集合论、实分析、泛函分析、基本空间引论

Real analysis and Functional analysis

作者：Galois 爱求五次根

组织：深北莫数学学社分析小组

时间：2023/2/15

宗旨：执象而求，咫尺千里

时间是个常数，但对勤奋者来说，是个‘变数’。用‘分’来计算时间的人比用‘小时’来计算时间的人时间多 59 倍——雷巴柯夫

目录

第 1 章 集合论初步

第 2 章 集合论的公理体系

2.1 数理逻辑基础

数理逻辑 (mathematical logic) 又称符号逻辑，处于数学和哲学（特别是数学哲学）的交叉部分。数理逻辑一方面使用形式逻辑的思想方法研究数学及数学推理的基本原则和规律，另一方面使用数学工具来表示和研究形式逻辑的性质和结构，最主要的分支为模型论、证明论、集合论和递归论（又称可计算理论），这四个分支的发展都和 Gödel[a] 在 20 世纪 30 年代完成的工作有着密切的联系。

数理逻辑伴随着数学公理化进程而不断发展。在 19 世纪后期到 20 世纪初，G.Frege[b]和 B. Russell（罗素）致力于用符号逻辑替代自然语言来描述数学原理和数学推理，他们发展了命题演算和谓词演算，使得数学更加系统化和严格化，从而使得数学和逻辑学成为一体。他们的工作也使得人们更加了解了数学推导中逻辑语义和逻辑语法的差别。这推动了数学公理化的进程。但在此发展中产生了对数学公理化过于乐观的倾向，即认为最终可以找到一个相容的、完备的公理系统便得所有的数学定理，包括这个公理系统的相容性，都成为这个公理系统的推论，这即是所谓的 Hilbert 计划，但这个倾向最终被 Gödel 所否定。

Gödel 关于一阶逻辑的完备性定理表明数学中基于语法上的推导和基于语义上的推理等价。基于语法上的推导是一个按照一定规则进行的机械过程，它不依赖于原因、结果以及中间过程的具体含义；基于语义上的推理则通过对每一语句在每个数学模型中的语义解释和真假值来确立原因和结果的关系。Gödel 完备性定理深刻地揭示出数学理论中语法形式推导和语义内容分析推理之间的一致性，也因此展现了模型在数学推理中的作用，促进了模型论的发展。

Gödel 第一不完全性定理成功地应用数学推理来分析逻辑的内涵及其局限性，并证明了 Hilbert 计划的不可行性，即对于任意一个相容的、包含了弱算术公理的、可判定的公理系统，总存在一个语句使其不能从该公理系统出发来证明或反证。这成为数理逻辑另一分支证明论的起点。

Gödel 第一不完全性定理证明中的一个重要步骤是分析可证明语句的计算复杂性。Gödel 证明了在一个相容的、包含了弱算术公理的、可判定的公理系统中，所有可证明语句的集合是不可判定的，所以一定存在一个不在该集合中的语句使得此语句的否定也不在该集合中。为了完善对可判定性的描述，A.Church[c]、A.M.Turing[d]等提炼出递归函数和图灵可计算性等概念。对这些概念的深入研究促发了递归论的产生和发展。

数理逻辑是一个广泛的领域，以上四个分支并不包含所有数理逻辑的内容。另外如多值逻辑、模糊逻辑、模态逻辑等，都是数理逻辑有趣的组成部分。

[a]库尔特 · 哥德尔（Kurt Godel,1906.4.28-1978.1.14）美国数学家、逻辑学家和哲学家。其最杰出的贡献是哥德尔不完全性定理和连续统假设的相对协调性证明。

[b]弗里德里希 · 路德维希 · 戈特洛布 · 弗雷格（德语：Friedrich Ludwig Gottlob Frege,1848.11.8-1925.7.26）德国数学家、逻辑学家和哲学家，是数理逻辑和分析哲学的奠基人。著有著作《概念演算——一种按算术语言构成的思维符号语言》（又名《概念文字——模仿算术的纯思维的形式语言》）《算术的基础——对数概念的逻辑数学研究》《算术的基本规律》等

[c]阿隆佐 · 邱奇 (Alonzo Church,1903.6.14–1995.8.11) 美国数学家，1936 年发表可计算函数的第一份精确定义，对计算理论的系统发展做出巨大贡献

[d]艾伦 · 麦席森 · 图灵 (Alan Mathison Turing,1912.6.23-1954.6.7) 英国数学家、逻辑学家，被称为计算机科学之父，人工智能之父。曾协助军方破解德国的著名密码系统 Enigma，帮助盟军取得了二战的胜利。1952 年，英政府对 Turing 的同性恋取向定罪，随后 Turing 接受化学阉割（雌激素注射）。1954 年 6 月 7 日，Turing 吃下含有氰化物的苹果中毒身亡。2013 年 12 月 24 日，在英国司法大臣克里斯 · 格雷灵要求下，英国女王伊丽莎白二世向 Turing 颁发了皇家赦免。Turing 提出的图灵机模型为现代计算机逻辑工作方式奠定了基础

2.1.1 基本概念

2.1.1.1 初等逻辑运算

定义 2.1 (关系)

称按照某些规则组成的字母和基本符号的汇集为关系 (**relation**，一般用 **R** 表示) ♣

定义 2.2 (析取)

设 R 和 S 为关系，则汇集

$$\mathrm{R} \vee \mathrm{S}$$

也为关系，称该关系为关系 R 和 S 的（逻辑）析取 (disjunction) ♣

定义 2.3 (逻辑否定)

设 R 为关系，则汇集

$$\neg \mathrm{R}$$

也为关系，称该关系为关系 R 的 （逻辑）否定 (**negation**) ♣

定义 2.4 (逻辑合取)

由符号 $\vee$ 与 $\neg$ 引进缩写符号 $\wedge$；给定关系 R, S，记关系

$$\neg[(\neg \mathrm{R}) \vee (\neg \mathrm{S})]$$

为

$$\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}$$

称该关系为 R 和 S 的（逻辑）合取 (**conjunction**) ♣

定义 2.5 (逻辑蕴涵)

记关系

$$\mathrm{S} \vee (\neg \mathrm{R})$$

为

$$\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S}$$

称该关系为（逻辑）蕴涵 (**implication**)，并且读作 R 蕴含 S ♣

定义 2.6 (逻辑等价)

记关系

$$[(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S}) \wedge (\mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{R})]$$

为

$$\mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{S}$$

称该关系为（逻辑）等价 (**equivalence**)，读作 R 等价于 S ♣

注 （逻辑记号与读法）

给出上述逻辑符号的读法：

注 （优先级与解释）

联结符号	联结词名称	单名	写法	读法
$\neg$	否定	非	$(\neg A)$	非 A
$\wedge$	合取	与	$(A \wedge B)$	A 与 B
$\vee$	析取	或	$(A \vee B)$	A 或 B
$\Rightarrow$	蕴含	含	$(A \Rightarrow B)$	A 含 B
$\Leftrightarrow$	互含	同	$(A \Leftrightarrow B)$	A 同 B

