线，函数 $f(x,y), P(x,y), Q(x,y)$ 沿曲线 L 连续，则存在第一型和第二型曲线积分，且以单重积分的形式通过以下公式表示

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt \tag{5.1}$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx=\int_a^b P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt \tag{5.2}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy=\int_a^b Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt \tag{5.3}$$

♡

证明 注意到由于被积函数的连续性，公式 (5.1)(5.2)(5.3) 右侧的积分存在。式 (5.3) 的证明与式 (5.2) 类似，因此只证明式 (5.1) 和 (5.2)

将闭区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 划分成 n 部分闭区间且有介点 $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ 与对应积分和。点 (ξ_k, η_k) 将对应参数 $t=\tau_k, t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$ 某个值。有参数化给定的曲线的弧长公式：

$$\Delta l_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

$$x_k-x_{k-1}=\varphi\left(t_k\right)-\varphi\left(t_{k-1}\right)=\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)dt$$

则积分和可以记为

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^n f\left(\varphi\left(\tau_k\right), \psi\left(\tau_k\right)\right) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

$$\sigma_2=\sum_{k=1}^n P\left(\varphi\left(\tau_k\right), \psi\left(\tau_k\right)\right) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)dt$$

写出式 (5.1)，(5.2) 右边积分与积分和 σ_1,σ_2 的差，$[a,b]$ 上定积分可以改写 $[t_{k-1},t_k]$ 段上的定积分，则有

$$\sigma_1-\int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt=$$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\varphi\left(\tau_k\right),\psi\left(\tau_k\right)\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(f\left(\varphi\left(\tau_k\right),\psi\left(\tau_k\right)\right)-f(\varphi(t),\psi(t))\right)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

$$\sigma_2-\int_a^b P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} P\left(\varphi\left(\tau_k\right),\psi\left(\tau_k\right)\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(P\left(\varphi\left(\tau_k\right),\psi\left(\tau_k\right)\right)-P(\varphi(t),\psi(t))\right)\varphi'(t)$$

由函数 $x=\varphi(t)$ 和 $=\psi(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x,y),P(x,y)$ 沿着曲线 L 连续，则由连续性定理，复合函数 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 和 $P(\varphi(t),\psi(t))$ 在 $[a,b]$ 上连续。另外，由 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 不会在 $[a,b]$ 上同时变为零，则有 $\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格正，即：

$$\forall t\in[a,b]:\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\geqslant m>0$$

记部分弧长度为

$$\Delta l_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

则有

$$\Delta l_k\geqslant m\int_{t_{k-1}}^{t_k}dt=m\left(t_k-t_{k-1}\right)\Leftrightarrow t_k-t_{k-1}\leqslant\frac{\Delta l_k}{m}$$

若 $\Delta l_k\to 0$，则有 $(t_k-t_{k-1})\to 0$，同样有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):[(\max_k\Delta l_k<\delta)\Rightarrow$$

$$(|f\left(\varphi\left(\tau_k\right),\psi\left(\tau_k\right)\right)-f(\varphi(t),\psi(t))|<\varepsilon)\wedge(|P\left(\varphi\left(\tau_k\right),\psi\left(\tau_k\right)\right)-P(\varphi(t),\psi(t))|<\varepsilon)]$$

设 $\max_k\Delta l_k<\delta$，则有估计

$$\left|\sigma_1-\int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt=\varepsilon\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt=\varepsilon l$$

其中 l 为 AB 弧长

$$\left|\sigma_2-\int_a^b P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|\varphi'(t)|\,dt\leqslant\varepsilon M\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}dt=\varepsilon M(b-a)$$

其中 $M=\max_{[a,b]}|\varphi'(t)|$

由于 ε 为任意数，则积分和 σ_1,σ_2 当 $\Delta l\to 0$ 时有极限，分别等于

$$\int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt,\int_a^b P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt$$

已证公式 (5.1)(5.2)(5.3) 左侧曲线积分存在性及这些公式的有效性

注 在分段光滑曲线 L 上的曲线积分可以定义为构成曲线 L 的所有光滑段的对应的曲线积分的和，因此公式 (5.1)(5.2)(5.3) 对于分段光滑曲线也成立。若函数 $f(x,y),(x,y),Q(x,y)$ 不是严格连续的，则仅沿着 L 分段连续（即当曲线划分为有限数量的没有公共内点的曲线段时，函数沿着每个曲线段连续）

注 上面建立了取决于穿过曲线 L = AB 的方向的第二型曲线积分，考虑表达式

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

的符号，其中 L 为闭曲线，即点 B 与点 A 重合的曲线。遍历闭轮廓（замкнутый контур）L 有两个可能的方向，称区域内点均在轮廓遍历方向左侧的方向为正遍历方向（положительное направление обхода）（通俗即逆时针方向（движение против часовой стрелки））。下设在闭轮廓 L 上的积分中，该轮廓始终沿正方向遍历

注 对空间上曲线积分可以得到类似的结果和公式，仅需改为曲线 L = AB 的参数方程为 $x=\varphi(t), y=\varphi(t), z=\chi(t), a\leqslant t\leqslant b$。显然，曲线积分与普通定积分具有相同的性质

性质 第一类曲线积分有如下性质：

1)（线性性）

$$\int\limits_{AB}(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))dl=\alpha\int\limits_{AB}f(x,y)dl+\beta\int\limits_{AB}g(x,y)dl$$

2)（可加性）(Аддитивность)

$$\int\limits_{AB}f(x,y)dl=\int_{AC}f(x,y)dl+\int\limits_{CB}f(x,y)dl$$

4)（绝对值估计）

$$\left|\int\limits_{AB}f(x,y)dl\right|\leqslant\int\limits_{AB}|f(x,y)|dl$$

5)（中值定理）(Формула среднего значения) 若 $f(x,y)$ 沿曲线 AB 连续，则

$$\exists M\in AB:\int\limits_{AB}f(x,y)dl=\mu(L)f(M)$$

其中 $\mu(L)$ 为曲线 AB 的长度

定理 5.2 (曲线积分三角表示)

设 AB 为由参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 定义的分段光滑曲线，函数 $P=P(x,y), Q=Q(x,y)$ 沿曲线 AB 分段连续且 $\boldsymbol{\tau}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 为曲线 AB 在点 $M(x,y)$ 的单位切向量 (единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x,y)$)，并且方向 τ 对应从 A 到 B 的运动方向（α 为点 $M(x,y)$ 向量 $\boldsymbol{\tau}$ 处与 O_x 轴夹角），则有

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{AB}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)dl=\int\limits_{AB}(\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})dl$$

其中 $\mathbf{a}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$

♡

注 也可以陈述为：

$$\cos\alpha=(\bar\tau,\bar e_1)=-\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}},\cos\beta=(\bar\tau,\bar e_2)=\frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}};\bar\tau=(x',y')$$

高维情形也可类似陈述：

$$\int\limits_{AB}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_a^b Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)dt=\int\limits_L P\cos\alpha_1+Q\cos\alpha_2+R\cos\alpha_3 dl$$

$$\cos\alpha_k=(\tau,\bar e_k),\tau=\frac{r'}{|r'|},k=1,2,3$$

5.2 Green 公式

定义 5.4 (闭分段光滑曲线)

设曲线 $L_1 = AB$ 和 $L_2 = BC$，若：

1) $L = L_1 \cup L_2$;
2) L_1 和 L_2 分段光滑，且端点 A 与 C 重合;
3) L_1 和 L_2 没有公共点

则称曲线 L 为（无重复点的）闭分段光滑曲线 ♣

定义 5.5 (正遍历方向积分)

设闭分段光滑无重点曲线 L 为平面 O_{xy} 上的凸集 D 边界，设 $\bar{e}_3$ 是 Oz 轴的基向量，在曲线 L 的每点给定切向量 $\bar{\tau}$ 和外法向向量 $\bar{n}$。若向量 $\bar{e}_3$ 的方向与矢量积 $[\bar{n}, \bar{\tau}]$ 总相等，则称向量 $\bar{\tau}$ 给出了轮廓 L 的正遍历方向，记对于微分形式 $Pdx + Qdy$ 沿闭曲线 L 正遍历方向的积分 I 为

$$I = \oint_L Pdx + Qdy$$

♣

定理 5.3 (Green 公式/Формула Грина)

设区域 D 为紧的 Jordan 可测的凸区域，其边界 $L = \partial D$ 为闭非退化分段光滑曲线，函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上连续且偏导数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上连续，则有公式

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

其中曲线 L 沿正方向遍历 ♡

证明 由对称性仅证等式

$$\oint_L Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

设闭区间 $[a, b]$ 为区域 D 到 Ox 轴投影，过点 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$ 作直线 $x = a$ 和 $x = b$。由 D 凸性，其边界 $L = \partial D$ 被分成四部分：位于直线 $x = a$ 和 $x = b$ 上的线段 L_1 和 L_3（可仅为单元素集）及这两条直线所夹曲线 L_2 和 L_4。

在曲线 L_1 和 L_3 上，x 的值分别为常数，因此

$$\int_{L_1} Pdx = \int_{L_3} Pdx = 0$$

由 D 凸性，对于任何 $x_0 \in (a, b)$，直线 $x = x_0$ 与曲线 L_2 和 L_4 中的每条都恰只相交于一个点，分别记作 $(x_0, \varphi_1(x_0))$ 和 $(x_0, \varphi_2(x_0))$。则曲线 L_2 为函数 $y = \varphi_1(x)$ 的图像，曲线 L_4 为函数 $y = \varphi_2(x)$ 的图像。从曲线 L 的分段光滑性有函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的分段光滑性，由曲线积分的 Riemann 积分表示的定理 (5.1) 即有：

$$\int_{L_2} P(x, y)dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\, dx$$

$$\int_{L_4} P(x, y)dx = -\int_a^b P(x, \varphi_2(x))\, dx$$

由此得到

$$\int_{L_2 \cup L_4} P(x, y)dx = \int_a^b (P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)))\, dx = H$$

由于函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上连续，由 Newton-Leibniz 公式有

$$P\left(x,\varphi_1(x)\right)-P\left(x,\varphi_2(x)\right)=-\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy$$

因此

$$H=-\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

注 根据积分的可加性，Grenn 公式对于作为有限个凸区域的并集的区域也成立

推论 5.1 (Green 公式计算面积)

区域 D 的面积由 Green 公式通过曲线积分可表示为

$$\mu(D)=\oint\limits_L xdy=-\oint\limits_L ydx=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx$$

♡

证明 若在 Grenn 公式中取 $Q=x,P=0$，然后取 $Q=0,P=-y$，则有

$$\oint\limits_L xdy=\iint\limits_G 1dxdy,-\oint\limits_L ydx=\iint\limits_D 1dxdy$$

则有

$$\mu(D)=\oint\limits_L xdy=-\oint\limits_L ydx$$

其中 $\mu(D)$ 为区域 D 的面积

注 设 α,β 满足 $\alpha+\beta=1$，则有

$$\oint\alpha xdy-\beta ydx=\alpha\oint xdy+\beta\cdot(-\oint ydx)=(\alpha+\beta)\mu(D)=\mu(D)$$

即得到了更一般面积计算的公式，不过通常取 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$，即上述公式

命题 5.1 (平面区域在曲线坐标面积计算公式)

设 $\varphi:D_0\to D$ 为从平面区域 D_0 到平面区域 D 的可逆光滑[F]射，Jacobi 式 $J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 在区域 D_0 上定号且 $\varphi\left(\partial D_0\right)=\partial D$，且 $\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}$ 在 D_0 上连续，则有

$$\mu(D)=\iint\limits_{D_0}|I|dudv$$

♠

证明 计算区域 D 的测度

$$\mu(D)=\oint\limits_{\partial D}xdy$$

设给定曲线 ∂D_0 的参数表示 $u=u(t),v=v(t),a\leqslant t\leqslant b$，则曲线 ∂D 由参数方程 $x=x(u(t),v(t)),y=y(u(t),v(t))$ 定义，由曲线积分通过 Riemann 积分表达定理 (5.1) 得

$$\mu(D)=\oint\limits_{\partial D}xdy=\int_a^b x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt=\int_a^b x(t)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt$$

而最后的积分可以表示成沿曲线 ∂D_0 的积分，则有

$$\mu(D)=\varepsilon\oint\limits_{\partial D_0}x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

其中，若曲线 ∂D_0 与 ∂D 有相同遍历方向，则 $\varepsilon=1$；若 ∂D_0 与 ∂D 遍历方向相反，取 $\varepsilon=-1$。使用 Green

公式得

$$\mu(D)=\varepsilon\oint\limits_{\partial D_0}x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)=\varepsilon\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(x\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(x\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right)dudv$$
$$=\varepsilon\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{dy}{dv}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dy}{du}\right)dudv=\varepsilon\iint\limits_{D_0}Idudv$$

由 Jacobi 式不变号且 $\mu(D)\geqslant 0$，则 $\varepsilon I=|I|$，则有

$$\mu(D)=\iint\limits_{D_0}|I|dudv$$

这即是平面区域在曲线坐标中计算面积的公式

第 6 章 曲面积分

6.1 基本概念

定义 6.1 (同胚)

定义区域为每个点都是内点的集合，若映射 $f:G\to G^*$ 为区域 G 到三维 Euclid 空间的集合 G 的连续双射，则称映射 $f:G\to G^*$ 为区域 G 到集合 G^* 的同胚映射 (гомеоморфное отображение)（即映射 $f:G\to G^*$ 为双射，且 G 中任何一个收敛点列 $\{M_n\}$ 对应 G^* 一个收敛序列 $\{M^*\}$，并且 G^* 任何一个收敛序列 $\{M^*\}$ 对应 G 中一个收敛点列 $\{M_n\}$）。称 G^* 为 G 在同胚 f 下的像 (образ)

定义 6.2 (初等曲面与一般曲面)

若三维空间的点集 Φ 为开盘 G 到空间的同胚映射的像，则称点集 Φ 为初等曲面 (элевментарная поверхность)

称集合 Φ 与点 M 在空间中邻域的公共部分为集合 Φ 的点 M 的邻域。若空间中点集 Φ 连通且任意点都有一个邻域为初等曲面，则称点集 Φ 为简单曲面 (простая поверхность)。若 G 每个点都有一个邻域同胚映射到对应的像，则称简单曲面 G 的映射 f 为局部同胚映射 (локальногомеомеоморфная)。若空间中点集 Φ 为一个简单曲面在其局部同胚映射到空间下的像，则称点集 Φ 为一般曲面 (общая поверхность)

注 简单曲面是没有自相交和自重叠的曲面。一般曲面可以有自交 (самопересечение) 和自重叠 (самоналегание)

注 （光滑性与非退化性）

设在平面 (u,v) 上定义简单区域 G 与标量函数 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 或向量函数 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$。以下不特殊说明均假设满足光滑性与满秩性（非退化）：

1)（光滑性）函数 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 光滑，在区域 G 上函数 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 关于两个变量都有连续偏导数（满足这一要求的曲面被称为光滑的）

2)（满秩性/非退化性）矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}$$

的秩等于二。（否则，称平面上点为奇点）换言之，向量 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ 和 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ 线性无关

定理 6.1 (曲面存在充分条件)

若函数 $\mathbf{r}(u,v),(u,v)\in G$ 在点集 Φ 上的图满足光滑性与非退化性，则图为曲面

证明 取区域 G 任意点 $N_0\left(u_0,v_0\right)$，对应 Φ 上点 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$，其坐标为 $x_0=x\left(u_0,v_0\right),y_0=y\left(u_0,v_0\right),z_0=z\left(u_0,v_0\right)$，欲证存在从区域 G 上点 N_0 邻域到点集 Φ 上点 M_0 充分小邻域的同胚映射，仅需证存在从点 N_0 邻域到点集 Φ 上点 M_0 充分小邻域的连续映射，反之亦然。由在点 M_0 非退化，则假设矩阵二阶主子式不等于零，则有 $x_u\cdot y_v-y_u\cdot x_v\neq 0$。因为 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}$ 在点 (u_0,v_0) 不等于零，而函数 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 在 G 上有连续的部分积，则根据函数方程组的可解性定理（теорема о разрешимости системы функциональных уравнений）在平面 Oxy 存在点 (x_0,y_0) 的邻域 H，在这个邻域内有该方程组的唯一的连续可微解 $u=u(x,y),v=v(x,y)$。则点 (x_0,y_0) 邻域 H 为 G' 上点 (u_0,v_0) 某个邻域的同胚。