对符号规定如下的优先级

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

在这样约定下，式子 $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ 应解释成 $(((\neg A) \wedge B) \vee C) \Rightarrow D$，而 $A \vee B \Rightarrow C$ 应解释成 $(A \vee B) \Rightarrow C$，而不是 $A \vee (B \Rightarrow C)$。

对于表示 A 蕴含 B 或 B 由 A 推出的写法 $A \Rightarrow B$，常常赋予它另一种文字解释：B 是 A 的必要特征或必要条件，同样地，A 是 B 的充分特征或充分条件，于是关系 $A \Leftrightarrow B$ 可用下面任一种方法去解释：

对于 A，B 既是必要的又是充分的
B 为 A 的充要条件
A 成立，当且仅当 B 成立
当且仅当 B 成立时，有 A 成立
A 与 B 等价
A 蕴含 B，同时 B 蕴含 A

2.1.1.2 关系的真假

> 究竟什么是真理？——不可驳倒的谬误便是
>
> Friedrich Wilhelm Nietzsche　尼采

规则 1： 应用公理得到的关系为**真 (true)**

规则 2： 给定关系 R 和 S，若关系 (R ⇒ S) 为真且关系 R 为真，则关系 S 为真

定义 2.7 (假)

若一个关系的否定为真，则称该关系为假 (**false**)

♣

注 （真的判定）

在数学里判断一个给定的关系是否是真的这个问题依赖于起初采用的公理系统：在一个公理系统里一个真的关系可能在看起来与前一个同样“自然的”另一个系统里不再是真的。例如，人们构造了集合论的公理系统，在其中“存在无穷集合”这个断言不是真的（即不能被证明——这就说明为什么这个断言是被数学家应用的集合论基础的一个公理）

注 （假的判定）

一个非真的（即不能被证明的）关系末必是假的：若 R 为一个关系，理论上很可能出现这种情况，起初采用的公理不足以证明 R 和 ¬R，称这样的关系在所考虑的公理系统内**不可决定**。可以证明在建立在前文公理基础上的通常的数学里，存在这样的关系。若 R 为一个这样的关系，可以在基础公理的列表里补充 R 或 $\neg R$

除了真的关系，假的关系，不可决定的关系，称同时是真的和假的关系为矛盾的关系。所有人都希望数学基础公理系统中的各个公理之间是相容的，即禁止存在矛盾的关系——但还不能证明这一点，若矛盾的关系出现，就必须舍弃或减弱基础公理系统中的某些公理。

定义 2.8 (真值表)

设 p 为关系，用 1 表示为真，用 0 表示为假，可以构造其真值表 (**truth table**)[a]，如表所示

[a]1917 年由奥地利裔英国哲学家 Ludwig Josef Johann Wittgenstein 首次发明

注 （逻辑系统与排中律）

在一个逻辑系统中，若每个公式或语句仅能取真值或者假值，则称该逻辑系统满足**排中律 (law of excluded middle)**。有的逻辑系统不满足排中律，例如可以构造一个 Boole[1]代数，使得它的元素是一些命题逻辑中公式的等价类（设 p 为一个公式，称所有和 p 逻辑等价的公式的集合为等价类，记为 [p]）。若对每个公式 p，把 [p] 看成是赋予 p 在逻辑代数中的一个值，则该命题逻辑加上这个新的赋值系统就不满足排中律，这样的逻辑系统不是经典逻辑系统，而是布尔值逻辑系统。常被研究的非经典逻辑系统还有三值逻辑系统、多值逻辑系统、格值逻辑系统和模糊逻辑系统等。不特殊说明，均理解为讨论经典逻辑系统

2.1.1.3 逻辑公理与重言式

数学是一门演绎的学问，从一组公设，经过逻辑的推理，获得结论

陈省身

注 这里采用的阐述方式不唯一，存在许多从少数几个公理出发推导出逻辑推理规则的其他可能的方式

公理 2.1

若 R 为一个关系，则关系

$$(\mathrm{R} \vee \mathrm{R}) \Rightarrow \mathrm{R}$$

为真

注 由此若 $\mathrm{R} \vee \mathrm{R}$ 为真，则根据前小节规则 2，R 为真

公理 2.2

若 R 和 S 为两个关系，则关系

$$\mathrm{R} \Rightarrow (\mathrm{R} \vee \mathrm{S})$$

为真

注由此 R 为真，则根据前小节规则 2，$(\mathrm{R} \vee \mathrm{S})$ 为真

公理 2.3

若 R 和 S 是关系，则关系

$$(\mathrm{R} \vee \mathrm{S}) \Rightarrow (\mathrm{S} \vee \mathrm{R})$$

为真

注 组合前两个公理 (2.1)(2.2) 有，若 R 为真，则 $(\mathrm{S} \vee \mathrm{R})$ 为真，同理若 S 为真，则 $(R \vee S)$ 为真。由于已经建立若 R 为真，则 $(R \vee S)$ 必定为真，则有若关系 R 和 S 至少有一个为真，则 $(R \vee S)$ 为真，这符合词“或”的朴素意义，因此构建其真值表如下

注根据已给出的真值表，可以给出逻辑合取，逻辑蕴含与逻辑等价的真值表如下：以上真值表仅供辅助理解，正式的演算和推广放在后文讨论

[1]乔治 · 布尔（George Boole,1815.11.2-1864）英国数学家，19 世纪最重要的数学家之一，出版了其首次对符号逻辑做出诸多贡献的《逻辑的数学分析》。1854 年出版了著作《思维规律的研究》，书中介绍了现在以他的名字命名的 Boole 代数

R	$\neg R$
0	1
1	0

R	S	$R \vee S$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

公理 2.4

若 R,S 和 T 为关系，则关系

$$(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S}) \Rightarrow [(\mathrm{R} \vee \mathrm{T}) \Rightarrow (\mathrm{S} \vee \mathrm{T})]$$

为真

注： 由此得若 R 蕴含 S，即关系 $(R \Rightarrow S)$ 为真，则关系 $(R \vee T)$ 蕴含 $(S \vee T)$。

定义 2.9 (重言式)

称仅使用上述公理 (2.1)(2.2)(2.3)(2.4) 可以证明的定理为重言式 **(tautology)**
另外，显然这时关系表达式在其中关系的各种真值赋值下均为真，称在其中关系的各种真值赋值下均为假的关系表达式为矛盾的 **(contradictory)**。若在其中关系的各种真值赋值下至少有一个真值赋值为真，则称该关系表达式为可满足的

定理 2.1 (三段论原则)

设 R, S, T 为关系，若 $(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S}), (\mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{T})$ 为真，则 $(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{T})$ 为真

证明 应用公理 (2.4) 且在其中用 S, T 和 ($\neg R$) 分别代换 R, S, 和 T，则有关系

$$(\mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{T}) \Rightarrow [\mathrm{S} \vee (\neg\mathrm{R}) \Rightarrow (\mathrm{T} \vee (\neg\mathrm{R}))]$$

为真，则关系

$$(\mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{T}) \Rightarrow [(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S}) \Rightarrow (\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{T})]$$

为真。根据假设，关系 $\mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{T}$ 为真。规则 2 指出关系

$$(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S}) \Rightarrow (\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{T})$$

为真。由假设关系 $(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S})$ 为真，由规则 2 即有 $\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{T}$ 为真

定理 2.2

设 R 为一个关系，则关系 $(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{R})$ 为真

证明 由规则 1 和规则 2 有 $\mathrm{R} \Rightarrow (\mathrm{R} \vee \mathrm{R})$， $(\mathrm{R} \vee \mathrm{R}) \Rightarrow \mathrm{R}$ 为真，又由 (2.1) 即证

注 考虑到符号 $\Rightarrow$ 的定义，该陈述意味着对于任意的关系 R，关系 $\mathrm{R} \vee (\neg\mathrm{R})$ 为真，但这推不出 R, ¬R 中至少有一个是真的——这正是是否存在不可决定的关系的问题！事实上，如此就建立了一个关系 $(\mathrm{R} \vee \mathrm{S})$，它是真的但不能从它直接推出关系 R，S 中的一个为真

定理 2.3 (双重否定律)

设 R 为一个关系，则关系

$$\mathrm{R} \Leftrightarrow \neg(\neg \mathrm{R})$$

为真 ♡

注 称 R 是真即为 $\neg R$ 的否定为真，即 $\neg R$ 为假

定理 2.4 (逆否命题)

设 R 和 S 为关系，则关系

$$(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S}) \Leftrightarrow ((\neg \mathrm{S}) \Rightarrow (\neg \mathrm{R}))$$

为真 ♡

注陈述 $(\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{S}) \Leftrightarrow ((\neg \mathrm{R}) \Rightarrow (\neg \mathrm{S}))$ 为假，并且是众多逻辑错误的来源，例如，右派人士支持“国产的代数学”，从而左派人士支持“外来的代数学”

定理 2.5

设 R 和 S 为关系，则关系

$$(\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}) \Rightarrow \mathrm{R}, \quad (\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}) \Rightarrow \mathrm{S}$$

为真 ♡

注进而若 R 和 S 为真，则 $(\mathrm{R} \wedge \mathrm{S})$ 为真。由此则有 $(\mathrm{R} \wedge \mathrm{S})$ 为真必须且只需所考虑的 R 和 S 是真的，这符合词“与”的朴素意义

定理 2.6 (归谬推理法)

若存在矛盾的关系，则所有其他关系都是矛盾的 ♡

证明 由公理 (2.2)(2.3) 有 $(\neg \mathrm{R}) \Rightarrow (\mathrm{S} \vee (\neg \mathrm{R}))$ 为真。由于根据假设 $(\neg R)$ 为真，则关系 $S \vee (\neg R)$, 即$(R \Rightarrow S)$ 为真。而根据假设 R 为真，有 S 为真，同样有 ¬S 为真

注归谬推理即为了证明关系 R 为真，把 $(\neg R)$ 暂时加入到数学公理当中，并且证明这样建立的“新”数学是矛盾的。根据该命题，所有的关系在新的系统里都是真的，特别关系 R 是真的。因此 R 是（通常的）数学公理和关系 $(\neg R)$ 的推论，这意味关系 $(\neg \mathrm{R}) \Rightarrow \mathrm{R}$ （在通常的数学里）为真。欲证 R 本身为真，在公理 (2.4) 中，用 $(\neg R), R$ 和 R 分别代替 R, S 和 T，就得到关系

$$(\neg \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{R}) \Rightarrow [(\neg \mathrm{R} \vee \mathrm{R}) \Rightarrow (\mathrm{R} \vee \mathrm{R})]$$

为真。由公理 (2.3) 即有 $((\neg R) \Rightarrow R)$ 为真，则 $(R \vee R)$ 为真，又由公理 (2.1) 有 R 为真

在实践中，归谬推理这样使用：“假定关系 R 是假的”，这即为添加 $(\neg R)$ 到数学公理中，由此出发推理直到发现一个同时是真的和假的关系，继而说“这是荒谬的，从而 R 为真”

定理 2.7 (情况析取法)

设 R,S 和 T 为关系，若三个关系

$$\mathrm{R} \vee \mathrm{S}, \quad \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{T}, \quad \mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{T}$$

为真，则 T 为真 ♡

证明 由 S 蕴含 T，公理 (2.4) 指出 $(\mathrm{S} \vee \mathrm{R})$ 蕴含 $(\mathrm{T} \vee \mathrm{R})$。由 R 蕴含 T，同样有 $(\mathrm{R} \vee \mathrm{T})$ 蕴含 $(\mathrm{T} \vee \mathrm{T})$。由公理 (2.3) 有 $(\mathrm{T} \vee \mathrm{R})$ 蕴含 $(\mathrm{R} \vee \mathrm{T})$，于是有 $(\mathrm{S} \vee \mathrm{R})$ 蕴含 $(T \vee T)$；而 $(R \vee S)$ 为真且蕴含 $(S \vee R)$；于是 $(T \vee T)$ 为真，则由公理 (2.1) 得证

注在实践中经常在使用该陈述时取 S 为 R 的否定；为了证明 T 为真，只需指出 R 蕴含 T 且 ¬R 也蕴含 T

2.1.1.4 关系的代换与满足

定义 2.10 (代换与满足)

设 R 为一个关系，A 为一个数学对象，x 为一个字母（一个完全未确定的数学对象）。在组成关系 R 的字母和基本符号的汇集里处处用 A 代替 x（由构成关系的法则，这样得到的汇集仍为一个关系），称构成的关系为在 R 中用 A 代换 **(substitute)** x 得到的关系（或在 R 中给 x 以值 A 得到的关系），记为 $(A|x)R$

若关系 $(A|x)R$ 为真，则称 A 满足关系 R。若在汇集 R 里 x 实际上不出现，则关系 $(A \mid x)R$ 即为 R，这时称 A 满足 R 即意味着 R 为真。♣

注 （代换与满足）

为指出字母 x 出现在关系 R 中，经常记为 $R\{x\}$，因此以后经常用 $R\{A\}$ 代替 $(A|x)R$。同理若 x 和 y 为出现在 R 里的两个字母，则用 $R\{x, y\}$ 代替 R，以此类推

定理 2.8 (代换规则)

设 R 为一个关系，x 为一个字母，A 为一个数学对象，若关系 R 为真，则在 R 里用 A 代换 x 得到的关系为真 ♡

证明 首先对于应用一个公理直接得到的 R 验证它，在这种情形，关系 $(A|x)R$ 要么等于 R，要么是直接应用跟 R 同样的公理所得。假定清晰地写出了所有公理，并且一旦实现了所有这些验证，就直接过渡到了“任意”一个真关系的一般情形

注通俗地解释，若把 x 看作一个“未确定的对象”时，R 为真，则当给 x 指定一个值 A 时，R 仍为真。实际上该命题目的为验证字母作为“未确定的对象”的解释——证明机器并不知道该概念，人们耗费大量时间才能让机器懂得什么是“未确定的对象”