将关系 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 代入 $z=z(u,v)$ 并确保点集 Φ' 点 M_0 某个邻域为在 Φ 上连续可微函数 $z=z(u(x,y),v(x,y))=z(x,y)$ 的图，但这意味着函数 $z(x,y)$ 为从平面 Oxy 上点 (x_0,y_0) 的邻域 H 到点集 Φ

上点 M_0 的邻域 Φ' 的同胚映射。由于同胚的叠置是同胚，则点 (u_0,v_0) 的邻域 G' 同胚映射到点集 Φ 上点 M_0 邻域 Φ'，命题得证

注 在证明过程中确定了曲面每个点都有一个邻域，该邻域唯一地投影到一个坐标平面上，因此是一个连续可微函数的图

假定区域 G 为正方形，把它等分成正方形 P_{kl} 并以 P_{kl} 左下顶点 $(u_{kl},v_{kl}),k,l=1,\cdots,n$ 为介点作标准划分 V，记 P_{kl} 边长为 δ $(\delta^2=\frac{1}{n^2}\mu(G))$。令 $\Phi_{kl}=\bar{r}(P_{kl})$，并考虑曲面 Φ 在点 $\bar{r}_{kl}=\bar{r}(u_{kl},v_{kl})$ 处的切平面对应的 Φ_{kl}。

定义 6.3 (几何意义)

观察坐标为 (x,y,z) 的空间上规则曲面 (регулярная поверхность)Φ，记从空间坐标原点到曲面的点的向量为 $\mathbf{r}(M)$，称关于曲面变点的向量函数 $\mathbf{r}(M)$ 为曲面 Φ 的径函数 (радиус-вектор)，参数表示为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),(u,v)\in G,\quad \mathbf{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$$

于是在曲面 Φ 的点 $\bar{r}(u,v),(u,v)\in G$ 处定义着 Φ 的两个切向量 $\bar{r}_1$ 和 $\bar{r}_2$，它们分别对应于 Jacobi 矩阵 $J_{\bar{r}}(u,v)$ 的第一列和第二列，即

$$\bar{r}_1=\bar{r}'_u(u,v)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix},\bar{r}_2=\bar{r}'_v(u,v)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}$$

固定光滑无奇点曲面 Φ 的任意点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，其中 $x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0),z_0=z(u_0,v_0)$，点 M_0 对应区域 G 上点 $N_0(u_0,v_0)$。在 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),(u,v)\in G$ 中取 $v=v_0$，这时 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v_0)$ 为 Φ 上曲线方程，同理取 $u=u_0$，有 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0,v)$ 为 Φ 上曲线方程。则称线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v_0)$ 与 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0,v)$ 为曲面坐标线 (координатные линии)

注意到向量

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u,v_0),\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v)$$

与坐标线相切。由在点 (x_0,y_0) 非退化，则向量 $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$ 不共线，则二切向量定义了在 Φ 通过 M_0 的切平面，称切平面法向量为曲面 Φ 的法线 (нормаль к поверхности Φ) 或法线向量 (вектор нормали к поверхности Φ)

于是称向量

$$\mathbf{n}(M_0)=\frac{\left[\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\right]}{\left\|\left[\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\right]\right\|}=\bar{n}=\frac{[\bar{r}_1,\bar{r}_2]}{\|[\bar{r}_1,\bar{r}_2]\|}$$

为单位法向量，其在曲面任意点的某个邻域内连续。则在光滑无奇点曲面的任何点的邻域中，存在连续向量法向量场（局部连续）。可以计算向量 n 与轴 O_z 的夹角的余弦为

$$\cos\gamma=\frac{\dfrac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}(u_0,v_0)}{\left\|\left[\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\right]\right\|}$$

♣

定义 6.4 (曲面定向)

若给定曲面 Φ 另一个参数表示 $\bar{\rho}$，则等式 $\bar{n}(\bar{r})=\bar{n}(\bar{\rho})$ 以及 $\bar{n}(\bar{r})=-\bar{n}(\bar{\rho})$ 两者总有一个成立。则等于向量 $\bar{n}(\bar{r})$ 与 $\bar{n}(\bar{\rho})$ 的标量积的函数 $f(u,v)$ 仅取两个值 $+1$ 和 -1。但此函数为 G 上连续函数，因此它恒等

于 $+1$ 或恒等于 -1。这表明在改变参数表示时，所定义的法向量要么在 Φ 的每点都不变，要么在 D 的一切点同时改变成相反的方向。则称光滑无奇点曲面对应于某个参数表示的曲面的法向量标示了该曲面的一个侧面，具有被标示侧面的曲面叫作双侧曲面（двустворонная повернoсть）。曲面 D 借助于参数表示而标示其一个侧面叫作曲面 D 的定向（ориентация）

♣

注 也可定义为边界不相交的曲面上的运动，随着运动方向法向量不断改变，若法向量回到原来的方向，则称该曲面为双侧曲面。平面、球体、椭圆体、立方体为双侧曲面。单面的一个例子为莫比乌斯带 (лист Мёбиуса)

在双侧曲面定义方向单值对应曲面所有点的法向量方向。则可以定义边为选定的曲面的所有点的集合为曲面的根据法线方向的给定规则的边

定义 6.5 (有界曲面)

若曲面点的任意基本序列收敛到该曲面上一个点，则称该曲面为完备的 (полная)。若曲面可以包含在某个三维球中，则称曲面为有界曲面

♣

例题 6.1 （完备曲面示例）球面、平面、单片双曲面 (однополоствный гиперболоид) 没有边界的圆、球面上的开连通集都是非完备曲面

注 以下只考虑平滑，没有奇点的双侧曲面、完备、有界曲面或有界封闭的此类曲面的部分

注 构造曲面积分的主要思想（特别是得到计算表面积的公式）的主要思想是将曲面的一部分替换为它们在相应切平面上的投影（到处都会通过投影理解为正交投影）

定义 6.6 (曲面大小)

如果将曲面的一部分放置在直径小于 δ 的某个球体内，则称曲面该部分尺寸（размер）小于 δ

♣

引理 6.1 (有界光滑完备双侧无奇点有界曲面邻域切平面存在性)

设 M_0 为有界光滑完备双侧无奇点有界曲面 (ограниченная гладкая полная двусторонняя верхность без особых точек)Φ 的普通点，则点 M_0 的某个邻域均可单值投影到该邻域任意点的切平面上

♡

证明 选择点 M_0 邻域 $\widehat{\Phi}$，满足下列条件：

1)$\widehat{\Phi}$ 邻域内任意两点法线夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$

2) 邻域 $\widehat{\Phi}$ 被单值投影到其中一个坐标平面中的某个圆上，下设坐标平面为 O_{xy}

该选择的可能性来自于法线域 (поля нормалей) 与定理 (6.1)

邻域 $\widehat{\Phi}$ 唯一地投影到切平面，下反证之。设邻域 $\widehat{\Phi}$ 不具有给定性质，则它包含点 M 与两个点 P 和 Q 使得弦 (хорда) PQ 平行于法线 $\mathbf{n}(M)$ （点 M 在 $\widehat{\Phi}$ 处法线）

设 π 为一个平行于 O_z 轴并通过 PQ 的平面。考虑 π 与 $\widehat{\Phi}$ 的交线 (линия пересечения)。由于邻域 $\widehat{\Phi}$ 的选择，该线的 PNQ 部分位于 $\widehat{\Phi}$ 并且表示定义在一个线段上的可微函数的图，其中线段为 PQ 在平面 O_{xy} 的投影。由 Lagrange 定理，该部分在某点 N 的切线 (касательная) 平行于弦 PQ，因此平行于法线 $\mathbf{n}(M)$。但随后 $\mathbf{n}(M)\perp\mathbf{n}(N)$，这与邻域 $\widehat{\Phi}$ 的选择矛盾

引理 6.2 (有界光滑完备无奇点有界曲面投影切平面存在性)

设 Φ 为有界光滑完备无奇点曲面，则存在 $\delta>0$ 对曲面 Φ 任意满足尺寸小于 $\delta>0$ 部分曲面有引理 (6.1) 成立，即满足在任意点上单值地投影到切平面上

♡

证明 反证：设对任意 $\delta_n=\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$ 都存在曲面 Φ 的部分曲面 Φ_n，其尺寸小于 δ_n 且在其某些点处非单值投影到切平面上。在每个部分 Φ_n 中选取一个点 M_n 并考虑序列 $\{M_n\}$。因为 Φ 为有界完备曲面，则根据 Bolzano-Weierstrass 定理知：可从序列 $\{M_n\}$ 中可以选出一个收敛到点 $M_0\in\Phi$ 的子序列。考虑满足引理 (6.1) 的点 M_0 的邻域。该邻域将包含从某个号码开始的 Φ_n 的所有部分。但这时每个部分 Φ_n 都必须在其任意点处

唯一地投影到切平面上，这与 Φ_n 部分的选择矛盾

注 将引理陈述中的切平面替换为一个坐标平面即得以下推论 (6.1)

推论 6.1 (有界光滑完备无奇点有界曲面投影坐标平面存在性)

设 Φ 为有界光滑完备无奇点曲面，则存在 $\delta>0$ 使得对曲面 Φ 任意满足尺寸小于 δ 的的部分曲面单值投影到一个坐标平面

引理 6.3 (有界光滑完备无奇点有界曲面部分曲面点法线夹角余弦估计)

设 Φ 为一个有界光滑完备双侧无奇点曲面，则对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得对曲面 Φ 任意满足尺寸小于 δ 的的部分曲面，其上任意两点单位法线间夹角 γ 的余弦满足 $1-\cos\gamma<\varepsilon$

证明 考虑在 Φ 上连续的单位法线域 $\mathbf{n}(M)$。由于 Φ 的条件，则向量函数 $\mathbf{n}(M)$ 一致连续，则对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 满足对于任意两点 $M_1,M_2\in\Phi$，其距离小于 δ，且以下公式成立：

$$|\mathbf{n}(M_1)-\mathbf{n}(M_2)|<\sqrt{2\varepsilon}$$

$$\frac{|\mathbf{n}(M_1)-\mathbf{n}(M_2)|^2}{2}=\frac{\mathbf{n}^2(M_1)-\mathbf{n}^2(M_2)-2(\mathbf{n}(M_1),\mathbf{n}(M_2))}{2}=1-\cos\gamma<\varepsilon$$

6.2 曲面面积

定义 6.7

设曲面 Φ 为有界光滑完备双侧曲面，把 Φ 用分段光滑曲线分为有限数目部分曲面 Φ_i，其中每个部分曲面单值地投影到在其任意点切平面上（借助引理 (6.2)，定义正确）。记 Δ 为部分曲面 Φ_i 最大尺寸，记 σ_i 为部分曲面 Φ_i 在某个点 M_i 切平面的投影面积。

若当 $\Delta\to 0$ 时有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\left[\Delta<\delta\Rightarrow\left|\sum_i\sigma_i-\sigma\right|<\varepsilon\right]$$

则称数 σ 为积分和 $\sum_i\sigma_i$（与 Φ 的分段平滑曲线的划分与点 M_i 的选择无关），若极限 σ 存在，则称曲面可平方，称 σ 为曲面面积。

例题 6.2 （Schwartz 的靴子/сапог Шварца）用平行于底部的平面将圆柱带划分为 n 个相同的部分，并在每个相应的圆中刻出一个正 m 角形，将相邻的（垂直）多边形相对于彼此移动半圈。将相邻的顶点按段连接起来得到一个多面体，其表面积比这个多面体投影到圆柱底平面上的面积大 n 倍。对于任何固定的 m，多面体的表面积可以任意大[1]

注 该例表明，通常不可能用多面体来近似一个曲面

定理 6.2

有界光滑完备双侧无奇点曲面可平方

证明 设在曲面 Φ 上可以引入单参数参数化 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),(u,v)\in\Omega$，其中 Ω 为闭有界区域。下证积分和 $\sum_i\sigma_i$ 趋近于极限：

$$\sigma=\iint_\Omega\left|\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|dudv \tag{6.1}$$

[1]例子原文：Разобьем цилиндрический пояс плоскостями, параллельными основанию, на n одинаковых частей и впишем в каждую соответствующую окружность правильный m-угольник, сместив соседние (по вертикали) многоугольники на пол-оборота относительно друг друга. Соединив соседние вершины отрезками, получим многогранник, площадь поверхности которого в n раз больше площади проекции этого многогранника на плоскость основания цилиндра. При любом фиксированном m площадь поверхности многогранника можно сделать сколь угодно большой

其中向量函数 $\mathbf{r}$ 的偏导数记为 $\mathbf{r}_u$ 和 $\mathbf{r}_v$，因此该积分不依赖于系统空间坐标系的选择。

取 $\forall\varepsilon>0$，可以由引理 (6.2) 和引理 (6.3) 保证可取 $\delta>0$ 满足

1) 曲面 Φ 的任意尺寸小于 δ 的部分曲面 Φ_i 单值投影到在其任意点给定的切平面上

2) 部分曲面 Φ_i 的任意两点法线之间的夹角 γ 的余弦满足

$$1-\cos\gamma<\frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{6.2}$$

考虑对曲面 Φ 的任意分为有限数目分段光滑曲线的尺寸小于 δ 的部分曲面 Φ_i 的划分。由于在 Φ 上仅存在单参数化，则将区域 Ω 划分为部分区域 Ω_i。设 M_i 为 Φ_i 任意点，π_i 为点 M_i 切平面，D_i 为 Φ_i 在 π_i 上投影，σ_i 为 D_i 面积。由于 σ_i 不依赖于坐标系的选择，则选择坐标系使其原点与 M_i 重合，坐标轴 O_x 与 O_y 位于 π_i 中，而坐标轴 O_z 沿法线指向 M_i 中的曲面

由换元法有

$$\sigma_i=\iint_{D_i}dxdy=\iint_{\Omega_i}\left|\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}\right|dudv$$

在给定坐标系中，曲面由参数方程 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 给定，而向量 $[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]$ 有坐标 $\{A,B,C\}$，其中

$$A=\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix},B=\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix},C=\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}$$

注意对于部分曲面 Φ_i 的点，由于 δ 的选择与轴 O_z 的方向，显然有 $C=\dfrac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}$

下记 $\mathbf{r}_u$ 与 $\mathbf{r}_v$ 的向量积为

$$\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right]=\{\cos X,\cos Y,\cos Z\}\left|\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right]\right|$$

其中 X,Y,Z 为该向量分别与轴 O_x,O_y,O_z 的夹角

部分曲面 Φ_i 的点 M 的法线与轴 O_z 夹角的余弦为 $\cos Z=\dfrac{C}{|[r_u,r_v]|}$，由于该角为部分曲面 Φ_i 的点 M 与 M_I 的夹角，因此估计 (6.2) 对它成立

对于积分和

$$\sigma_i=\iint_{\Omega_i}\cos Z\,|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|\,dudv$$

成立估计

$$\left|\sigma_i-\iint_{\Omega_i}\cos Z\right|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]\,|dudv|<\frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{\Omega_i}\cos Z\,|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|\,dudv$$

则有估计

$$\left|\sum_i\sigma_i-\sigma\right|<\frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_i\iint_{\Omega_i}\cos Z\,|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|\,dudv=\varepsilon$$

已考虑了曲面 Φ 上引入单参数化的情况。在一般情况下，曲面 Φ 可以被划分成有限数量的部分曲面，由推论 (6.1) 在每个部分都可以引入单参数化，再将表面积确定为这些部分曲面的面积之和即可

注 该定理与公式 (6.1) 对分段光滑曲面也成立

注 利用上面的符号有 $|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{EG-F^2}$，其中 $E=\mathbf{r}_u^2,G=\mathbf{r}_v^2,F=\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v$。则有

$$\sigma=\iint_\Omega\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv=\iint_\Omega\sqrt{EG-F^2}dudv$$

注 从使用积分和积分的可加性表示表面积得，表面积具有可加性

命题 6.1 (面积元计算公式)

(1) 若曲面由 $z=z(x,y)$ 给出，则有

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) 若曲面由双参数方程 $x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$ 给出，则有

$$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

其中 $E=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2,\quad G=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2,\quad F=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'$
当 $x=u,y=v$ 时，$E=1+z_x'^2, G=1+z_y'^2, F=z_x'z_y'$ ，则退化为 $EG-F^2=1+z_x'^2+z_y^2$

命题 6.2 (球坐标面积元计算公式)

若曲面用球坐标表示为 $x=r(\varphi,\theta)\cos\varphi\sin\theta,\quad y=r(\varphi,\theta)\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r(\varphi,\theta)\cos\theta$，其中 $r(\varphi,\theta)$ 连续可微，则曲面的面积元为

$$\mathrm{d}S=r\sqrt{(r^2+r_\theta'^2)\sin^2\theta+r_\varphi'^2}\;\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

证明 按照前述双参数曲面的计算公式，先求出

$$\begin{aligned}
x_\theta' &= r_\theta'\sin\theta\cos\varphi+r\cos\theta\cos\varphi, & x_\varphi' &= r_\varphi'\sin\theta\cos\varphi-r\sin\theta\sin\varphi;\\
y_\theta' &= r_\theta'\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta\sin\varphi, & y_\varphi' &= r_\varphi'\sin\theta\sin\varphi+r\sin\theta\cos\varphi;\\
z_\theta' &= r_\theta'\cos\theta-r\sin\theta, & z_\varphi' &= r_\varphi'\cos\theta,
\end{aligned}$$

即得

$$E=r^2+r_\theta'^2,\quad G=r_\varphi'^2+r^2\sin^2\theta,\quad F=r_\theta'r_\varphi',$$

则有

$$EG-F^2=\left(r^2+r_\theta'^2\right)r^2\sin^2\theta+r^2r_\varphi'^2,$$

特别地当，曲面处于球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上时，则有 $\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

6.3 曲面积分的型

定义 6.8 (曲面积分的型)

设 Φ 为光滑有界完备双侧曲面，在 Φ 上给定函数 $f(M), M\in\Phi$，记 $\mathbf{n}(M)$ 为 Φ 上连续的单位法向量向量域。用分段光滑曲线把曲面 Φ 划分为有限数目部分曲面 Φ_i 且在每个部分曲面选取介点 M_i。设 Δ 为部分曲面 Φ_i 最大尺寸，σ_i 为部分曲面 Φ_i 面积，X_i,Y_i,Z_i 为向量 $\mathbf{n}(M_i)$ 由坐标轴表示的角度，则构造积分和

$$\begin{aligned}
I\{\Phi_i,M_i\}&=\sum_i f(M_i)\,\sigma_i,\\
I\{\Phi_i,M_i,Z_i\}&=\sum_i f(M_i)\,\sigma_i\cos Z_i,\\
I\{\Phi_i,M_i,Y_i\}&=\sum_i f(M_i)\,\sigma_i\cos Y_i,\\
I\{\Phi_i,M_i,X_i\}&=\sum_i f(M_i)\,\sigma_i\cos X_i,
\end{aligned}$$

若满足

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall T_\Phi):[(\Delta<\delta)\Rightarrow(|I\{\Phi_i,M_i\}-I|<\varepsilon)]$$

则称数 I 为积分和 $I\{\Phi_i,M_i\}$ 当 $\Delta\to0$ 时的极限，称积分和 $I\{\Phi_i,M_i\}$ 当 $\Delta\to0$ 的极限 I 为 $f(M)$ 沿曲面 Φ 的第一型曲面积分 (поверхностный интеграл первого рода от функции $f(M)$ по поверхности

Φ)，记为

$$I=\iint\limits_{\Phi} f(M)d\sigma \text{ 或} I=\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)d\sigma$$

类似地，称积分和 $I\{\Phi_i,M_i,Z_i\},I\{\Phi_i,M_i,Y_i\},I\{\Phi_i,M_i,X_i\}$ 当 $\Delta\to 0$ 时极限为 $f(M)$ 沿曲面 Φ 的第二型曲面积分 (поверхностный интеграл второго рода от функции $f(M)$ по поверхности Φ)，记为

$$\iint\limits_{\Phi} f(M)\cos Z d\sigma, \iint\limits_{\Phi} f(M)\cos Y d\sigma, \iint\limits_{\Phi} f(M)\cos X d\sigma$$

或

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\cos Z d\sigma, \iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\cos Y d\sigma, \iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\cos X d\sigma$$

♣

注 由定义，第一型曲面积分与曲面单位法向量的向量场方向的选择无关，或者说与曲面边的选择无关；相反，第二型曲面积分取决于曲面边的选择，选择曲面的边后，第二型曲面积分可以分别认为是

$$f(M)\cos Z(M), f(M)\cos Y(M), f(M)\cos X(M)$$

定理 6.3 (第一型曲面积分存在充分条件)

若曲面 Φ 允许光滑参数化 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\},(u,v)\in\Omega$ ，其中 Ω 为有界闭区域且函数 $f(M)$ 在曲面 Φ 上连续，则存在 $f(M)$ 沿曲面 Φ 第一型曲面积分且有公式

$$I=\iint\limits_{\Phi} f(M)d\sigma=\iint\limits_{\Omega} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

♡

证明 （仅概要）固定 $\varepsilon>0$。选取 $\delta^*>0$ 以满足下列条件：

1) 记 $N=(u,v)$，则有

$$(\forall N',N''\in\Omega):\left[(\rho(N',N'')>0)\Rightarrow\left|\sqrt{EG-F^2}\right|_{N'}^{N''}|<\frac{\varepsilon}{2\sigma^*\max|f(M)|}\right]$$

其中 σ^* 为区域 Ω 的面积

2) 通过分段光滑曲线将区域 Ω 划分为尺寸小于 δ^* 的有限数量的部分区域 Ω_i，并且选择点 $N_i\in\Omega_i$ 满足

$$\left|\sum_i\left(f\sqrt{EG-F^2}\right)\right|_{N_i}\sigma_i^*-\iint_{\Omega} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv\ |<\frac{\varepsilon}{2}$$

其中 σ_i^* 为部分区域 Ω_i 的面积

用 δ^* 定义 $\delta>0$，则都可以通过分段光滑曲线将曲面 Φ 划分为尺寸小于 δ 的部分曲面 Φ_i 来得到 Ω 划分为有限数量的尺寸小于 δ^* 的部分区域 Ω_i。再考虑通过分段光滑曲线把曲面 Φ 划分为有限数量的部分曲面 Φ_i，且其最大尺寸满足不等式 $\Delta<\delta$。积分和 $I\{\Phi_i,M_i\}$ 则保证不等式成立：

$$\left|I\{\Phi_i,M_i\}-\iint_{\Omega} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv\right|<\varepsilon$$

注 函数 $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 由连续函数叠加，因此也是连续的

注 第一型曲面积分和第二型曲面积分的概念可以自然扩展到分段光滑曲面的情况

注 一般第二型曲面积分可以记为

$$\iint_{\Phi}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma=\iint_{\Phi} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

而一般第二型曲面积分可以用一种独立于 Descartes 坐标系选择的形式来表示。用 $\mathbf{r}(M)$ 表示定义在曲面 Φ 上的连续向量函数，并用 $\mathbf{n}(M)$ 表示曲面 Φ 的单位法线向量场。则可以记为

$$\iint_{\Phi}\mathbf{r}(M)\mathbf{n}(M)d\sigma=\iint_{\Phi}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma=\iint_{\Phi} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

其中，左边的被积函数为标量积。

在物理学中，称该积分的值为向量 $\mathbf{r}(M)$ 通过曲面 Φ 的流量

6.4 Stokes 公式

定理 6.4 (Stokes 公式)

第一形式记为

$$\begin{aligned}&\oint_C P\ \mathrm{d}x+Q\ \mathrm{d}y+R\ \mathrm{d}z\\&=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\ \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\end{aligned}\tag{6.3}$$

其中 C 的取向与 S 的取侧相容，也就是满足右手法则。可用行列式记号记为

$$\oint_C P\ \mathrm{d}x+Q\ \mathrm{d}y+R\ \mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z & \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

第二形式可用行列式记号记为

$$\oint_C P\ \mathrm{d}x+Q\ \mathrm{d}y+R\ \mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S\tag{6.4}$$

其中曲线 C 取向与曲面 S 单位法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的取向相容，即满足右手法则 ♡

证明 从公式 (6.3) 直接看出. 若 P,Q 与变量 z 无关, $R\equiv 0$, 曲面 S 为坐标平面 O_{xy} 上的区域，取上侧，从而 $C=\partial S$ 为坐标平面 O_{xy} 上取正向的平面曲线，则得

$$\oint_C P\ \mathrm{d}x+Q\ \mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

这即是曲线积分 Green 公式 (5.3)

注 第一形式建立了第二型曲线积分与第二型曲面积分之间的联系，第二形式建立了第二型曲线积分与第一型曲面积分之间的联系

例题 6.3 （4367）计算曲线积分

$$\oint_C y\ \mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}y+x\ \mathrm{d}z$$

其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2,x+y+z=0$ 且从 O_x 轴正向看，C 的取向为逆时针方向

解 解一：（**Stokes** 公式）

记 S 为平面 $x+y+z=0$ 上为圆周 C 所包围的圆，则与题设中 C 的取向相容的 S 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$, ，于是由 Stokes 公式第二形式 (6.4) 有

$$\oint_C y\ \mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}y+x\ \mathrm{d}z=\frac{\sqrt{3}}{3}\iint_S\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\iint_S\ \mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2$$

其中利用了 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的圆，因此半径为 a，所包围的圆面积为 πa^2

解 解二：（参数化方法）

从 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$ 消去 x 得 $y^2+z^2+yz=\dfrac{a^2}{2}$，即

$$\left(z+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

令 $y=\dfrac{2a}{\sqrt{6}}\cos t, z+\dfrac{y}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t$，由此得 $x=x(t)$，下参数化为：

$$x=-a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right),\quad y=\frac{2a}{\sqrt{6}}\cos t,\quad z=a\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

可验证当 t 从 0 到 2π 时从 Ox 轴的正向看去，点 $(y(t),z(t))$ 在坐标面 yOz 上以逆时针方向描出一个椭圆。记所求积分为 I，则从对称性有

$$I=3\oint_C y\,\mathrm{d}x=\sqrt{6}a^2\int_0^{2\pi}\cos t\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathrm{d}t=-\sqrt{3}\pi a^2$$

解 解三：（直接投影法）

除对称性外，再将 C 向坐标面 xOy 投影得到封闭曲线 C'，则有

$$I=3\oint_C y\,\mathrm{d}x=3\oint_{C'}y\,\mathrm{d}x$$

可见上式右边等于曲线 C' 所围区域的面积的三倍乘以 -1。曲线 C' 显然是一个椭圆，方程可从 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 消去 z 得

$$x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2}$$

即可求出 C' 所围椭圆区域的面积为 $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$，则有 $I=-3\cdot\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}\pi a^2$

6.5 Gauss-Ostrogradsky 公式

定理 6.5 (Gauss-Ostrogradsky 公式)

（Gauss-Ostrogradsky[a]公式）设：

1) 集合 $V\subset\mathbb{R}^3$ 为凸集，Jordan 可测集，紧集
2) 集合 V 的边界为 S 非退化（无奇点）分段光滑曲面
3) 在集合 V 上给定光滑函数 $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$

则成立公式

$$\oiint_{S^+}P dy\wedge dz+Q dz\wedge dx+R dx\wedge dy=\iiint_V\left(P_x'+Q_y'+R_z'\right)dxdydz$$

等式左端积分是沿曲面 S 外侧 S^+ 的第二型曲面积分，右端积分为沿集合 V 的三重积分

[a] 奥斯特罗格拉茨基 (Ostrogradsky，Mikhail Vasilievich；1801 ~ 1862) 俄罗斯数学家，俄罗斯理论力学学派的创始人和彼得堡数学学派的奠基者之一。其科学研究涉及分析力学、理论力学、数学物理、概率论、数论和代数学等多方面。最重要的数学工作是在 1828 年研究热传导理论的过程中，证明了关于三重积分和曲面积分之间关系的公式。在力学方面，他对球形射弹的飞行进行了大量的理论研究和实验，提出了偏心射弹在空中运动的微分方程。他研究了天体力学和分析力学，独立表述了哈密顿变分原理并推广了可能位移原理。

证明 仅考虑 $P\equiv 0, Q\equiv 0$ 的情形。作曲面 S 到平面 O_{xy} 的投影，并记此投影为 D。由 V 凸，则任意平行于 O_z 轴的并与 D 相交的直线与 V 的交都为一条线段。设 $(x,y)\in D$，则过 (x,y) 与 O_z 平行的直线与 V 的交的下端为 $(x,y,\varphi_1(x,y))$，上端为 $(x,y,\varphi_2(x,y))$。还设 $\Lambda=\partial D$ 为 D 的边界，则曲面 S 划分为三个分段光滑的

部分曲面：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, z = \varphi_1(x,y)\} \\
S_2 &= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, z = \varphi_2(x,y)\} \\
S_3 &= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \Lambda, (x,y,z) \notin S_1 \cup S_2\}
\end{aligned}
$$

其中，对于曲面 S_1，积分沿其下侧，对于曲面 S_2 沿其上侧，对于曲面 S_3，即 S 的柱状部分，积分所沿的一侧的法方向垂直于 O_z 轴且为 D 外法向。根据化曲面积分为二重 Riemann 积分的定理及在 S_3 上 $\cos(\vec{n},\vec{e}_3)=0$ 有

$$
\iint_{S_3} Rdx \wedge dy = \iint_{S_3} R\cos(\bar{n},\bar{e}_3)\, dS = 0
$$

及

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} Rdx \wedge dy &= \iint_{S_1} R\cos(\bar{n},\vec{e}_3)\, dS = -\iint_D R(x,y,\varphi_1(x,y))\, dxdy \\
\iint_{S_2} Rdx \wedge dy &= \iint_{S_2} R\cos(\bar{n},\bar{e}_3)\, dS = \iint_D R(x,y,\varphi_2(x,y))\, dxdy
\end{aligned}
$$

由 Newton-Leibniz 公式，对于固定的 $(x,y) \in D$ 有

$$
R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y)) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\oiint_S Rdx \wedge dy = \iint_{S_2} Rdx \wedge dy + \iint_{S_1} Rdx \wedge dy \\
= &\iint_D dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz = \iiint \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz
\end{aligned}
$$

6.6 曲面积分的计算（研讨课）

定理 6.6 (第一型曲面积分)

设曲面 S 是分段光滑的双侧曲面 $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in \Omega$，函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 的每一点上有定义且连续，那么

$$
\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv, \text{ 其中}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= \left(x_u'(u,v)\right)^2 + \left(y_u'(u,v)\right)^2 + \left(z_u'(u,v)\right)^2 \\
G &= \left(x_v'(u,v)\right)^2 + \left(y_v'(u,v)\right)^2 + \left(z_v'(u,v)\right)^2 \\
F &= x_u'(u,v)\cdot x_v'(u,v) + y_u'(u,v)\cdot y_v'(u,v) + z_u'(u,v)\cdot z_v'(u,v)
\end{aligned}
$$

在特殊的情况下，若变量 z 是关于变量 x 和 y 的二元函数，$z(x,y)$ 在区域 σ 上连续可微，并且曲面 S 由方程 $z = z(x,y), (x,y) \in \sigma$ 给出，那么有

$$
\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_\sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(z_x'(x,y)\right)^2+\left(z_y'(x,y)\right)^2}dxdy
$$

♡

定理 6.7 (曲面面积)

如果曲面上区域 Ω 是容许集，则可以通过公式

$$
S(\Omega) = \iint_\Omega dS
$$

求面积

♡

定理 6.8 (第二型曲面积分)

假设 S 是光滑的双侧曲面，S^+ 为曲面的正向，即其法线 $\mathbf{h}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 所在的一侧

- 若函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 S 上有定义且连续，那么

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

若进行变量替换,将曲面转化到变量 u,v 的坐标系下,形如 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in\Omega$,那么法线的方向余弦可以通过公式

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\quad B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\quad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

计算。注意，在这种情况下 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{EG-F^2}$

- 若曲面由方程 $z=f(x,y),(x,y)\in\Omega$ 给出，即 x,y,z 三个变量相关，则选择曲面的上法线 $\mathbf{h}=\left\{-f_x'(x,y),-f_y'(x,y),1\right\}$，那么有

$$\begin{aligned}&\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+(f_x')^2+\left(f_y'\right)^2}}\\&\iint_S Rdxdy=\iint_S R\cos\gamma dS=\\&\quad=\iint_\Omega R(x,y,f(x,y))\frac{1}{\sqrt{1+(f_x')^2+\left(f_y'\right)^2}}\sqrt{1+(f_x')^2+\left(f_y'\right)^2}dxdy=\\&\qquad\qquad=\iint_\Omega R(x,y,f(x,y))dxdy\end{aligned}$$