2.1.2 谓词逻辑

2.1.2.1 一阶量词及其演算

> To be is to be perceived
>
> （存在即是被感知）
>
> George Berkeley　贝克莱

注 （存在）

到目前为止，已经指出了构成关系的三个基本方法——逻辑析取，否定与一个对象代换一个字母。这些方法是纯逻辑性质的，而在实践中还需要形成关系的第四个纯逻辑方法，其纯直觉意义是“存在”，以下讨论的目的是用一个新符号 ∃ 代替“存在”，并且把该符号的使用规则系统化

定义 2.11 (存在量词)

给定一个关系 R 和一个字母 x，设至少有一个数学对象 A 使得关系 $(A \mid x)R$ 为真（即它满足 R），则可组成一个新的关系，记为

$$(\exists x)R\text{或}(\exists x)R\{x\}$$

读作存在 x 满足 R，称符号 ∃ 为存在量词 **(existential quantifier)** ♣

定义 2.12 (全称量词)

若 R 是一个关系，而 x 是一个字母，用 $(\forall x)\mathrm{R}$ 表示关系

$$\neg[(\exists x)(\neg \mathrm{R})]$$

读作对于所有 x,R 或对于任意 x 有 R，称符号 $\forall$ 为全称量词 **(universal quantifier)**

注 称关系 $((\forall x)\mathrm{R})$ 为假意味着断言 $((\exists x)(\neg\mathrm{R}))$ 为真

注 （非标准量词）

称谓词逻辑中既不是存在量词也不是全称量词的量词为**非标准量词 (non-standard quantifier)**。在非标准量词中有些量词和存在量词或全称量词很接近，例如 $\exists^{\infty}x$，其语义为“存在无限多个元素 x 使得 $\cdots$”，或 $\forall^{\infty}x$，其语义为“除了有限多个元素外，对其他所有的元素 $x\cdots\cdots$”。但在非标准量词中还有些量词和存在量词或全称量词很不一样，例如，在概率模型论中的概率量词 $Q(x<r)$ 其语义为”对于概率小于 r 的集合中的元素 $x\cdots$”。所以公式 $Q(x<r)\varphi$ 在一个概率空间中为真当且仅当使 φ 为真的所有元素 x 所组成的集合其概率测度小于 r

注 仅使用字母，三个逻辑符号（$\vee,\neg,\exists$）和下两节中的用来形成“相等”“属于”和“序偶”（甚至可以取消最后一个）的数学符号，理论上就可以书写整个数学。在该系统里，一个断言 $(\exists x)\mathrm{R}$ 可以为真，却没有任何办法“实际构造”一个满足 R 的数学对象

公理 2.5 (代换公理)

设 R 为一个关系，x 为一个字母，A 为一个数学对象，则关系

$$(\mathrm{A}|x)\mathrm{R} \Rightarrow (\exists x)\mathrm{R}$$

为真

注 这表明若 $(\mathrm{A}|x)\mathrm{R}$ 为真，换句话说，若 A 满足 R，则 $(\exists x)\mathrm{R}$ 为真。在实践中几乎总是如此：为了证明形如 $(\exists x)\mathrm{R}$ 的关系为真，展示出一个满足 R 的特定对象 A

定理 2.9

设 R 为一个关系，x 为一个字母，A 为一个数学对象，则关系

$$(\forall x)\mathrm{R} \Rightarrow (\mathrm{A}|x)\mathrm{R}$$

为真

注 于是若关系 $(\forall x)\mathrm{R}$ 为真，则在 R 里用任何一个数学对象代换 x 得到的关系都为真。

定理 2.10

设 R 为一个关系，x 为一个字母，则关系

$$\neg((\exists x)\mathrm{R}) \Leftrightarrow (\forall|x)(\neg\mathrm{R})$$

为真

注 称关系 $(\exists x)\mathrm{R}$ 为假意味着关系 $(\forall x)(\neg\mathrm{R})$ 为真，特别地称所有数学对象满足 $(\neg R)$

定理 2.11

设 R 为一个关系，x 为一个字母，则关系

$$(\forall x)(\mathrm{R}\wedge\mathrm{S}) \Leftrightarrow ((\forall x)\mathrm{R}\wedge(\forall x)\mathrm{S})$$

为真

注直觉上显然，但反之注意关系

$$(\forall x)(\mathrm{R} \vee \mathrm{S}) \Leftrightarrow ((\forall x)\mathrm{R} \vee (\forall x)\mathrm{S})$$

一般不是真的，例如，断言“所有脑力劳动者是变节者或同性恋者”不蕴涵“所有脑力劳动者是变节者或所有脑力劳动者是同性恋者”，因为可能存在脑力劳动者，他是变节者而非同性恋者，同时存在脑力劳动者，他既是同性恋者又是爱国者

定理 2.12

设 R 和 S 为关系，x 为一个字母，则关系

$$(\exists x)(\mathrm{R} \vee \mathrm{S}) \Leftrightarrow ((\exists x)\mathrm{R} \vee (\exists x)\mathrm{S})$$

为真

注直觉上这也是显然的，注意关系

$$(\exists x)(\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}) \Rightarrow ((\exists x)\mathrm{R} \wedge (\exists x)\mathrm{S})$$

为真，但关系

$$((\exists x)\mathrm{R} \wedge (\exists x)\mathrm{S}) \Rightarrow (\exists x)(\mathrm{R} \wedge \mathrm{S})$$

一般为假。断言“存在富有并且诚实的人”显然蕴涵“存在富有的人并且存在诚实的人”，但是反向的蕴涵不正确，因为纯逻辑推理不足以排除富有的人必然是不诚实的

定理 2.13

设 R 为一个关系，x 和 y 为两个不同的字母，则有

$$(\forall x)(\forall y)\mathrm{R} \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\mathrm{R}$$

$$(\exists x)(\exists y)\mathrm{R} \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\mathrm{R}$$

$$(\exists x)(\forall y)\mathrm{R} \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\mathrm{R}$$

均为真

证明 给出第二个关系的一个直觉的（不正确的）证明：若关系 $(\exists x)(\exists y)\mathrm{R}$ 为真，则可以找到一个对象 A 使得在关系 $(\exists y)\mathrm{R}$ 里用它代换 x 得到一个真的关系，换句话说关系 $(\exists y)\mathrm{R}\{\mathrm{A},\mathrm{y}\}$ 为真。这表明存在一个对象 B 使得用它代换 $R\{A,y\}$ 中的 y 就会得到一个真的关系，换句话说关系 $R(A,B)$ 为真。这时 $(\exists x)\mathrm{R}\{\mathrm{x},\mathrm{B}\}$ 为真，则关系 $(\exists y)(\exists x)\mathrm{R}\{x,y\}$ 为真

注 该证明至少有三处不正确：(1) 只证明了关系 $(\exists x)(\exists y)\mathrm{R}$ 蕴含 $(\exists y)(\exists x)\mathrm{R}$，而原来要求的是证明这两个关系是等价的，该问题并不严重，反向蕴含按相同的方式进行即可；(2) 只证明了若关系 $(\exists x)(\exists y)\mathrm{R}$ 为真，则关系 $(\exists y)(\exists x)\mathrm{R}$ 也为真，但一个蕴含可以为真却不依赖其两项的真实性；(3) 认为形如 $(\exists x)\mathrm{R}$ 这样的关系为真，必须且只需可以找到一个对象 A 使得关系 $(\mathrm{A}|x)\mathrm{R}$ 为真，但公理 (2.5) 仅指出这个条件是充分的