若选择下法线 $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{1+(f_x')^2+\left(f_y'\right)^2}}$，则有

$$\iint_S Rdxdy=-\iint_\Omega R(x,y,f(x,y))dxdy.$$

第 7 章 参变积分

7.1 常义参变积分

定义 7.1 (依赖于参数 y 的常义参变积分)

设函数 f 在矩形区域 $\Pi = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 上给定。若 $\forall y \in [c;d]$ 存在沿 x 的积分 $\int_a^b f(x,y)dx$，即在 $[c;d]$ 上给定了函数

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

则称该积分为依赖于参数 y 的常义参变积分 (собственный интеграл,зависящим от параметра y)

定理 7.1

(常义参变积分连续性) 设 $I_1 = [a;b], I_2 = [c;d]$，若函数 f 在矩形区域 $\Pi = I_1 \times I_2$ 上连续，则参变积分在 $[c;d]$ 上连续

证明 显然有 $f \in \mathrm{C}(\Pi) \Rightarrow f \in \mathrm{C}[c;d]$，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in I_1)(\forall y_1, y_2 \in I_2)\left[|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right]$$

令 $(\forall y_1, y_2 \in I_2) : |y_1 - y_2| < \delta$，则有

$$|J(y_1) - J(y_2)| = \left|\int_a^b (f(x,y_1) - f(x,y_2))\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x,y_1) - f(x,y_2)|\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

即得 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上连续

注 实际上由 Cantor 定理，结论可强化为一致连续

例题 7.1 (3712/常义参变积分连续性) 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x$$

的连续性，其中 $f(x)$ 为闭区间 $[0;1]$ 上的正连续函数

解 利用常义参变积分连续性定理 (7.1) 即得 $F(y)$ 在 $y \neq 0$ 时连续，因此仅需讨论在点 $y = 0$ 处的情况，这时有 $F(0) = 0$，下面讨论 $y \to +0$ 时的情况

由 $f(x)$ 在 $[0;1]$ 上为正连续函数，因此存在最小值 $m > 0$，于是当 $y > 0$ 时有估计：

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x \geqslant m\int_0^1 \frac{y\, \mathrm{d}x}{x^2+y^2} = m \arctan \frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=1} = m \arctan \frac{1}{y}$$

令 $y \to +0$ 有 $\varliminf\limits_{y \to +0} F(y) \geqslant \dfrac{m\pi}{2} > 0$，由 $F(0) = 0$ 得 $F(y)$ 于点 $y = 0$ 处不连续

注 实际上，$f(x)$ 为正的条件是多余的。题设中 $f(x)$ 在 $[0;1]$ 上正连续的条件可以减弱为在 $[0;1]$ 上连续且存在极限 $f(+0)$。在此条件下可以通过估计 $|F(y) - F(y_0)|$ 来证明函数 $F(y)$ 于 $y \neq 0$ 时均连续，余下的主要问题仍为讨论 F 在点 $y = 0$ 处的性态

下面计算 $F(+0)$。任意取定 $\delta \in (0,1)$，将定义 $F(y)$ 的积分分拆如下：

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^\delta \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x + \int_\delta^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x$$

这时右边的第一个积分的极限可用积分第一中值定理计算如下：

$$\int_0^\delta \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x = f(\xi)\int_0^\delta \frac{y}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x = f(\xi) \arctan \frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=\delta} = f(\xi) \arctan \frac{\delta}{y} \xrightarrow[y \to +0]{} f(+0)\frac{\pi}{2}$$

而第二个积分的极限可利用函数 $f(x)$ 在 $[0;1]$ 上有界而计算如下:

$$\left|\int_\delta^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\cdot\frac{y}{\delta^2+y^2}\xrightarrow[y\to+0]{}0$$

综上即得 $F(+0)=f(+0)\dfrac{\pi}{2}$。由 $F(y)$ 为奇函数，因此又有 $F(-0)=-f(+0)\dfrac{\pi}{2}$，则 $F(y)$ 于该点有第一类不连续点

例题 7.2 (3713/连续化应用常义参变积分连续性) 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

解 将参数 n 的倒数 $\dfrac{1}{n}$ 连续化，仅需计算参变量 y 的积分

$$F(y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}(0<y\leqslant 1)$$

当 $y\to+0$ 时的极限。由被积函数当 $y\to+0$ 时的极限为 $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$，则被积函数在延拓至 $y=0$ 后即为在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数，则由定理 (7.1) 得积分 $F(y)$ 于 $y=0$ 处右侧连续，则有

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x\right)}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=\left.[\ln t-\ln(1+t)]\right|_1^{\mathrm{e}}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$$

注 由此可见，用级数计算定积分的问题，可以看成为以 n 为离散参数的含参变量积分的极限问题

例题 7.3 (3714/积分形式 Newton-Leibniz 公式) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A;B]$ 上连续. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a)(A<a<x<B)$$

解 由函数连续则存在原函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$，由 Newton-Leibniz 公式即得

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left.[F(t+h)-F(t)]\right|_a^x\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)-F(a+h)+F(a)]\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=f(x)-f(a)
\end{aligned}$$

注 若 f 连续可微，则应用极限与积分交换顺序的定理即有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^x\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,\mathrm{d}t=\int_a^x\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right]\mathrm{d}t=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

而本题表明只需 f 连续已可得到相同结论

定理 7.2 (常义参变积分可积性)

若 $f=f(x,y)$ 在矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，则参变积分 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上可积且有

$$\int_c^d J(y)dy:=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \tag{7.1}$$

♡

证明 由 $J(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续性得 $[c,d]$ 上可积性。则公式可以写为二重积分的形式

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\iint_\Pi f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

注 同理可得 $\forall y_0: c<y_0\leqslant d$ 都满足 $J(y)$ 沿 $[c,y_0]$ 可积且满足公式

$$\int_c^{y_0}J(y)dy=\int_c^{y_0}\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^{y_0}f(x,y)dy\right)dx$$

定理 7.3 (常义参变积分可微性/Leibniz 法则)

若函数 $f=f(x,y)$ 在矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，且 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_y(x,y)$ 在矩形区域 Π 上连续，则 $J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上可微且满足公式：

$$J'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx$$

证明 假设

$$K(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\int_a^b f_y(x,y)dx$$

则有

$$\frac{\partial f}{\partial y}\in \mathrm{C}(\Pi)\Rightarrow K(y)\in \mathrm{C}[c;d]$$

根据常义参变积分的可积性定理 (7.2)，该函数在 $[c,d]$ 上可积，由此沿任意子闭区间 $[c,y],c<y\leqslant d$ 也可积。固定 $y\in(c,d]$ 并利用公式 (7.1) 则有：

$$\int_c^y K(t)dt=\int_c^y\left(\int_a^b f_t(x,t)dx\right)dt=\int_a^b\left(\int_c^y f_t(x,t)dt\right)dx$$

这里后一个等式由正常参变积分的可积性定理 (7.2) 给出。又由 Newton-Leibniz 公式有：

$$\int_a^b\left(\int_c^y f_t(x,t)dt\right)dx=\int_a^b(f(x,y)-f(x,c))dx=J(y)-J(c)$$

对 y 求导得

$$\int_c^y K(t)dt=J(y)-J(c)$$

由可变上限的积分的可微性定理则有

$$K(y)=J'(y)$$

则定理得证

例题 7.4 (3726/Bessel 方程/常义参变积分 Leibniz 法则) 证明阶数 $n\in\mathbb{N}$ 的 Bessel 函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)=0$$

解 由 Leibniz 法则有

$$J_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad J_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

注意到 $J_n''(x)$ 与 $J_n(x)$ 的被积函数都有因子 $\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$，而 $J_n'(x)$ 的被积函数有因子 $\sin(n\varphi-x\sin\varphi)$，因此利用分部积分法计算 $x^2J_n''+\left(x^2-n^2\right)J_n$。显然有

$$-x^2\sin^2\varphi+\left(x^2-n^2\right)=x^2\cos^2\varphi-n^2=(x\cos\varphi+n)(x\cos\varphi-n)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(n\varphi-x\sin\varphi)=n-x\cos\varphi$$

则可计算得

$$x^2J_n''(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x\cos\varphi+n)\mathrm{d}[\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]$$

$$=-\frac{1}{\pi}[\sin(n\varphi-x\sin\varphi)(x\cos\varphi+n)]\Big|_0^\pi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)(-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=-xJ_n'(x)$$

移项即得所求证的微分方程

例题 7.5 (3737) 设 $a>0, b>0$，计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$$

解 方法一：定理 **(7.2)** 积分号下积分

将被积函数记为 $f(x)$，函数在 $x=0,1$ 处无定义，但有 $f(+0)=0$ 及用 L'Hospital 法则得 $f(1-0)=b-a$，因此可将 $f(x)$ 延拓为 $[0,1]$ 上的连续函数，则积分为常义参变积分。不妨设 $0<a<b$，则可将被积函数记为

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\ \mathrm{d}y$$

则由定理 (7.2)，积分号下积分如下

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\ \mathrm{d}x=\int_0^1\ \mathrm{d}x\int_a^b x^y\ \mathrm{d}y=\int_a^b\ \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\ \mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

由对称性，显然对 $0<a<b$ 之外的其他情况也成立

解 方法二：定理 **(7.3)** 积分号下求导

将 b 看为参变量，a 固定，积分记为 $I(b)$，则由 Leibniz 法则有

$$I'(b)=\int_0^1 x^b\ \mathrm{d}x=\frac{1}{b+1}$$

利用 $I(a)=0$ 即得

$$I(b)=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\ \mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{t+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

解 方法三：定理 **(7.6)Frullani** 积分

代换 $t=\ln x$ 即可化为后文的 Frullani 积分 (7.6)

命题 7.1

设 $I_1=[a;b], I_2=[c;d]$，若函数 f 在矩形区域 $\Pi=I_1\times I_2$ 上连续，则累次积分

$$H=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \quad 和 \quad G=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

皆存在且彼此相等

证明 考虑辅助函数

$$g(t,y)=\int_a^t f(x,y)dx,\quad t\in[a;b],\quad y\in[c;d]$$

欲证此函数在 Π 上连续。实际上，

$$\begin{aligned}|\Delta g|=&|g(t+\Delta t,y+\Delta y)-g(t,y)|=\left|\int_a^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx-\int_a^t f(x,y)dx\right|\\ \leqslant&\left|\int_a^t(f(x,y+\Delta y)-f(x,y))dx\right|+\left|\int_t^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx\right|\\ \leqslant&(b-a)\max_{x\in I_1}|\Delta_y f(x,y)|+c|\Delta t|\end{aligned}$$

其中 $c=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|$

由于函数 $f(x,y)$ 连续，当 $\Delta y\to 0$ 时 $\max\limits_{x\in I_1}\Delta_y f(x,y)\to 0$。因此当 $(\Delta y,\Delta t)\to(0,0)$ 时 $\Delta g\to 0$，则有 $g(x,t)$ 在 Π 上连续。另外有 $g_t(t,y)=f(x,y)$。则由定理 (7.3)，对于函数

$$G(t)=\int_c^d g(t,y)dy=\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dx$$

有

$$G'(t)=\int_c^d g_t(t,y)dy=\int_c^d f(t,y)dy=h(t)$$

另一方面，函数 $h(t)=\int_c^d f(t,y)dy$ 也连续，则由 Newton-Leibniz 公式有

$$h(t)=\frac{d}{dt}\int_a^t h(x)dx=H'(t)$$

其中

$$H(t)=\int_a^t h(x)dx=\int_a^t dx\int_c^d f(x,y)dy$$

因此 $h(t)=H'(t)=G'(t)$，此外显然有 $G(0)=H(0)=0$。则有 $\forall t\in I_1: G(t)=H(t)$

定义 7.2 (变限常义参变积分)

设在矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上给定函数 $f=f(x,y)$ 与二曲线 $x=\alpha(y),x=\beta(y)$，若 $(\forall y\in[c;d])(\exists J(y))$ 满足

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \tag{7.2}$$

则称该积分为变限常义参变积分。这时矩形区域变为区域 $D=[\alpha(y)\leqslant x\leqslant\beta(y)]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ ♣

定理 7.4 (变限常义参变积分连续性)

设矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$，若函数 $f\in\mathcal{C}(\Pi)$ 且有函数 $\alpha,\beta\in\mathcal{C}[c;d]$，则有

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\in\mathcal{C}[c;d]$$

♡

证明 固定任意 $y_0\in[c;d]$ 并观察函数

$$J_1(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx,\quad J_2(y)=\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx,\quad J_3(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx \tag{7.3}$$

则显然有

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx=J_1(y)+J_2(y)-J_3(y)$$

仅需证明

$$\exists\lim_{y\to y_0} J_1(y)=J_1(y_0)=J(y_0),\quad \exists\lim_{y\to y_0} J_2(y)=0=\lim_{y\to y_0} J_3(y)$$

由积分 $J_1(y)$ 有常数积分限，则第一个等式由定理 (7.1) 即得，下证后面的等式

将中值定理 (теорема о среднем значении) 应用于积分 $J_2(y)$ 得

$$J_2(y)=f(x^*,y)\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} dx=f(x^*,y)(\beta(y)-\beta(y_0))$$

其中 x^* 位于 $\beta(y)$ 与 $\beta(y_0)$ 之间

由 $\beta(y)$ 连续性有 $(\beta(y)-\beta(y_0))\underset{y\to y_0}{\longrightarrow}0$，又 $f(x^*,y)\underset{y\to y_0}{\longrightarrow}f(\beta(y_0),y_0)$，则定理得证

定理 7.5 (变限常义参变积分可微性/Euler 公式 (формула Эйлера))

设矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$，$f(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_y(x,y)\in\mathcal{C}(\Pi)$，而函数 $\alpha(y),\beta(y)$ 在 $[c;d]$ 上可微，则函数 $J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上可微，并且其导数满足 Euler 公式

$$J'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)dx+\beta'(y)f(\beta(y),y)-\alpha'(y)f(\alpha(y),y)$$

♡

证明 固定任意 $y_0\in[c;d]$，由定理 (7.4) 中式 (7.3) 的 J_1,J_2,J_3，记

$$J(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx-\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx$$

其中
$$J_1(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx,\quad J_2(y)=\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx,\quad J_3(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx$$
注意到 $J_1(y)$ 的积分限与 y 无关，因此（考虑到 f 与 f_y' 的连续性条件）则由可微性定理 (7.3) 得 $J_1'(y)$ 在 y_0 的导数值
$$J_1'(y_0)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y(x,y_0)\,dx$$
由导数定义，对于任意 $J_2'(y)$ 在 y_0 有
$$J_2'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{J_2(y)-J_2(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{J_2(y)}{y-y_0}$$
考虑 $J_2(y)$，由中值定理 (теорема о среднем) 得
$$J_2(y)=f(x^*,y)\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} dx=f(x^*,y)(\beta(y)-\beta(y_0))$$
其中 x^* 位于 $\beta(y)$ 与 $\beta(y_0)$ 之间

这时有
$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x^*,y)(\beta(y)-\beta(y_0))}{y-y_0}=f(\beta(y_0),y_0)\cdot\beta'(y_0)$$
同理可证
$$J_3'(y_0)=\alpha'(y_0)f(\alpha(y_0),y_0)$$
由 y 的任意性即得 Euler 公式

例题 7.6 （3719/Euler 公式）设
$$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|\mathrm{d}y$$
其中 $a<b$，$f(x)$ 为可微函数，求 $F''(x)$

解 当 $x\leqslant a$ 时有
$$F(x)=\int_a^b f(y)(y-x)\mathrm{d}y$$
则由 Leibniz 法则有
$$F'(x)=-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$
同理当 $x\geqslant b$ 时有
$$F(x)=\int_a^b f(y)(x-y)\mathrm{d}y$$
则由 Leibniz 法则有
$$F'(x)=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y-\int_a^x f(y)y\,\mathrm{d}y+\int_x^b f(y)y\,\mathrm{d}y-x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y$$
当 $a<x<b$ 时有
$$F(x)=\int_a^x f(y)(x-y)\mathrm{d}y+\int_x^b f(y)(y-x)\mathrm{d}y$$
由 Euler 公式则有
$$F'(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y-\int_x^b f(y)\mathrm{d}y$$

综上有

$$F'(x)=\begin{cases}-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y, & x\leqslant a,\\ \int_a^x f(y)\mathrm{d}y-\int_x^b f(y)\mathrm{d}y, & a<x<b\\ \int_a^b f(y)\mathrm{d}y, & x\geqslant b.\end{cases}$$

在此基础上计算二阶导数：当 $x\leqslant a$ 时 $F''(x)=0$，当 $a<x<b$ 时 $F''(x)=2f(x)$，当 $x\geqslant b$ 时 $F''(x)=0$。

注 该题目表明，对于被积函数含绝对值的情况，需分类讨论

7.2 第一类反常参变积分

定义 7.3 (第一类反常参变积分)

设函数 f 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上给定且对 $\forall y\in[c,d]$ 存在关于 x 的第一类反常积分，则有

$$J(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

称其为依赖于参数 y 的第一类反常参变积分

定理 7.6 (Frullani 积分/Frullani 第一公式)

(3789/Frullani 积分[a]/Frullani 第一公式) 若 $f(x)$ 在 $[0;+\infty)$ 上连续且

$$(\forall A>0):\left(\exists\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right)$$

则成立下列公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}(a>0,b>0)$$

[a]意大利数学家 Giuliano Frullani 在 1821 年发表该积分

证明 取 $\delta>0$，则以下运算中的积分均存在

$$\begin{aligned}\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_\delta^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{a\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{b\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

其中 ξ 在 $a\delta$ 和 $b\delta$ 之间。令 $\delta\to+0$，由 $f(x)$ 于点 $x=0$ 处右连续，即得所求公式

定理 7.7 (Frullani 第二公式/Вторая формула Фруллани)

若 $f(x)\in\mathcal{C}[0,+\infty)$ 且 $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<+\infty$，则有

$$\int_0^\infty\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=(f(0)-f(+\infty))\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

证明 见附录9.1

定理 7.8 (Frullani 第三公式/Третья формула Фруллани)

若 $f(x) \in \mathcal{C}(0,+\infty)$ 且

$$\left[(\forall A>0)(\exists \int_0^A \frac{f(x)}{x}dx)\right] \wedge \left[\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) < +\infty\right]$$

则成立

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = f(+\infty)\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (\alpha>0,\beta>0)$$

♡

例题 7.7 (3776,3803,4175/Euler-Poisson 积分) 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

得到 Euler-Poisson 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{7.4}$$

解 极坐标代换得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\ \mathrm{d}r = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \pi$$

则该反常二重积分可变换为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)^2$$

则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

这即为 Euler-Poisson 积分

注 Euler-Poisson 积分也经常记为

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例题 7.8 (3807/Euler-Poisson 积分) 利用 Euler-Poisson 积分求积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x(a>0)$$

解 作代换 $x=\frac{a}{t}$ 则有

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}\cdot\frac{a}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

将最后一个积分中的指数函数改写为

$$\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} = \mathrm{e}^{-2a}\cdot\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}$$

然后对该积分作变量代换 $u=x-\frac{a}{x}$, $\mathrm{d}u=\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x$, 则利用 Euler-Poisson 积分 (7.4) 有

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

注 针对反常参变积分，需要引入更强的约束，由此使用一致收敛相关的概念

定义 7.4 (第一类反常参变积分一致收敛性)

设函数 f 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上给定，且存在依赖于参数 y 的第一类反常参变积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

若

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A(\varepsilon) > a)(\forall R \geqslant A(\varepsilon))(\forall y \in [c,d]) : \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

则称该依赖于参数 y 的第一类反常参变积分沿 $[c;d]$ 一致收敛 (равномерно сходящимся по параметру y на $[c;d]$)（或简称在 $[c;d]$ 上一致收敛），记为

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$$

♣

注 这里的 $y \in [c;d]$ 完全可以替换成 $y \in Y$

注 代替沿区间 $[a;+\infty)$ 的反常积分，当然可以考虑沿区间 $(-\infty;b]$ 或沿全实直线 $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ 的积分，全部这些情形都可归结为这里所考虑的情形。例如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{+\infty} f(x,y)dx + \int_0^{+\infty} f(-x,y)dx$$

且此积分的收敛理解为两被加项皆收敛的问题，类似的问题在函数级数讨论，下面不再讨论

定理 7.9 (第一类反常参变积分一致收敛 Cauchy 准则)

设函数 f 在 $\Pi_\infty = [a \leqslant x < +\infty) \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 上给定且存在依赖于 y 的第一类反常参变积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$，则该依赖于 y 的第一类反常参变积分沿 $[c;d]$ 一致收敛的充要条件为满足 Cauchy 条件：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A(\varepsilon) > a)(\forall R', R'' \geqslant A(\varepsilon))(\forall y \in [c;d]) : \left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \tag{7.5}$$

♡

证明 必要性：设依赖于 y 的第一类反常参变积分沿 $[c;d]$ 一致收敛，则由定义有

$$(\exists A(\varepsilon) > a)(\forall R \geqslant A(\varepsilon))(\forall y \in [c,d]) : \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

特别地，若 R', R'' 为大于 $A(\varepsilon)$ 的任意数，可有

$$\left| \int_{R'}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left| \int_{R''}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

进而由积分的可加性 (свойство аддитивности) 有

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)dx \right| = \left| \int_{R'}^{+\infty} f(x,y)dx - \int_{R''}^{+\infty} f(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{R'}^{+\infty} f(x,y)dx \right| + \left| \int_{R''}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

充分性：设满足 Cauchy 条件，根据一般收敛的 Cauchy 准则则有积分对 $\forall y \in [c;d]$ 收敛。固定任意 $R' = R \geqslant A(\varepsilon)$ 与 $\forall y \in [c;d]$。考虑在 (7.5) 中 R'' 趋近于 $+\infty$ 。则由关于不等式极限过程的定理 (теорема о предельном переходе в неравенстве) 有

$$(\forall R \geqslant A(\varepsilon))(\forall y \in [c;d]) : \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

定理 7.10 (第一类反常参变积分一致收敛 Weierstrass 强函数判别法)

设函数 f 在 $\Pi_\infty = [a \leqslant x < +\infty) \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 上给定，且对 $\forall y \in [c;d]$ 关于 x 沿 $[a;R]$ 可积，其中 $\forall R \geqslant a$。设函数 $g(x)$ 同样在 $[a;R]$ 上可积，并且对应的反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛。另设在 Π_∞ 处处满足不等式 $0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant g(x)$，则依赖 y 的第一类反常参变积分沿 $[c;d]$ 一致收敛

♡

证明 固定 $\forall\varepsilon>0$，则由第一类反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛性有

$$(\exists A(\varepsilon)\geqslant a)(\forall R',R''\geqslant A(\varepsilon)):\left|\int_{R'}^{R''} g(x)dx\right|=\int_{R'}^{R''} g(x)dx<\varepsilon$$

则第一类反常参变积分由一致收敛的 Cauchy 准则即得关于 y 在 $[c;d]$ 上一致收敛

推论 7.1

设函数 $\varphi(x,y)$ 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上一致有界，对于 $\forall y\in[c,d]$ 有关于 x 在 $[a;R]$ 上可积，其中 $\forall R>a$。另设函数 $\psi(x)$ 满足 $\int_a^{+\infty}|\psi(x)|dx$ 收敛，则有第一类反常参变积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)dx$ 关于 y 在 $[c;d]$ 上一致收敛

证明 由 φ 在 Π_∞ 上一致有界，则有

$$(\exists M>0)(\forall(x,y)\in\Pi_\infty):|\varphi(x,y)|\leqslant M$$

即有 $|\varphi(x,y)\psi(x)|\leqslant M|\psi(x)|$

由第一类反常积分 $\int_a^{+\infty}|\psi(x)|dx$ 收敛则推出 $\int_a^{+\infty}M|\psi(x)|dx$ 收敛，则当 $f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x),g(x)=M|\psi(x)|$ 时，一致收敛 Weierstrass 判别法的条件满足

例题 7.9 (3788/Weierstrass 强函数判别法) 由等式

$$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$$

计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$$

解 方法一：**Weierstrass** 强函数判别法

设 $0<a<b$，将等式代入积分并交换积分顺序得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x \tag{7.6}$$

又上式 (7.6) 右边的内层积分在 $0<a<y<b$ 时为

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x=-\left.\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-xy}\right|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{y}$$

则得 (7.6) 的积分值为 $\ln\dfrac{b}{a}$

下证 (7.6) 中积分换序合理性。由定理 (7.16)，只需含参变量 y 的反常参变积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\ \mathrm{d}x$ 在 $y\in[a;b]$ 上一致收敛。由在 $y\in[a;b]$ 时有 $\mathrm{e}^{-xy}\leqslant\mathrm{e}^{-ax}$ 成立，则用 e^{-ax} 作为强函数即由一致收敛 Weierstrass 强函数判别法 (7.10) 得证

解 方法二：**Frullani** 积分

本题积分为 Frullani 积分 (7.6) 特例，直接计算即得

例题 7.10 (3753/Weierstrass 强函数判别法充分不必要性) 证明第一类反常参变积分

$$I=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\ \mathrm{d}x$$

在 $(0<y<1)$ 一致收敛，但不存在其积分为收敛且与参数无关的强函数

解 反证：若存在与参数无关的强函数 $\varphi(x)$，则由

$$0\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\leqslant\varphi(x)\quad(0<y<1,1\leqslant x<+\infty)$$

有仅需对每个 x 取参数 $y=\frac{1}{x}$ 即得 $\varphi(x)\geqslant 1$，显然恒大于等于 1 的函数在 $[1,+\infty)$ 上的积分发散，因此不存在其积分为收敛且与参数无关的强函数

下证积分在 $y \in (0,1)$ 上一致收敛。由被积函数处处大于 0，因此仅需

$$(\varepsilon > 0)(\exists M > 1)(\forall y \in (0;1)) : \int_M^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{7.7}$$

作平移代换 $x - \dfrac{1}{y} = t$ 则有

$$\int_M^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}t.$$

由此对于充分小的 $y \in (0;1)$，积分下限小于 0，这时有估计：

$$\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}t = y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right) \leqslant y\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = y\sqrt{\pi} \tag{7.8}$$

其中最后的等式利用了 Euler-Poisson 积分 (7.4)

因此当 $0 < y < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ 时，无论取什么 $M > 1$，不等式 (7.7) 总成立。当 $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \leqslant y < 1$，由 (7.8)，不妨先取 $M_0 > 1$，使得满足

$$\int_{M_0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u < \varepsilon$$

然后只要取 $M > M_0 + \dfrac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}$，就有 $M - \dfrac{1}{y} \geqslant M - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon} > M_0$。又利用 $y < 1$，则有

$$\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}t = y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u < \int_{M_0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u < \varepsilon.$$

综上，积分在 $0 < y < 1$ 上一致收敛

注 该题表明 Weierstrass 强函数判别法仍然只是第一类反常参变积分一致收敛的充分条件，而非必要条件

定理 7.11 (第一类反常参变积分 Dini 判别法/признак Дини)

设函数 $f = f(x,y)$ 在 $\Pi_\infty = [a \leqslant x < +\infty) \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 上连续且非负，第一类反常参变积分 $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 存在，且 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $\forall y \in [c;d]$ 时收敛，$J(y)$ 在 $[c;d]$ 上连续，则第一类反常参变积分 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上一致收敛

♡

证明 考虑函数序列 $J_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)dx$，由函数 f 在 Π_∞ 上连续，则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 在 $[a \leqslant x \leqslant a+n] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 上连续，则有 $(\forall n \in \mathbb{N}) : J_n(y) \in \mathcal{C}[c;d]$。又 $f(x,y) \geqslant 0$，则有 $J_n(y) \geqslant 0$ 与 $\{J_n(y)\} \nearrow$ 对任意 $y \in [c;d]$。注意对任意 $y \in [c,d]$ 满足

$$|J(y) - J_n(y)| = \left|\int_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon,$$

因为反常积分 $\int_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx$ 收敛。这时序列 $\{J_n(y)\}$ 收敛向 $J(y)$。由函数级数一致收敛的 Dini 判别法则有 $\{J_n(y)\} \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} J(y)$，由定义即有

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall y \in [c;d] \Rightarrow \int_{a+N(\varepsilon)}^{+\infty} f(x,y)dx \mid < \varepsilon$$

现在像 $A(\varepsilon) = a + N(\varepsilon)$，则有 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上一致收敛

定理 7.12 (第一类反常参变积分一致收敛 Dirichlet 判别法/признак Дирихле)

设函数 $f = f(x,y), g = g(x,y)$ 满足：

(1) 当 $x \to +\infty$ 时，$g \overset{[c;d]}{\rightrightarrows} 0$

(2) g 对 $\forall y \in [c,d]$ 关于 x 单调

(3) $(\forall R > a)(\forall y \in [c;d](\exists M > 0) : \left|\int_a^R f(x,y)dx\right| \leqslant M$

则有 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

♡

证明 设 $R', R'' > a$，由 Cauchy 条件对 $\int_{R'}^{R''} g(x,y)f(x,y)dx$ 由第二积分中值定理 (вторая теорема о среднем) 有

$$\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)g(x,y)dx\right| = \left|g(R'+0,y)\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx + g(R''-0,y)\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right|$$
$$\leqslant M\cdot(|g(R'+0,y)| + |g(R''-0,y)|)$$

由当 $x \to +\infty$ 时 $g \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} 0$，则

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon))(\forall y\in[c;d])(\forall R', R''>A(\varepsilon)) : (|g(R'+0,y)| < \frac{\varepsilon}{2M}) \wedge (|g(R''-0,y)| < \frac{\varepsilon}{2M})$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon))(\forall y\in[c;d])(\forall R''>R'>A(\varepsilon)) : \left|\int_{R'}^{R''} g(x,y)f(x,y)dx\right| < M\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$$

满足一致收敛的 Cauchy 准则

定理 7.13 (第一类反常参变积分一致收敛 Abel 判别法/признак Абеля)

设函数 $f = f(x,y), g = g(x,y)$ 满足：

(1) 当 $x \to +\infty$ 时，关于 y 有 $\int_a^\infty f(x,y)dx \overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

(2) 函数 g 关于 x 单调有界

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

证明 设 $\sup_{x,y}|g(x,y)| = M \neq 0$ （否则 $M=0$ 命题平凡），由积分 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 一致收敛的 Cauchy 条件有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon))(\forall y\in[c;d])(\forall R'<\xi<R'') : (\left|\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}) \wedge (\left|\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M})$$

然后利用第二中值定理有

$$\int_{R'}^{R''} f(x,y)g(x,y)dx \,|= \left|g(R'+0,y)\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx + g(R''-0,y)\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right|$$
$$\leqslant |g(R'+0,y)|\cdot\left|\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx\right| + |g(R''-0,y)|\cdot\left|\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

则满足 Cauchy 准则

推论 7.2 (第一类反常参变积分一致收敛 Abel-Dirichlet 判别法)

设函数 $f(x,y)$ 定义在集合 $\Pi_\infty = X\times Y$ 上，其中 $X = [a;+\infty), Y = [c;d]$ 且 $f(x,y) = \alpha(x,y)\beta(x,y)$，设 $\beta(x,y)$ 对于任意固定的 $y\in Y$ 关于 x 单调。若满足下列任意一组条件：

(A) Abel 判别法：

1) 积分 $\int_a^\infty \alpha(x,y)\mathrm{d}x$ 在 Y 上一致收敛

2) 函数 $\beta(x,y)$ 在 Π_∞ 上一致有界

(D) Dirichlet 判别法：

1) 积分 $\int_a^t \alpha(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $\{(t,y)|[a;t]\times Y\}$ 上一致有界，其中 $t \geqslant a$

2) 当 $x\to\infty$ 时，函数 $\beta(x,y)$ 在 Y 上一致收敛到 0

则第一类反常参变积分 $J(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛

注 条件的 Y 可以变为 $[c;+\infty]$，判别法依然成立

例题 7.11 （3760/第一类反常参变积分一致收敛 Abel-Dirichlet 判别法）研究积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

在区间 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上的一致收敛性

解 方法一：(**Abel** 判别法)

由 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，而 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 对于 x 单调，又从 $0\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha x}\leqslant 1$ 知它关于 $x\in[0,+\infty)$ 和 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致有界，则由一致收敛 Abel 判别法即得就可推出积分关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛

解 方法二：(**Dirichlet** 判别法)