注 到此为止，上述所有定理均为重言式，以下不再使用重言式这样的说法。对于一般的关系，采用命题的说法，对于经常使用的重要命题，使用定理的说法，对于由某个定理直接获得的结论使用推论的说法。

2.1.3 逻辑系统

2.1.3.1 Hilbert 运算

Wir müssen wissen, wir werden wissen

（我们必须知道，我们必将知道）

David Hilbert 希尔伯特

定义 2.13

简略地给出一个可能的逻辑系统，该系统被 N. Bourbaki 在其数学基础中所应用。在这个系统里，使用七个基本符号和字母。其中四个基本符号

$$\vee, \quad \neg, \quad \tau, \quad \square$$

是纯逻辑符号性质的；三个基本符号是数学性质的，即

$$=, \quad \in, \quad \supset,$$

其中第三个符号为序偶符号，见下面的准则 (OM2)，在后文引进。♣

定义 2.14

写出符号和字母的一个序列得到一个汇集，出现在汇集里的某些符号 τ 可以连接到某些符号 □——例如表达式

$$\underbrace{\tau x \in y = \in\in yx = z\square}$$

设 A 为一个汇集，x 为一个字母，指出一个产生新汇集的过程，新的汇集不再含有字母 x，仍记为 $\tau_x($ A$)$，其通过以下三个操作得到：

a) 在 A 前写符号 τ 得到汇集 τA

b) 用连接符连接 A 前面的 τ 和每个字母 x

c) 在已经得到的汇集里，处处用符号 □ 代替 x

比如，A 是前面写出的汇集，那么 $\tau_x($ A$)$ 是汇集 ♣

注 从 A 过渡到 τ_x (A) 所做的运算本质上属于 Hilbert[2]。下面叙述数学对象和关系的组成准则：

(OM1) 所有字母是一个数学对象

(OM2) 如果 A 和 B 是数学对象，则汇集 $\supset AB$ 是一个数学对象，在实际中记为 (A,B)

(OM3) 设 A 和 T 是数学对象，x 是一个字母，则在 T 里处处用 A 代换字母 x 导出的汇集 $(\mathrm{A}|x)\mathrm{T}$ 是一个数学对象

(OM4) 设 R 是一个关系，而 x 是一个字母，则汇集 $\tau_x($ A$)$ 是一个数学对象

(R1) 设 R 和 S 是关系，则汇集 $\vee RS$ 是关系，在实际中把 $\vee RS$ 记为 $R \vee S$

(R2) 设 R 是一个关系，则汇集 $\neg$R 是一个关系

(R3) 设 R 是一个关系，x 是一个字母，而 A 是一个数学对象，则汇集 $(\mathrm{A}|x)\mathrm{R}$ 是一个关系

(R4) 设 A 和 B 是数学对象，则汇集 $=$ AB 是一个关系，在实际中把 $=$ AB 记为 A $=$ B

(R5) 设 A 和 B 是数学对象，则汇集 $\in$ AB 是一个关系，在实际中把 $\in AB$ 记为 $A \in B$

注 没有其他的方法构成数学对象和关系。(OM4) 几乎从不直接使用，除此之外，前面的所有准则在实际中每时每刻都会用到。注意到前面没有提到量词 $\exists$ 和 $\forall$:，因为使用 Hilbert 运算能够作为简单的缩写引入它们；精确地说，设 R 是一个关系，而 x 是一个字母，则按照定义 $(\exists x)$R 是关系，而关系 $(\tau_x(\mathrm{R}) \mid x)\,\mathrm{R}$，通过在 R 里处处用 $\tau_x(\mathrm{R})$ 代换字母 x 得到。因此 $(\exists x)$R 为真，必须并且只需对象 $\tau_x(\mathrm{R})$ 满足关系 R。

这就给出了 Hilbert 运算的直观解释：该运算在于对于每个关系 R 和每个字母 x 一劳永逸地选择满足关系 $\mathrm{R}\{x\}$ 的一个对象（如果它“存在”，在相反的情形，$\tau_x(\mathrm{R})$ 是一个无话可说的对象），不言而喻这个“存在”纯粹是虚构的：Hilbert 运算的益处在于给了一个完全不自然但却纯粹机械的实际构造一个对象的过程，人们仅仅知道该对象满足预先规定的条件（在该对象存在的条件下），现在人们还用它来代替选择公理。

在实践中利用 Hilbert 运算是完全例外的，它显然不能够推演出任何“明晰的”结果。Hilbert 运算像是哲学的上帝，难以懂得和不见踪影，但是它统治一切，并且其体现无处不在

[2]大卫 · 希尔伯特（David Hilbert,1862.1.23-1943.2.14）德国著名数学家，20 世纪最伟大的数学家之一。他在 1899 年出版的《几何基础》成为近代公理化方法的代表作，是近代形式公理学派的创始人。1900 年 8 月 8 日，在巴黎第二届国际数学家大会上，Hilebert 提出了新世纪数学家应当努力解决的 23 个数学问题，被认为是 20 世纪数学的至高点。对这些问题的研究有力推动了 20 世纪数学的发展，在世界上产生了深远的影响。

2.2 集合论基础

为了解决在引进了无限集合后产生的各种超出当时想象的问题，G.Cantor 建立了朴素集合论。但在 Russell 发现了著名的 Russell 悖论后，对朴素集合论进行改造就迫在眉F。在 E.Zermelo、A.Fraenkel[a]及其他数学家的努力下，集合论的公理系统如 Zermelo-Fraenkel（ZF）公理系统，在数理逻辑的框架下得以建立。Zermelo-Fraenkel 公理系统的引入避免了 Russell 悖论。Gödel 对集合论发展的贡献存在于两个方面：一方面，Gödel 第二不完全性定理证明了从任意一个相容的、包含了算术公理的、可判定的公理系统出发不可能证明其自身的相容性。所以在 Zermelo-Fraenkel 公理系统中不可能证明该系统的相容性，从而使人们避免了在 Zermelo-Fraenkel 公理系统内寻找本系统相容性的无谓努力。另一方面，Gödel 引入与 Zermelo-Fraenkel 公理系统的相对相容性。这和以后 P. Cohen[b] 利用力迫法证明的非选择公理以及非连续统假设与 Zermelo-Fraenkel 公理系统相对相容的结果一起成了现代公理集合论的独立性证明的样本。

[a]弗伦克尔 (Fraenkel, Adolf Abraham, 1891-1965) 德国数学家。1919 年 Fraenkel 出版的《集论导引》，改进了数学家 Zermelo 已有的形式集合论结果，对其定义和基础加以限制或强化，形成了著名的 ZF 公理体系，著有数学史《高斯时代数的概念与代数》(1920)，《格奥尔格 · 康托尔》(1930) 等