由对任意的 $0\leqslant b<b'$ 有

$$\left|\int_b^{b'}\sin x\ \mathrm{d}x\right|=|\cos bx-\cos b'x|\leqslant 2$$

而 $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}$ 关于 x 单调，又从 $0<\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}<\dfrac{1}{x}$ 有，当 $x\to+\infty$ 时，它关于参变量 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛于 0，因此由一致收敛 Dirichlet 判别法有积分关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛

定理 7.14 (第一类反常参变积分连续性)

设函数 $f=f(x,y)$ 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，而第一类反常参变积分 $J(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，则有 $J(y)\in\mathcal{C}[c;d]$ ♡

证明 观察函数序列 $J_n(y)=\int_a^{a+n}f(x,y)dx$，根据常义参变积分的连续性定理 (7.1) 则有 $(\forall n\in\mathbb{N}):J_n\in\mathcal{C}[c;d]$。下证 $J_n(y)\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}J(y)$

由条件 $J(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，即

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)>a)(\forall y\in[c;d])(\forall R):\left[R\geqslant A(\varepsilon)\Rightarrow\left|\int_R^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\varepsilon\right]$$

另外显然有

$$|J(y)-J_n(y)|=\left|\int_{a+n}^{+\infty}f(x,y)dx\right|$$

则由 $\forall n\geqslant N(\varepsilon)=[A(\varepsilon)-a]+1$ 与 $\forall y\in[c;d]:|J(y)-J_n(y)|<\varepsilon$ 得 $J_n(y)\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}J(y)$。由关于一致收敛函数序列和的连续性定理，命题即证

例题 7.12 (3755/Dirichlet 积分一致收敛性) 证明 Dirichlet 积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

满足命题 (a) 在不含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a;b]$ 上一致收敛; (b) 在每一个包含数值 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a;b]$ 上非一致收敛

解 (a) 由对于 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 有

$$\left|\int_M^{M'}\sin\alpha x\ \mathrm{d}x\right|=\frac{|\cos\alpha M-\cos\alpha M'|}{\alpha}\leqslant\frac{2}{a}$$

另一方面有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，且与参变量 α 无关，则由一致收敛 Dirichlet 判别法即证

(b) 将积分记为 $I(\alpha)$，则有 $I(0)=0$。对于 $\alpha>0$，作变量代换 $\alpha x=t$ 即得

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

则对于 $b>0$，函数 $I(\alpha)$ 在 $[0;b]$ 左端点不连续，则由第一类反常参变积分连续性定理 (7.14) 得，积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0;b]$ 上不一致收敛，同时推出积分在 $(0;b]$ 上不一致收敛

注 经常错误地对于 $\alpha>0$ 作上述代换 $\alpha x=t$ 之后，从等式

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

的右边积分与参变量 α 无关，就认为左边的积分对所有的 $\alpha>0$ 一致收敛。该题表明反常参变积分在作了与参变量有关的变量代换之后，一致收敛性可能发生变化

定理 7.15 (第一类反常参变积分可微性/Leibniz 法则)

设函数 $f=f(x,y)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，若积分 $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，而第一类反常积分 $J(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在 $y\in[c;d]$ 上某个点收敛，则 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 存在导数且满足公式

$$J'(y)=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

♡

证明

对于序列 $J_n(y)=\int_a^{a+n}f(x,y)dx$ 的每一项都满足常义参变积分的可微性定理 (7.3)，则由 Leibiniz 法则有 $J'_n(y)=\int_a^{a+n}f'_y(x,y)dx$。由条件 $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ 根据一致收敛 Cauchy 准则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)\geqslant a)(\forall R_2>R_1>A)(\forall y\in[c;d]):\left|\int_{R_1}^{R_2}f'_y(x,y)\right|<\varepsilon$$

注意

$$\left|J'_{n+p}(y)-J'_n(y)\right|=\left|\int_{a+n}^{a+n+p}f'_y(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

若取 $R_1=a+n,R_2=a+n+p$，则根据一致收敛 Cauchy 准则有 $\{J'_n(y)\}\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

注意到 $J(y)$ 在导数点的收敛性推出 $\{J_n(y)\}$ 在导数点的逐点收敛性 (поточечная сходимость)，由此 $|J(y)-J_n(y)|=\left|\int_{a+n}^{+\infty}f(x,y)dx\right|$ 满足函数序列逐点微分定理 (теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности) 的条件，则有

$$J'(y)=\left(\lim_{n\to\infty}J_n(y)\right)'=\lim_{n\to\infty}J'_n(y)=\lim_{n\to\infty}\int_a^{a+n}f'_y(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

例题 7.13 (3786/Dirichlet 积分) 证明 Dirichlet 积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

当 $\alpha\neq0$ 时有导数，但不能利用 Leibniz 法则计算

解 作代换 $\alpha x=y$，利用 $I(1)=\dfrac{\pi}{2}$，并考虑 $I(\alpha)$ 为奇函数，即得

$$I(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \alpha<0\end{cases}$$

亦即 $I(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$，由此当 $\alpha\neq0$ 时有 $I'(\alpha)=0$

若利用 Leibniz 法则，则所得的积分

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\mathrm{d}x$$

对任意 α 均发散

注 类似地，函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 的和函数于 x 不等于 2π 的整数倍的所有点处可导，但不能通过逐项求导得到。该题表明一致收敛性仅是保证反常参变积分（或函数项级数的和函数）可导及 Leibniz 法则成立的充分条件，亦即是否在积分号下求导的关键在于观察 $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)\mathrm{d}x$ 的性质

定理 7.16 (第一类反常参变积分可积性/积分换序第一定理)

设 $f=f(x,y)$ 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，而第一类反常参变积分 $J(y)=$

$\int_a^{\infty} f(x,y)dx \overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，则 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上 Riemann 可积，且可交换积分号，如公式 (7.9)

$$\int_c^d J(y)dy = \int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \tag{7.9}$$

证明 由第一类反常参变积分连续性定理 (7.14) 有 $J(y) \in \Re[c;d]$，则公式 (7.9) 仅需证

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A(\varepsilon) \geqslant a)(\forall R \geqslant A)(\forall y \in [c;d]) : \left|\int_c^d J(y)dy - \int_a^R dx\int_c^d f(x,y)dy\right| < \varepsilon$$

由常义参变积分可积性定理 (7.2) 有

$$\int_a^R dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^R f(x,y)dx$$

这时有

$$\left|\int_c^d J(y)dy - \int_c^d dy\int_a^R f(x,y)dx\right| = \left|\int_c^d dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|$$

另外可有

$$\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows\right) \Rightarrow \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

则

$$\left|\int_c^d J(y)dy - \int_a^R dx\int_c^d f(x,y)dy\right| < \varepsilon$$

定理得证

推论 7.3 (非负积分换序第一定理)

若函数 $f = f(x,y) \in \mathcal{C}(\Pi_\infty)$ 且在其上非负，第一类反常参变积分 $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c;d]$ 上每个点收敛，而 $J(y) \in \mathcal{C}[c;d]$，则满足公式 (7.9)

证明 由 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上一致收敛 Dini 判别法与定理 (7.16) 即证

命题 7.2 (积分换序第一定理)

若 $f(x,y)$ 在区域 $a \leqslant x < +\infty, c \leqslant y \leqslant d$ 内连续，积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y \in [c;d]$ 上一致收敛，则有

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

命题 7.3 (积分换序第二定理)

若 $f(x,y)$ 在区域 $a \leqslant x < +\infty, c \leqslant y < +\infty$ 内连续，且满足以下三个条件：

(1) 以 y 为参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y \in [c,+\infty)$ 内的任意有限区间上一致收敛

(2) 以 x 为参变量的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x \in [a,+\infty)$ 内的任意有限区间上一致收敛

(3) 在 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y$ 之中至少有一个收敛，则有

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

推论 7.4

若 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上非负连续，且以下两个含参变量积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$

分别在 $x \geqslant a$ 和 $y \geqslant c$ 时连续，则有

$$\int_c^{+\infty} \mathrm{d}y \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

定理 7.17 (第一类反常参变积分对参数可积性/积分换序第二定理)

设 $f = f(x,y)$ 在 $\{(x,y) \mid x \geqslant a, y \geqslant c\}$ 上非负且连续，设第一类反常参变积分 $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 对 $\forall y \geqslant c$ 都收敛，且其定义的函数连续。另设第一类反常参变积分 $K(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 对 $\forall x \geqslant a$ 都收敛，且其定义的函数连续。则若下列两个积分

$$\int_a^{+\infty} K(x)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy, \quad \int_c^{+\infty} J(y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

中的一个收敛，则有第二个积分收敛且两个积分相等

证明 不妨设 $\int_c^{+\infty} J(y)dy$ 收敛，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A(\varepsilon) \geqslant a)(\forall R \geqslant A(\varepsilon))(\forall y \geqslant c): \left| \int_c^{+\infty} J(y)dy - \int_a^R dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy \right| < \varepsilon$$

注意第二个积分满足前面积分换序第一定理 (7.16) 的条件，则有

$$\int_a^R dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^R f(x,y)dx$$

这时有

$$\begin{aligned} &\left| \int_c^{+\infty} J(y)dy - \int_c^{+\infty} dy \int_a^R f(x,y)dx \right| = \left| \int_c^{+\infty} dy \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| \\ &= \left| \int_c^{\tilde{R}} dy \int_R^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{\tilde{R}}^{+\infty} dy \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| \\ &\leqslant \left| \int_c^{\tilde{R}} dy \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| + \left| \int_{\tilde{R}}^{+\infty} dy \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| \end{aligned}$$

由 Dini 判别法有 $J(y) \overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，因此有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A(\varepsilon) \geqslant a)(\forall R \geqslant A(\varepsilon))(\forall y \in [c;\widetilde{R}]): \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(\tilde{R}-c)}$$

则有

$$\left| \int_c^{\widetilde{R}} dy \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由假设 $\int_c^{+\infty} J(y)dy \to$，则可有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \widetilde{R}(\varepsilon) \geqslant c): \left| \int_{\widetilde{R}}^{+\infty} dy \int_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

则有

$$\left| \int_c^{+\infty} J(y)dy - \int_a^R dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

由对称性，定理得证

7.3 第二类反常参变积分

定义 7.5 (第二类反常参变积分)

设函数 $f(x,y)$ 在 $= [a \leqslant x < b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 定义且有界，并对 $\forall y \in [c,d]$ 都有第二类反常积分 (несобственный интеграл второго рода) $\int_a^b f(x,y)dx$ 收敛，则

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x,y)dx$$

则称 $\int_a^b f(x,y)dx$ 为依赖于 y 的第二类反常参变积分 (несобственный интеграл второго рода, зависящего от параметра)

定义 7.6 (第二类反常参变积分一致收敛性)

设函数 $f(x,y)$ 在 $= [a \leqslant x < b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 定义且有界，并有依赖于 y 的第二类反常参变积分 $\int_a^b f(x,y)dx$，若满足

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall \alpha, 0 < \alpha < \delta(\varepsilon))(\forall y \in [c;d]) : \int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)dx \mid < \varepsilon$$

则称该依赖于 y 的第二类反常参变积分在 $[c;d]$ 上一致收敛，简称该第二类反常参变积分在 $[c;d]$ 上一致收敛

注 注意，第二类反常参变积分均可以通过代换变为第一类反常参变积分，因为前面的定理都对第二类反常参变积分成立

定理 7.18 (第二类反常参变积分性质)

设函数 $f(x,y)$ 在 $P = X \times Y$ 上连续，其中 $X = (a;b], Y = [c;d]$，且 a 为第二类反常参变积分 $g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ 奇点，则下列命题成立

1) 若积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛，则函数 $g(y)$ 在 Y 上连续，且有

$$\int_c^d g(y)dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

2) 若积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 收敛，偏导函数 $f_y(x,y)$ 在 P 上连续，而积分 $\int_a^b f_y'(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛，则 $g'(y)$ 存在且

$$g'(y) = \int_a^b f_y(x,y)dx$$

例题 7.14 (3727/动奇点情形) 设

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha - x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0 \leqslant x \leqslant a$ 上连续，证明：当 $0 < \alpha < a$ 时有

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\,\mathrm{d}x$$

解 作代换 $x = \alpha t$，得有固定奇点 $t = 1$ 的第二类反常参变积分

$$I(\alpha) = \sqrt{\alpha} \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$$

其中 $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ 绝对可积而 $\varphi(\alpha t)$ 连续可微，则由 Leibniz 法则有

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} + \sqrt{\alpha} \int_0^1 \frac{t\varphi'(\alpha t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$$

换回原来的变量 x 得

$$\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}} + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{x\varphi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}} \\
&= \frac{1}{2\alpha}[-2\sqrt{\alpha-x}\cdot\varphi(x)]\Big|_{x=0}^{x=\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \sqrt{\alpha-x}\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{x\varphi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}} \\
&= \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}(\alpha-x+x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

注 注意题设积分有奇点 $x=\alpha$，同时奇点的位置随着参变量 α 变化。这时不能直接使用 Euler 公式，需考虑换元

7.4 Euler 积分

定义 7.7 (Euler 定义的 Γ 函数)

称函数

$$\Gamma(s) = \frac{1}{se^{\gamma s}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}$$

为 Euler 的 Γ 函数，其中 $s\neq 0,-1,-2,\cdots$ 为任意实数（可以把定义扩充到复数），γ 为欧拉常数，即

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0.577\cdots$$

由估计

$$|\ln b_n| = \left|\ln\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}\right)\right| = \left|\frac{s}{n}-\ln\left(1+\frac{s}{n}\right)\right| < \frac{s^2}{n^2}$$

则定义 Γ 函数的无穷乘积对于任何 $s\neq 0,-1,-2,\cdots$ 绝对收敛

♣

命题 7.4 (Euler 公式)

下列公式成立：

$$\Gamma(s) = s^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

♠

证明 由定义 Γ 函数的无穷乘积在自己的定义域的任意点处都绝对收敛，则有

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= s^{-1}\lim_{m\to\infty}e^{-s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right)}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}} \\
&= s^{-1}\lim_{m\to\infty}m^s\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} = s^{-1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} \\
&= s^{-1}\lim_{m\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-s} \\
&= s^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

定理 7.19 (Euler-Gauss 公式)

对于 $s\neq 0,-1,-2,\cdots$ 成立等式

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty}P_m(s)$$

其中

$$P_m(s)=\frac{(m-1)!m^s}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}$$

证明 由 Euler 公式 (7.4) 得 $\Gamma(s)$ 的表达式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}(1+1)^s\cdots\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^s\left(1+\frac{s}{1}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{s}{m-1}\right)^{-1}\\&=\lim_{m\to\infty}P_m(s)\end{aligned}$$

定理 7.20 (Gauss 公式)

对于 $s>0$，Euler-Gauss 公式 (7.19) 中

$$P_{m+1}(s)=\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt$$

证明 由换元法与分部积分法有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt=&(m+1)^s\int_0^1(1-x)^m x^{s-1}dx\\=&(m+1)^s\frac{m}{s}\int_0^1(1-x)^{m-1}x^s dx\\=&(m+1)^s\frac{m!}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}\int_0^1 x^{s+m-1}dx\\=&(m+1)^s\frac{m!}{s(s+1)\cdots(s+m)}=P_{m+1}(s)\end{aligned}$$

定义 7.8 (Euler 积分)

称依赖于参数 p 和 q 的函数

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

为 Euler β 函数 (Бета-функцией Эйлера) 或第一类 Euler 积分 (интеграл Эйлера первого рода)

称依赖于参数 p 的函数

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

为 Euler Γ 函数 (Гамма-функцией Эйлера) 或第二类 Euler 积分 (интеграл Эйлера второго рода)

注 （第一类 Euler 积分三角形式与反常形式）在第一类 Euler 积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

中令 $x=\cos^2\varphi$，则有第一类 Euler 积分的三角形式：

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

若作代换 $x=\dfrac{1}{1+u}$，即 $u=\dfrac{1-x}{x}$，则可得第一类 Euler 积分的反常形式

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}\mathrm{d}u$$

注 （第一类 Euler 积分存在性）注意到当 $p\geqslant 1,q\geqslant 1$ 时第一类 Euler 积分 $B(p,q)$ 没有奇点且对应积分收敛。

若 $0<p<1,0<q<1$，则第一类 Euler 积分有

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{B_1(p,q)}+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{B_2(p,q)}$$