[b]保罗 · 寇恩 (Paul Joseph Cohen,1934.4.2-2007.3.23) 美国数学家，他证明 ZF 公理系统加上选择公理 (ZFC) 不能反驳连续统假设 (CH) 的否命题，而 ZF 不能反驳选择公理 (AC) 的否命题。这一划时代的工作与 Gödel 在 1930 年代的工作一起，证明了 CH 和 AC 分别独立于 ZFC 和 ZF。Cohen 在证明中创造了力迫法，如今力迫法已经成为公理集合论的一项基本技术。Cohen 凭借连续统假设的独立性证明于 1966 年获菲尔兹奖。

2.2.1 基本概念

2.2.1.1 相等关系与属于关系

注 前面引入的符号是纯逻辑性质的，用它们“构成”不仅针对数学的推理模式。下面引入的两个“基本符号”（相等符号和属于符号）用以构造特别针对数学的关系和对象

定义 2.15 (相等关系)

设 a 和 b 为数学对象，则存在记为

$$a = b$$

的关系，称符号 $=$ 为相等 (**equality**) 符号，一般读作等于 (**equal**)

定理 2.14 (相等关系定义)

对于相等关系，有作为定义的下列性质：

a) 对于任意 x，关系 $x = x$ 为真

b) 对于任意 x 和 y，关系 $x = y$ 和 $y = x$ 等价

c) 对于任意 x, y, z，关系 $x = y$ 和 $y = z$ 蕴涵 $x = z$

d) 设 u 和 v 为使得 $u = v$ 的数学对象，而 $\mathrm{R}\{x\}$ 为一个含有字母 x 的关系，则在 $\mathrm{R}\{x\}$ 中处处分别用 u 和 v 代换字母 x 得到的关系 $\mathrm{R}\{u\}$ 和 $\mathrm{R}\{v\}$ 等价

注定理的断言 d) 意味着两个相等的对象 a 和 b 有同样的性质，即所有对于 a 有效的断言对于 b 也是有效的，反之亦真。至于断言 a), b) 和 c)，它们表达的是等式的最“显然的”性质。事实上断言 d) 是数学基础公理中的一个公理，至于“显然的”断言 a),b) 和 c)，或者把它们取作公理（对于初学者），或者从一个更复杂的但是唯一的公理推出：若 R 和 S 为两个等价的关系，而 x 是一个字母，则关系 $\tau_x(\mathrm{R}) = \tau_x(\mathrm{S})$ 为真。在实际中常常使用该定理，而从不明确声明引用了它

定义 2.16 (属于关系)

若 a 和 b 为数学对象，则存在记为

$$a \in b$$

的关系，读作 a 属于 **(belong to)** b，称符号 $\in$ 为属于。关系 $a \in b$ 的否定记为

$$a \notin b$$

♣

公理 2.6

设 A 和 B 为两组数学对象，为了有 $\mathrm{A} = \mathrm{B}$，必须并且只需

$$x \in \mathrm{A} \Leftrightarrow x \in \mathrm{B}$$

♡

注 给出符号 $\in$ 的直观解释：想象每个数学对象是另外一些对象的集体（集合一词由此而来），关系 $x \in y$ 为真时意味着 x 是组成集合 y 的对象中的一个。而该公理肯定为了对象的两个集体是相等的，必须且只需它们含有同样的对象（即第一个集体的所有对象属于第二个，反之亦然）

注 （Cantor 集合论）

集合的概念从 19 世纪末发展到 20 世纪初。集合论语言成为最通用的数学语言，甚至有定义称："数学就是研究集合上各种结构（关系）的科学"[3]

集合论的奠基人 Cantor[4]如下描述集合概念："所谓集合，是我们直观感到或意识到的，由确定的、彼此不同的对象联合成的整体"，Cantor 的描述并不是定义，因为它诉诸于可能比集合概念本身更复杂且从未定义过的概念，描述的目的在于把这个概念与其他概念联系起来加以说明。Cantor 的"朴素的"集合论的基本前提可归结为：

1° 集合可由任意不同的事物组成

2° 集合由构成它的事物集聚而唯一确定

3° 任何性质都定义一个具有该性质的事物的集合

定义 2.17 (朴素集合论定义)

若 x 是一事物，P 是一性质，则 $P(x)$ 表示 x 有性质 P，称组成类（或集合）的事物为类（或集合）的元素 **(element)**。

♣

注 "所有集合的集合"的概念会产生矛盾：设 M 为一集合，用 $P(M)$ 表示"M 是不以自己作为元素的集"这样一种性质考察具有性质 P 的集合的类 $K = \{M \mid P(M)\}$，若 K 是集合，则要么 $P(K)$ 为真，要么 $\neg P(K)$ 为真。但是二者择一对于 K 是不可能的。实际上，$P(K)$ 不成立，因为由 K 的定义推知 $\neg P(K)$ 为真；另一方面，$\neg P(K)$ 也不可能真，因为这与 K 的定义，亦即，它是不含自身的那样的集的类相矛盾。因此 K 不是集合。

这是经典的 Russell[5]悖论，它是朴素集合论所导致的悖论之一

定义 2.18 (分离模式集合定义)

设 X 为一些数学对象的汇集，P 为某种性质，称则

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

为一个集合 **(set/множество)**，或简称为集

♣

注 （分离模式集合定义）

---

[3]参看 Bourbaki 的书《数学简史》, 俄译本 Очерки по истории математики, M.: ИЛ,1963.

[4]格奥尔格 · 康托尔（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp，1845.3.3-1918.1.6）德国数学家，无穷集理论的创始人, 在数学中使用集合论语言的鼻祖。生于俄罗斯圣彼得堡。父亲是犹太血统的丹麦商人，母亲出身艺术世家。1856 年全家迁居德国的法兰克福。

[5]伯特兰 · 阿瑟 · 威廉 · 罗素（Bertrand Arthur William Russell，1872.5.18—1970.2.2）英国哲学家、数学家、逻辑学家、历史学家、文学家，分析哲学的主要创始人，世界和平运动的倡导者和组织者，主要作品有《西方哲学史》《哲学问题》《心的分析》《物的分析》等

该集合表示 X 中所有具有性质 P 的元素之集。该集合是 X 的一个子集，直观上该集合为把 X 中具有性质 P 的元素分离出来得到的

注 （分离模式集合定义必要性）

分离模式不能换成如下的形式：若 P 为某种性质，则 $\{x \mid P(x)\}$，由 Russell 悖论有 $R = \{X \mid X \notin X\}$ 不为一个集合，由此所有的集合不再为一个集合，即

$$V = \{X \mid X = X\}$$

不为一个集合，否则，Russell 悖论中的 R 可以记为

$$R = \{X \in V \mid X \notin X\}$$

由分离模式 R 为一个集合，这样又导致了 Russell 悖论

定义 2.19 (单元素集)

设 x 是一个数学对象，则存在唯一的具有下列性质的一个集合 $\{x\}$: 关系 $y \in \{x\}$ 等价于 $y = x$，称这种类型的集合为单元素集 **(singleton)** ♣

注 显然对于任意 x 和 y，关系 $\{x\} = \{y\}, x = y$ 等价。形式化记为：

$$(\forall x)(\forall y)[(\{x\} = \{y\}) \Leftrightarrow (x = y)]$$

注 “类 (class)”，“族 (family)”，“集体”，“组” 等词在集合论中作 “集合” 的同义词使用

定理 2.15 (集合单元素性充要条件)

一个集合 X 为单元素集当且仅当满足下列条件

a) X 中存在元素

b) $\forall x \in \mathrm{X})(\forall y \in \mathrm{X}) : x = y$ ♡

证明 必要性显然，下证充分性。假定条件成立，则由 X 非空可选择 X 的一个元素 x。设另一元素 $y \in \mathrm{X}$，有关系 $y = x$ 蕴含 $y \in \mathrm{X}$，又由条件 b) 成立有 $y \in \mathrm{X}$ 蕴含 $y = x$。则有 $y \in \mathrm{X}$ 和 $y \in \{x\}$ 等价。这即证明了 $\mathrm{X} = \{x\}$

定义 2.20 (有限集与无穷集)

设 x 和 y 为两个数学对象，存在唯一的集合 $\{x, y\}$，它仅有的元素为 x 和 y，换言之关系 $z \in \{x, y\}$ 等价于关系 $z = x$ 或$z = y$ ，若 $x \neq y$，则称这种类型的集合为双元素集。若 $x = y$ 显然 $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$ 退化为单元素集合。类似地定义三个，四个，$\cdots$ 元素的集合。称这样得到的集合为有限集 **(finite set)**，称有限集以外的其他集合为无穷集 **(infinite set)** ♣

2.2.1.2 包含关系与幂集公理

定义 2.21 (包含关系)

从属于符号出发，引进一个缩写 $\subset$ ，称该记号为包含 **(inclusion)**。给定两个集合 A 和 B，用 $A \subset B$ 表示关系：对于所有 x，关系 $x \in \mathrm{A}$ 蕴涵关系 $x \in \mathrm{B}$，可以形式化记为：

$$(A \subset B) := \forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

关系 $A \subset B$ 读作 A 包含于 B，或 B 包含 A，或 A 为 B 的一个子集 **(subset)**，该关系还可以记为 $B \supset A$。若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称包含关系 $A \subset B$ 为严格的，或称 A 为 B 的真子集 **(proper subset)** ♣

性质 （包含关系性质）

包含关系具有下列性质：

a)$(A\subset B)\wedge(B\subset C)\Rightarrow(A\subset C)$

b)$(A=B)\Leftrightarrow(A\subset B)\wedge(B\subset A)$

证明 a) 若关系 $x\in \mathrm{A}$ 蕴涵 $x\in \mathrm{B}$ 且 $x\in \mathrm{B}$ 蕴涵 $x\in \mathrm{C}$，则三个关系中的第一个蕴涵最后一个，这即是定理重言式 (2.1)；b) 显然归结为公理 (2.6)

定理 2.16

设 $\mathrm{R}\{x\}$ 为出现字母 x 的一个关系，对于所有集合 X，存在 X 的唯一子集 A 具有性质：$x\in \mathrm{A}$ 当且仅当关系 $x\in \mathrm{X}$ 和 $\mathrm{R}\{x\}$ ♡

注 称 A 为满足关系 $\mathrm{R}\{x\}$ 的 $x\in \mathrm{X}$ 的集合。直观地说，A 是由具有关系 $\mathrm{R}\{x\}$ 所表示的性质的对象 $x\in \mathrm{X}$ 组成的集体，从而 A 的存在性直观地看来显然。数学上不使用远不如它显然的公理。该定理的证明是困难的，一般假设为公理

注对于所有关系 $\mathrm{R}\{x\}$, 存在一个其元素是所有使得关系 $\mathrm{R}\{x\}$ 为真的对象 x 的集合（在数理逻辑部分精确意义下）这一断言不是真的（该定理仅肯定限定考虑一个预先给定的集合 X 时可以做到），而正是由于忽略了这一谨慎考虑，导致数学家在 19 世纪末发现了著名的 “集合论的悖论”

定义 2.22 (补集)

设 M 为集合 X 的一个子集，关系 $R\{x\}$ 为 $x\notin M$，称 X 的子集 A 为 M 在 X 里的（绝对）补集 **(complementary set)**，记为

$$X-M$$

即 X 的不属于 M 的元素的集合 ♣

性质 （补集性质）

设 M 和 N 为 X 的子集，则下列命题成立：

1) 关系 $M\subset N$ 和 $X-N\subset X-M$ 等价

2) 对于 X 的所有子集 M 有 $\mathrm{X}-(\mathrm{X}-\mathrm{M})=\mathrm{M}$

证明 （非严格证明）集合 $\mathrm{X}-(\mathrm{X}-\mathrm{M})$ 由使得关系 $x\in(\mathrm{X}-\mathrm{M})$ 为假的 $x\in \mathrm{X}$ 所组成；对于 $x\in \mathrm{X}$ 等价于 $x\in \mathrm{M}$ 的否定，从而集合 $\mathrm{X}-(\mathrm{X}-\mathrm{M})$ 由使得 $x\in \mathrm{M}$ 的否定为假的 $x\in \mathrm{X}$ 所组成，即关系 $x\in \mathrm{M}$ 为真，由此即得 $\mathrm{X}-(\mathrm{X}-\mathrm{M})=\mathrm{M}$

假定 $\mathrm{M}\subset \mathrm{N}\subset \mathrm{X}$。由关系 $x\in \mathrm{M}$ 蕴含关系 $x\in \mathrm{N}$，第二个的否定蕴含第一个的否定，则关系 $x\in \mathrm{X}-\mathrm{N}$ 蕴含关系 $x\in \mathrm{X}-\mathrm{M}$，从而有 $\mathrm{X}-\mathrm{N}\subset \mathrm{X}-\mathrm{M}$。反之同理有这个关系蕴含 $\mathrm{X}-(\mathrm{X}-\mathrm{M})\subset \mathrm{X}-(\mathrm{X}-\mathrm{N})$，，即 $M\subset N$

注 上面的“证明”逻辑上十分不充分，因为它使用了“集合”这个词的直观意义。为了正确证明关系 $X-(X-M)=M$，应该引进关系 $\mathrm{R}:x\in \mathrm{M},\quad \mathrm{S}:x\in \mathrm{X}$

假设 M 为 X 的一个子集意指 R 蕴涵 S，从而若 R 蕴涵 S，则关系 $X-(X-M)=M$ 意指 R 和关系 $\mathrm{S}\wedge[\neg(\mathrm{S}\wedge(\neg \mathrm{R}))]$ 等价。为了建立这两个关系的等价性，自然应该使用前文数理逻辑部分的证明规则。由此看起来显然的断言当真正实际证明它时不再简单，而希腊人早已注意到这一事实。

定义 2.23 (空子集)

设 X 为一个集合，在 X 的子集中出现 X 本身，则允许定义集合

$$\varnothing=X-X$$

并称该集为 X 的空子集 **(empty subset)** ♣

定理 2.17 (空集性质)