由对于某个 C_q 和 C_p 有在 B_1 中 $(1-x)^{q-1}\leqslant C_q$ 与在 B_2 中 $x^{p-1}\leqslant C_p$ ，则由比较判别法（与 $x^{-\alpha}$ 比较）有当 $p>0$ 时对于任意 q 有 $B_1(p,q)\to$ 。同理有当 $q>0$ 时对于任意 p 有 $B_2(p,q)\to$。

综上，第一类 Euler 积分 $B(p,q)$ 当 $p>0,q>0$ 时收敛

注 （第二类 Euler 积分存在性）对于第二类 Euler 积分有

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\underbrace{\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx}_{\Gamma_1(p)}+\underbrace{\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx}_{\Gamma_2(p)}$$

由当 $x>0$ 时 $\left|e^{-x}x^{p-1}\right|\leqslant x^{p-1}$ ，则根据比较判别法，当 $p>0$ 时积分 $\Gamma_1(p)$ 收敛。而由 $(\forall r\in\mathbb{R}):\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^r=0$ 则有积分 $\Gamma_2(p)$ 对于任意 p 均收敛。

综上，第二类 Euler 积分 $\Gamma(p)$ 当 $p>0$ 时收敛

命题 7.5 (第一类 Euler 积分连续性)

第一类 Euler 积分 $B(p,q)$ 当 $p>0,q>0$ 时连续

证明 固定任意 p_0,p_1,q_0,q_1 满足 $0<p_0<p_1<\infty$ 与 $0<q_0<q_1<\infty$ 。欲证 $B(p,q)\overset{\widetilde{R}}{\rightrightarrows}$，其中 $\widetilde{R}=[p_0\leqslant p\leqslant p_1]\times[q_0\leqslant q\leqslant q_1]$。为此注意 $(\forall t\in(0;1):t^{p-1}(1-t)^{q-1}\leqslant t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}$。但 $\int_0^1 t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}dt\to$，这时由 Weierstrass 判别法有 $B(p,q)\overset{\widetilde{R}}{\rightrightarrows}$。则由第一类反常参变积分连续性定理 (7.14) 有 $B(p,q)$ 在 $\widetilde{R}$ 上连续。由数 p_0,p_1,q_0,q_1 任意性即得 $B(p,q)$ 在整个定义域上连续

命题 7.6 (第二类 Euler 积分连续性)

第二类 Euler 积分 $\Gamma(p)$ 当 $p>0$ 时连续

证明 固定任意 $0<p_0<p_1<\infty$，类似记 $\widetilde{R}=[p_0\leqslant p\leqslant p_1]$。注意 $(\forall t\in[0;1]:e^{-t}t^{p-1}\leqslant e^{-t}t^{p_0-1}$，且 $(\forall t\in[1;\infty):e^{-t}t^{p-1}\leqslant e^{-t}t^{p_1-1}$，这时当 $t\in[0,\infty)$ 有 $e^{-t}t^{p-1}\leqslant e^{-t}\left(t^{p_0-1}+t^{p_1-1}\right)$。但已知 $\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(t^{p_0-1}+t^{p_1-1}\right)dt\to$，则由 Weierstrass 判别法有 $\Gamma(p)\overset{\widetilde{R}}{\rightrightarrows}$ A。类似地，Γ (p) 在其整个定义域上连续

性质 （第一类 Euler 积分对称性）$(\forall p,q>0):B(p,q)=B(q,p)$

证明 由定义即有

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\left\{\begin{array}{c}x=1-t\\ dx=-dt\end{array}\right\}=\int_0^1(1-x)^{p-1}x^{q-1}dx=B(q,p)$$

性质 （第一类 Euler 积分化简公式/формула приведения）对第一类 Euler 积分有公式

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q),\quad B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$$

证明 使用恒等式 $t^p=t^{p-1}-t^{p-1}(1-t)$ 则有

$$\begin{aligned}B(p,q+1)=&\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt=\overbrace{\frac{1}{p}t^p(1-t)^q\Big|_0^1}^{=0}+\frac{q}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt\\=&\frac{q}{p}\int_0^1\left(t^{p-1}-(1-t)t^{p-1}\right)(1-t)^{q-1}dt=\frac{q}{p}B(p,q)-\frac{q}{p}B(p,q+1)\end{aligned}$$

则有 $\frac{p+q}{p}B(p,q+1)=\frac{q}{p}B(p,q),B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$，类似证明第二个公式

注 化简公式将 $B(p,q)$ 在 $\forall p,q$ 时的计算化简为 $B(p,q)$ 在 $0<p\leqslant1,0<q\leqslant1$ 时的计算

推论 7.5

对第一类 Euler 积分成立

$$(\forall p>0)(\forall n\in\mathbb{N}):B(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}$$

证明 归纳：当 $n=1$ 时有

$$B(p,1)=\int_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1}{p},B(p,2)=\frac{1}{p+1}B(p,1)=\frac{1}{p(p+1)}$$

设 $B(p,n)=\dfrac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}$，则有

$$B(p,n+1)=\frac{n}{p+n}B(p,n)=\frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)}$$

注 若还有 $p\in\mathbb{N}$，则

$$B(p,n)=\frac{(n-1)!(p-1)!}{(p+n-1)!}$$

因为对于自然数 p 满足

$$\frac{1}{p(p+1)\dots(p+n-1)}=\frac{(p-1)!}{(p+n-1)!}$$

性质 （第二类 Euler 积分化简公式）对第二类 Euler 积分成立

$$(\forall p>0):\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

证明 由定义显然有

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^p dt=\underbrace{-\left.e^{-t}t^p\right|_0^{+\infty}}_{=0}+p\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{p-1}dt=p\cdot\Gamma(p)$$

注 连续应用公式，固定 $n\in\mathbb{N}$ 并取 $p>n-1$，则有

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)=p(p-1)\Gamma(p-1)=\dots=p(p-1)\dots(p-n+1)\Gamma(p-n+1)$$

当 $p=n$ 时则有 $\Gamma(n+1)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!\cdot\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=n!$

定理 7.21 (第二类 Euler 积分对参数可微性)

对任意 $0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<+\infty$ 与 $n\in\mathbb{N}$ 第二类 Euler 积分为对参数 n 次可微的，且满足公式：

$$\frac{d^n}{dp^n}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{p-1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{d^n}{dp^n}\left(e^{-t}t^{p-1}\right)dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{p-1}\ln^n t dt$$

证明 注意到

$$\left[\left|e^{-t}t^{p-1}(\ln t)^n\right|\leqslant e^{-t}|\ln t|^n\left(t^{p_0-1}+t^{p_1-1}\right)\right]\wedge\left[\int_0^{+\infty}e^{-t}|\ln t|^n\left(t^{p_0-1}+t^{p_1-1}\right)dt\to\right]$$

则由 Weierstrass 判别法有

$$\int_0^{+\infty}\frac{d^n}{dp^n}\left(e^{-t}t^{p-1}\right)dt\rightrightarrows$$

则满足关于逐项微分的定理的条件，定理得证

例题 7.15 （第二类 Euler 积分图像绘制）由第二类 Euler 积分二阶导数

$$\Gamma^{(2)}(p)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^2dx\geqslant 0$$

有第二类 Euler 积分在整个定义域上向下凸。注意到

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=\Gamma(1)=1$$

$$\lim_{p\to\infty}\Gamma(p)=\{\Gamma(p)>n!p>n+1\}=+\infty$$

$$\lim_{p\to 0+0}\Gamma(p)=\lim_{p\to 0+0}$$

$$\frac{\Gamma(p+1)}{p}=\{\Gamma(p+1)\underset{p\to 0+0}{\longrightarrow}\Gamma(1)=1\}=+\infty$$

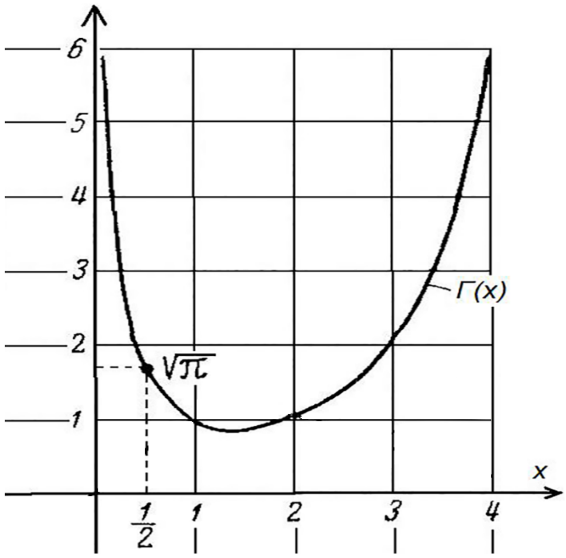

图 7.1: 第二类 Euler 积分图像

定理 7.22 (Dirichlet 公式/формула Дирихле)

对于任意 $p,q>0$ 满足等式:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

♡

证明 观察反常二重积分

$$I(D)=\iint_D e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 为坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 的第一部分

由 $I(D)$ 中被积函数为正，为证明积分收敛性，仅需选择一个单调趋于 D 的序列 $\{D_n\}$ 且数值级数 $\{I(D_n)\}$ 收敛 (由非负函数反常多重积分的收敛准则)

设

$$D_n=\left\{(x,y)\mid\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant n,\frac{1}{n}\leqslant y\leqslant n\right\}$$

则二重积分 $I(D_n)$ 等于

$$I(D_n)=\int_{\frac{1}{n}}^{n}e^{-x}x^{p-1}dx\cdot\int_{\frac{1}{n}}^{n}e^{-y}y^{q-1}dy$$

则当 $n\to\infty$ 时有 $I(D_n)\to\Gamma(p)\Gamma(q)$。现在选择另一个单调趋于 D 的 $\{D_n'\}$:

$$D_n'=\left\{(x,y)\mid\frac{1}{n}\leqslant x+y\leqslant n,\frac{1}{n}\leqslant\frac{x}{y}\leqslant n\right\}$$

改变二重积分 $I(D_n')$ 中变量

$$\{x=u(1-v),y=uv\}\Leftrightarrow\left\{u=x+y,v=\frac{y}{x+y}\right\}$$

由变换的 Jacobi 行列式 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 等于 u 且区域 D'_n 变换到

$$\frac{1}{v}=1+\frac{x}{y}\Longrightarrow 1+\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{v}\leqslant 1+n\Longrightarrow\frac{1}{1+n}\leqslant v\leqslant\frac{n}{n+1}$$

即

$$\Omega_n=\left\{(u,v)\mid\frac{1}{n}\leqslant u\leqslant n,\frac{1}{1+n}\leqslant v\leqslant\frac{n}{1+n}\right\}$$

则有

$$I\left(D'_n\right)=\iint_{\Omega_n}e^{-u}u^{p+q-1}(1-v)^{p-1}v^{q-1}dudv=\int_{1/n}^{n}e^{-u}u^{p+q-1}du\cdot\int_{1/(1+n)}^{n/(1+n)}(1-v)^{p-1}v^{q-1}dv$$

当 $n\to\infty$ 时，积分趋于 $\Gamma(p+q)B(p,q)$，则有 $I(D)=\Gamma(p)\Gamma(q)$ 且 $I(D)=\Gamma(p+q)B(p,q)$

引理 7.1 (Euler 引理)

对于任意实的非整数 s 成立公式

$$\sin\pi s=\pi s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)$$

定理 7.23 (Euler 余元公式)

对于任意实的非整数 s 成立公式

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

证明 从 Euler 公式 (7.4) 和 Euler 引理 (7.1) 得

$$\begin{aligned}\Gamma(1-s)\Gamma(s)=-s\Gamma(-s)\Gamma(s)&=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1}=\frac{\pi}{\pi s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)}=\frac{\pi}{\sin\pi s}\end{aligned}$$

例题 7.16 计算第二类 Euler 积分 $\Gamma(\dfrac{1}{2})$

解 方法一：直接法

由定义有

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^{+\infty}e^{-x}d(\sqrt{x})=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

解 方法二：**Euler** 余元公式

由 Euler 余元公式取 $s=\dfrac{1}{2}$ 即得 $\Gamma(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

定理 7.24 (Legendre 倍元公式)

成立等式

$$\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)$$

证明 构造乘积

$$F_m(s)=\frac{2^{2s-1}P_m(s)P_m\left(s+\frac{1}{2}\right)}{P_{2m}(2s)P_m\left(\frac{1}{2}\right)}$$

写出 $F_m(s)$ 的显式表示，有

$$F_m(s)=\frac{2^{2s-1}(m-1)!m^s(m-1)!m^{s+\frac{1}{2}}\cdot 2s\cdots(2s+2m-1)\cdot\frac{1}{2}\cdots\cdots\left(m-\frac{1}{2}\right)}{(2m-1)!(2m)^{2s}(m-1)!m^{\frac{1}{2}}s\cdots\cdots(s+m-1)\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(s+m-\frac{1}{2}\right)}=1$$

令 $m \to \infty$ 就过渡到等式

$$\frac{2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

例题 7.17 （3848）计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x \mathrm{d}x$$

解 记积分为 I，则根据第一类 Euler 积分的三角形式有

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$$

由 Dirichlet 公式有

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

由化简公式有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right]^2}{5!} = \frac{1}{96}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{3\pi}{512}$$

定理 7.25 (Stirling 公式/Stirling's approximation/формула Стирлинга)

设 $\lambda \in \mathbb{N}$，则 $\lambda!$ 满足下列近似估计 (асимптотическая оценка)

$$\lambda! = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\cdot\sqrt{2\pi\lambda}\,(1+\gamma_\lambda)$$

其中 $\gamma_\lambda = \dfrac{1}{12\lambda} + \dfrac{1}{228\lambda^2} - \dfrac{139}{51840\lambda^3} - \dfrac{571}{2448320\lambda^4} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{\lambda^5}\right)$

例题 7.18 （3853）求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m\,\mathrm{d}x}{(a+bx^n)^p} \quad (a>0, b>0, n>0)$$

及其存在域

解 设 $\dfrac{bx^n}{a+bx^n} = t$，则有

$$x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(1-t)^{\frac{1}{n}+1}}\mathrm{d}t$$

代入即得

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{b^p}\int_0^{+\infty}\left(\frac{bx^n}{a+bx^n}\right)^p x^{m-np}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b^p}\int_0^1 t^p\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-p}\frac{t^{\frac{m}{n}-p}}{(1-t)^{\frac{m}{n}-p}}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(1-t)^{\frac{1}{n}+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^p n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int_0^1 t^{\frac{m+1}{n}-1}(1-t)^{p-\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^p n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

存在域为 $\dfrac{m+1}{n} > 0$ 且 $p - \dfrac{m+1}{n} > 0$，即 $0 < \dfrac{m+1}{n} < p$

第 8 章 场论初步

8.1 基本概念

8.1.1 张量基础

定义 8.1 (双正交组与双正交基)

设 $\mathbf{r}_i, i=1,2,3$，$\mathbf{r}^k, k=1,2,3$ 为三维向量空间向量组，若满足

$$\mathbf{r}_i\mathbf{r}^k=\left(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}^k\right)=\delta_i^k=\begin{cases}1, i=k,\\0, i\neq k,\end{cases}\quad i,k=1,2,3.$$

则称 $\mathbf{r}^k, k=1,2,3$ 与 $\mathbf{r}_i$ 为双正交组（或称 взаимным для $\mathbf{r}_i$），若它们为基，则称 $\mathbf{r}^k, k=1,2,3$ 与 $\mathbf{r}_i$ 为双正交基 (биортогональные базисы)

♣

定理 8.1 (双正交基存在性)

对于任意基 $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3$ 存在由下列等式唯一定义的双正交基

$$\mathbf{r}^1=\frac{[\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]}{(\mathbf{r}_1,[\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3])}=\frac{[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]}{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3},\mathbf{r}^2=\frac{[\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_1]}{(\mathbf{r}_2,[\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_1])},\mathbf{r}^3=\frac{[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2]}{(\mathbf{r}_3,[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2])}\tag{8.1}$$

♡

证明 仅需证以下三个命题：1. $\mathbf{r}^1,\mathbf{r}^2,\mathbf{r}^3$ 为基（即线性无关）；2. 基 $\mathbf{r}^1,\mathbf{r}^2,\mathbf{r}^3$ 与 $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3$ 双正交；3. 不存在其他基与 $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3$ 双正交

下面证明之：

1) 设 $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ 及存在如 (8.1) 线性组合满足 $\alpha\mathbf{r}^1+\beta\mathbf{r}^2+\gamma\mathbf{r}^3=0$，则两边乘 $\mathbf{r}_1$ 得 $\alpha=0$，类似地有 $\beta=0,\gamma=0$

2) 显然成立

3) 反证：设存在向量组 $\widehat{\mathbf{r}}^1,\widehat{\mathbf{r}}^2,\widehat{\mathbf{r}}^3$ 为另一组双正交基，则

$$\left(\mathbf{r}_i,\widehat{\mathbf{r}}^k\right)=\delta_i^k=\begin{cases}1, & i=k,\\0, & i\neq k,\end{cases}\Leftrightarrow\left(\mathbf{r}_i,\widehat{\mathbf{r}}^k-\mathbf{r}^k\right)=0$$

定义 8.2 (协变坐标与逆变坐标)

取任意向量 x 并以不同方式沿基展开：

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{r}^1+x_2\mathbf{r}^2+x_3\mathbf{r}^3,\mathbf{x}=x^1\mathbf{r}_1+x^2\mathbf{r}_2+x^3\mathbf{r}_3$$

则称数 x_1,x_2,x_3 为协变坐标 (ковариантные координаты) 向量 $\mathbf{x}$，称数 x^1,x^2,x^3 为向量 $\mathbf{x}$ 的逆变坐标 (контравариантные координаты)

♣

注 对于记号 $\mathbf{x}=x_i\mathbf{r}^i,\mathbf{x}=x^i\mathbf{r}_i$，下面约定若在由因子组成的表达式中有两个相同的字母索引，一个在上，另一个在下，则视为对这些索引分别进行求和

定理 8.2 (Gibbs 公式/формула Гиббса)

设双正交基 $\left\{\mathbf{r}_i,\mathbf{r}^i\right\} i'=1,2,3$，则有公式

$$\mathbf{x}=\left(\mathbf{x}\mathbf{r}_i\right)\mathbf{r}^i,\mathbf{x}=\left(\mathbf{x}\mathbf{r}^i\right)\mathbf{r}_i$$

♡

证明 由 $(\mathbf{x},\mathbf{r}_k)=\mathbf{x}\mathbf{r}_k=x_k,\left(\mathbf{x},\mathbf{r}^k\right)=\mathbf{x}\mathbf{r}^k=x^k$ 即得

注 代入向量显然成立 $\mathbf{r}^k=\left(\mathbf{r}^k\mathbf{r}^i\right)\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_k=\left(\mathbf{r}_k\mathbf{r}_i\right)\mathbf{r}^i$，下记 $g_{ki}=\mathbf{r}_k\mathbf{r}_i,g^{ki}=\mathbf{r}^k\mathbf{r}^i$，则类似双正交基过渡矩阵的

形式有 $\mathbf{r}^k = g^{ki}\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k = g_{ki}\mathbf{r}^i$

命题 8.1 (双正交基内过渡矩阵必要条件)

设设双正交基 $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i\}\ i' = 1,2,3$，若 $\mathbf{r}^k = g^{ki}\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k = g_{ki}\mathbf{r}^i$ ，则有矩阵 (g_{ki}) 与 (g^{ki}) 互逆

证明 $\mathbf{r}^k = g^{ki}\mathbf{r}_i$ 两边同乘标量 $\mathbf{r}_j$ 则有 $\mathbf{r}^k\mathbf{r}_j = g^{ki}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = g^{ki}g_{ij} = \delta^k_j$

命题 8.2 (双正交基间过渡矩阵第一必要条件)

设两组双正交基 $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i\}, \left\{\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}\right\}, i, i' = 1,2,3$，另设 $(b^i_{i'})$ 为 $\{\mathbf{r}_i\}$ 到 $\{\mathbf{r}_{i'}\}$ 过渡矩阵 (即对 $i' = 1,2,3$ 有 $\mathbf{r}_{i'} = b^1_{i'}\mathbf{r}_1 + b^2_{i'}\mathbf{r}_2 + b^3_{i'}\mathbf{r}_3$)，$\left(b^{i'}_i\right)$ 为 $\{\mathbf{r}_{i'}\}$ 到 $\{\mathbf{r}_i\}$ 过渡矩阵，则有矩阵 $(b^i_{i'})$ 与 $\left(b^{i'}_i\right)$ 互逆

证明 简记 $\mathbf{r}_{i'} = b^i_{i'}\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i = b^{i'}_i\mathbf{r}_{i'}, i, i' = 1,2,3$，由变换互逆，则矩阵 $(b^i_{i'})$ 与 $\left(b^{i'}_i\right)$ 互逆

注 类似地，新基向量可以用旧基向量表示：$\mathbf{r}^{i'} = \widetilde{b}^{i'}_i\mathbf{r}^i, \mathbf{r}^i = \widetilde{b}^i_{i'}\mathbf{r}^{i'}, i, i' = 1,2,3$ ，类似有 $\left(\widetilde{b}^i_{i'}\right)$ 与 $\left(\widetilde{b}^{i'}_i\right)$ 互逆

命题 8.3 (双正交基间过渡矩阵第二必要条件)

设两组双正交基 $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i\}, \left\{\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}\right\}, i, i' = 1,2,3$，另设 $(b^i_{i'})$ 为 $\{\mathbf{r}_i\}$ 到 $\{\mathbf{r}_{i'}\}$ 过渡矩阵，$\left(\widetilde{b}^i_{i'}\right)$ 为 $\{\mathbf{r}^i\}$ 到 $\left\{\mathbf{r}^{i'}\right\}$ 过渡矩阵，则有矩阵 $\left(b^{i'}_i\right)$ 与 $\left(\widetilde{b}^{i'}_i\right)$ 全等

证明 $\mathbf{r}_{i'} = b^i_{i'}\mathbf{r}_i$ 两端乘 $\mathbf{r}^k$ 则有 $\mathbf{r}_{i'}\mathbf{r}^k = b^i_{i'}\left(\mathbf{r}_i\mathbf{r}^k\right) = b^i_{i'}\delta^k_i = b^k_{i'}$ ，$\mathbf{r}^i = \widetilde{b}^i_{i'}\mathbf{r}^{i'}$ 两端乘 $\mathbf{r}_{k'}$ 则有 $\mathbf{r}^i\mathbf{r}_{k'} = \widetilde{b}^i_{i'}\left(\mathbf{r}^{i'}\mathbf{r}_{k'}\right) = \widetilde{b}^i_{i'}\delta^{i'}_{k'} = \widetilde{b}^i_{k'}$ ，即有 $b^i_{i'} = \mathbf{r}_{i'}\mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i\mathbf{r}_{i'} = \widetilde{b}^i_{i'}$

注 该命题指出仅需知道矩阵 $\left(b^{i'}_i\right)$ 便可以使一组双正交基移动到另一组双正交基,下记 $\mathbf{r}_{i'} = b^i_{i'}\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i = b^{i'}_i\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'} = b^{i'}_i\mathbf{r}^i, \mathbf{r}^i = b^i_{i'}\mathbf{r}^{i'}$

命题 8.4 (双正交基坐标变换公式)

设两组双正交基 $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i\}, \left\{\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}\right\}, i, i' = 1,2,3$，另设 $(b^i_{i'})$ 为 $\{\mathbf{r}_i\}$ 到 $\{\mathbf{r}_{i'}\}$ 过渡矩阵 (即对 $i' = 1,2,3$ 有 $\mathbf{r}_{i'} = b^1_{i'}\mathbf{r}_1 + b^2_{i'}\mathbf{r}_2 + b^3_{i'}\mathbf{r}_3$)，$\left(b^{i'}_i\right)$ 为 $\{\mathbf{r}_{i'}\}$ 到 $\{\mathbf{r}_i\}$ 过渡矩阵，则有公式

$$x_{i'} = b^i_{i'}x_i \quad x^{i'} = b^{i'}_i x^i$$

证明 设 $x_{i'}$ 为向量 $\mathbf{x}$ 在双正交基 $\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}$ 上协变坐标。显然有展开公式 $x_{i'} = \mathbf{x}\mathbf{r}_{i'}$ ，代入 $\mathbf{r}_{i'}$ 则有 $x_{i'} = \mathbf{x}\left(b^i_{i'}\mathbf{r}_i\right) = b^i_{i'}\left(\mathbf{x}\mathbf{r}_i\right) = b^i_{i'}x_i$ ，即 $x_{i'} = b^i_{i'}x_i$ ，同理有公式 $x^{i'} = b^{i'}_i x^i$

注 公式指出从旧基过渡到新基时，向量协变坐标用从旧基到新基的过渡矩阵进行变换，而向量逆变坐标用从新基到旧基的过渡矩阵进行变换

8.1.2 不变量

定义 8.3 (不变量)

称不依赖于基的选择的表达式为不变量 (инвариант)

命题 8.5 (散度对称性)

设 A 为定义在 E^3 的线性算子，设两组双正交基 $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i\}, \left\{\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}\right\}$，则有

$$\mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i A\mathbf{r}^i$$

证明 由 $\mathbf{r}^i = g^{ik}\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i = g_{il}\mathbf{r}^l, g^{ik}g_{il} = \delta^k_l$ ，则有 $\mathbf{r}^i A\mathbf{r}_i = g^{ik}g_{il}\mathbf{r}_k A\mathbf{r}^l = \delta^k_l\mathbf{r}_k A\mathbf{r}^l = \mathbf{r}_k A\mathbf{r}^k = \mathbf{r}_i A\mathbf{r}^i$

定义 8.4

设两组双正交基 $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i\}, \left\{\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}\right\}$，另设 $(b^i_{i'})$ 为 $\{\mathbf{r}_i\}$ 到 $\{\mathbf{r}_{i'}\}$ 过渡矩阵（即对 $i' = 1,2,3$ 有，称线性算子 A 的不变量 $\mathbf{r}^i A \mathbf{r}_i$ 为线性算子 A 的散度（дивергенция），记为 $\operatorname{div} A$：

$$\operatorname{div} A = \mathbf{r}^i A \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i A \mathbf{r}^i$$

在基 $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i$ 上给定线性算子的矩阵，矩阵系数为向量 $A\mathbf{r}_i$ 沿基 $\mathbf{r}_k$ 的展开 a^k_i（或反之）：$A\mathbf{r}_i = a^k_i \mathbf{r}_k$，利用矩阵 (a^k_i) 可得散度另一个表达式

$$\operatorname{div} A = a^i_i = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3$$

命题 8.6 (旋度不变性)

设两组双正交基 $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i\}, \left\{\mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^{i'}\right\}$，另设 $(b^i_{i'})$ 为 $\{\mathbf{r}_i\}$ 到 $\{\mathbf{r}_{i'}\}$ 过渡矩阵，则有 $[\mathbf{r}_i A \mathbf{r}^i] = [\mathbf{r}^i A \mathbf{r}_i]$ 为不变量

证明 由 $\mathbf{r}_i = b^{i'}_i \mathbf{r}_{i'}, \mathbf{r}^i = b^i_{k'} \mathbf{r}^{k'}$，代入到左侧有

$$\left[\mathbf{r}_i A \mathbf{r}^i\right] = \left(b^{i'}_i b^i_{k'}\right)\left[\mathbf{r}_{i'} A \mathbf{r}^{k'}\right] = \delta^{i'}_{k'}\left[\mathbf{r}_{i'} A \mathbf{r}^{k'}\right] = \left[\mathbf{r}_{i'} A \mathbf{r}^{i'}\right]$$

定义 8.5 (旋度)

称线性算子 A 的不变量 $\left[\mathbf{r}_i A \mathbf{r}^i\right]$ 为旋度（ротор），记为 $\operatorname{rot} A$：

$$\operatorname{rot} A = \left[\mathbf{r}_i A \mathbf{r}^i\right] = \left[\mathbf{r}_1 A \mathbf{r}^1\right] + \left[\mathbf{r}_2 A \mathbf{r}^2\right] + \left[\mathbf{r}_3 A \mathbf{r}^3\right]$$

分别考虑正交基（ортонормированный базис(ОНБ)）)，i, j, k，在这种情况下基是自双正交基，算子 A 矩阵元素为：$a_{11} = \mathbf{i}A\mathbf{i}, a_{12} = \mathbf{i}A\mathbf{j}, a_{13} = \mathbf{i}A\mathbf{k}, a_{21} = \mathbf{j}A\mathbf{i}, \ldots$，在给定基上满足

$$\operatorname{div} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \mathbf{i}A\mathbf{i} + \mathbf{j}A\mathbf{j} + \mathbf{k}A\mathbf{k}$$

$$\operatorname{rot} A = [\mathbf{i}A\mathbf{i}] + [\mathbf{j}A\mathbf{j}] + [\mathbf{k}A\mathbf{k}]$$

$$[\mathbf{i}A\mathbf{i}] = a_{11}[\mathbf{i}\mathbf{i}] + a_{21}[\mathbf{i}\mathbf{j}] + a_{31}[\mathbf{i}\mathbf{k}] = -a_{31}\mathbf{j} + a_{21}\mathbf{k}$$

$$[\mathbf{j}A\mathbf{j}] = a_{32}\mathbf{i} - a_{12}\mathbf{k}, [\mathbf{k}A\mathbf{k}] = -a_{23}\mathbf{i} + a_{13}\mathbf{j}$$

则旋度也可以记为

$$\operatorname{rot} A = (a_{32} - a_{23})\,\mathbf{i} + (a_{13} - a_{31})\,\mathbf{j} + (a_{21} - a_{12})\,\mathbf{k}$$

第 9 章 证明补充及参考文献

9.1 Frullani 第二公式

定理 9.1 (Frullani 第二公式/Вторая формула Фруллани)

若 $f(x) \in C[0,+\infty)$ 且 $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < +\infty$，则有

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (\alpha>0,\beta>0)$$

证明

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0,\Delta\to\infty}\left(\int_\epsilon^A \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx + \int_A^\Delta \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx\right) \\
&=\left\{\rho(\epsilon,A)<\infty, \frac{f(x)}{x}\in C[\epsilon,A] \Rightarrow \int_\epsilon^A \frac{f(x)}{x}dx = F(A)-F(\epsilon)\right. \\
&\quad\left.\Rightarrow \int_\epsilon^A \frac{f(\alpha x)}{x}dx = F(\alpha A)-F(\alpha\epsilon)\right\} \\
&=\lim_{\epsilon\to 0,\Delta\to+\infty}\left(F(\alpha A)-F(\alpha\epsilon)-F(\beta A)+F(\beta\epsilon)+\int_A^\Delta \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx\right) \\
&=\left\{\rho(A,\Delta)<\infty, \frac{f(x)}{x}\in C[A,\Delta] \Rightarrow \int_A^\Delta \frac{f(x)}{x}dx = F(\Delta)-F(A) \Rightarrow \int_A^\Delta \frac{f(\alpha x)}{x}dx = F(\alpha\Delta)\right\} \\
&=\lim_{\epsilon\to+0,\Delta\to+\infty}(F(\alpha A)-F(\alpha\epsilon)-F(\beta A)+F(\beta\epsilon)+F(\alpha\Delta)-F(\alpha A)-F(\beta\Delta)+F(\beta A)) \\
&=\lim_{\epsilon\to+0}(F(\beta\epsilon)-F(\alpha\epsilon)) - \lim_{\Delta\to+\infty}(F(\beta\Delta)-F(\alpha\Delta)) \\
&=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_\alpha^\beta \frac{f(\epsilon x)}{x}dx\right) - \lim_{\Delta\to+\infty}\left(\int_\alpha^\beta \frac{f(\Delta x)}{x}dx\right) \\
&=\lim_{\epsilon\to+0}\left(f(\epsilon\eta)\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx\right) - \lim_{\Delta\to+\infty}\left(f(\Delta\mu)\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx\right) \\
&=\left(\lim_{\epsilon\to+0} f(\epsilon\eta) - \lim_{\Delta\to+\infty} f(\Delta\mu)\right)(\ln(\beta)-\ln(\alpha)) \\
&=\left\{\eta,\mu\in[\alpha,\beta] \Rightarrow \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\eta = 0, \lim_{\Delta\to+\infty}\Delta\mu = +\infty, f(x)\in C[0,+\infty]\right. \\
&\quad\left.\Rightarrow \lim_{\epsilon\to+0} f(\epsilon\eta) = f(0), \lim_{\Delta\to+\infty} f(\Delta\mu) = f(+\infty)\right\} \\
&=(f(0)-f(+\infty))\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$