对于任意集合 X 和 Y 有

$$X - X = Y - Y = \varnothing$$

证明 按照公理 (2.6)，应当证明关系 $x \in \mathrm{X} - \mathrm{X}$ 和关系 $y \in \mathrm{Y} - \mathrm{Y}$ 逻辑等价；用 R 表示关系 $x \in \mathrm{X}$，而用 S 表示关系 $x \in \mathrm{Y} - \mathrm{Y}$，归结为证明关系 $\mathrm{R} \wedge (\neg \mathrm{R})$ 等价于关系 $\mathrm{S} \wedge (\neg \mathrm{S})$ 而这来自更一般的事实：关系 $\mathrm{R} \wedge (\neg \mathrm{R}) \Rightarrow \mathrm{T}$ 为真

注 利用 Hilbert 运算，空集的完全数学定义为：$\varnothing$ 表示数学对象

$$\tau_{\mathrm{X}}[(\forall x)(x \notin \mathrm{X})]$$

注 集合 $\varnothing = X - X$，由定理它总是同一个集且不依赖集合 X，基于该理由称该集合为**空集 (empty set/пустое множество)**。关系 $x \in \varnothing$ 等价于关系 $(x \in \mathrm{X}) \wedge (x \notin \mathrm{X})$，则显然不存在任何对象 $x \in \varnothing$（更精确地表示为对于任意 $x, x \in \varnothing$ 为假）

注 显然对于所有集合 X 有 $\varnothing \subset X$，该性质刻画了空集的特征。若两个集合 A 和 B 满足对于所有集合 X 有 $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ 和 $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$，则特别地有 $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ 和 $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$，即 $\mathrm{A} = \mathrm{B}$

公理 2.7 (幂集公理)

设 X 是一个集合，存在一个且仅一个集合 $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ 具有下列性质：$\mathcal{P}(\mathrm{X})$ 的元素是 X 的子集。

注 形式化记为：$\mathrm{Y} \in \mathcal{P}(\mathrm{X}) \Longleftrightarrow \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$

注从一个集合 X 过渡到集合 $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ 的运算容许构造越来越复杂的集合。此外，对于所有集合 X 有 $\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$，这表明对象的所有集合本身是另外一个集合的一个“元素”——最简单的方式是写出关系 $X \in \{X\}$

定义 2.24 (幂集)

称 $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ 为 X 的子集的集合或幂集 **(power set)**

2.2.1.3 序偶与 Descartes 积

注 在前面已经引进了符号“=”和“ϵ”用以构造数学关系，现在引进一个运算用以构造数学对象

定义 2.25

设两个数学对象 x 和 y，按书写次序构成第三个对象记为

$$(x, y)$$

称该数学对象为序偶（或有序对）**(ordered pair)**

公理 2.8

构成序偶的运算作为定义满足性质：

$$[(x, y) = (u, v)] \Leftrightarrow [(x = u) \wedge (y = v)]$$

注 特别地，仅当 $x = y$ 时有 $(x, y) = (y, x)$，这表明出现在序偶里的两个对象的前后次序是本质的

注 （序偶）

可以考虑序偶概念作为一个基本符号，同符号 $\vee, \neg, \tau, \square, =, \in$ 和字母一起使得能够用形式化语言写出数学。但是序偶概念还可以借助其他基本符号（或归结为基本符号的缩写）：只需取集合 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ 作为序偶 (x, y) 的定义，该集合的元素为集合 $\{x\}$ 与集合 $\{x, y\}$——事实上，如此定义的序偶满足给出序偶相等的条件的基本公理。

定义 2.26 (图)

若存在对象 x 和 y 使得 $z=(x,y)$，则称对象 z 为一个序偶。称 x 为 z 第一投影 **(first projection)**，而 y 为 z 的第二投影 **(second projection)**，记为

$$x=\mathrm{pr}_1(z),\quad y=\mathrm{pr}_2(z)$$

若 G 的所有元素都是序偶，则称 G 为一个图 **(map)**。这时存在用下列条件刻画其特征的两个集合 X 和 Y：关系 $x\in\mathrm{X}$（对应的 $y\in\mathrm{Y}$）等价于关系：存在 $z\in\mathrm{G}$ 使得 $x=\mathrm{pr}_1(z)$（对应的 $y=\mathrm{pr}_2(z)$），记为

$$\mathrm{X}=\mathrm{pr}_1(\mathrm{G}),\quad \mathrm{Y}=\mathrm{pr}_2(\mathrm{G})$$

♣

定义 2.27 (有限有序组)

给定三个对象 x,y,z，令

$$(x,y,z)=((x,y),z)$$

则称 (x,y,z) 为一个三元有序组。则成立

$$(x',y',z')=(x'',y'',z'')$$

当且仅当

$$x'=x'',\quad y'=y'',\quad z'=z''$$

事实上，所考虑的关系即为 $((x',y'),z')=((x'',y''),z'')$，这等价于 $(x',y')=(x'',y'')$ 和 $z'=z''$，随之等价于 $x'=x'',y'=y''$ 和 $z'=z''$
同样给定四个对象 x,y,z,t，令

$$(x,y,z,t)=((x,y,z),t)$$

称 (x,y,z,t) 为一个四元有序组，以此类推

♣

定义 2.28 (集合直积)

设 X 和 Y 为两个集合，可以证明存在一个以下列性质刻画其特征的集合 Z：$z\in\mathrm{Z}$ 成立当且仅当存在 $x\in\mathrm{X}$ 和 $y\in\mathrm{Y}$，使得 $z=(x,y)$，形式化记为

$$X\times Y:=\{(x,y)\mid(x\in X)\wedge(y\in Y)\}$$

称 Z 为 X 和 Y 的直积（直积又叫做 Descartes 积，以纪念 Descartes[a]，他曾与 Fermat[b]各自独立地通过坐标系引进了几何的分析语言），记为

$$\mathrm{Z}=\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$$

[a]笛卡儿 (Descartes,1596-1650) 法国哲学家，数学家与物理学家。他在科学思想方法和认识论方面作出了重大贡献。

[b]费马 (Fermat,1601-1665) 法国数学家，职业法学家。他在分析、解析几何、概率论、数论等一系列现代数学领域中都居于创始地位

♣

注 (集合直积)

由直积定义，一般来说，$X\times Y\neq Y\times X$。只有当 $X=Y$ 时等式才成立，这时我们把 $X\times X$ 简记作 X^2

注 Descartes 乘积的概念可以推广到多个集合的情形。设 X, Y, Z, T, $\cdots$ 为集合，定义

$$\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\times\mathrm{Z}=(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})\times\mathrm{Z};\quad \mathrm{X}\times\mathrm{Y}\times\mathrm{Z}\times\mathrm{T}=(\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\times\mathrm{Z})\times\mathrm{T};\quad\cdots$$

其中 $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\times\mathrm{Z}$ 的元素显然是已经定义的三元有序组，其中 $x\in\mathrm{X},y\in\mathrm{Y},z\in\mathrm{Z}$。同样 $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\times\mathrm{Z}\times\mathrm{T}$ 的元素显然是四元有序组，其中 $x\in\mathrm{X},y\in\mathrm{Y},z\in\mathrm{Z},t\in\mathrm{T}$

则记

$$\mathrm{X}^2=\mathrm{X}\times\mathrm{X},\quad \mathrm{X}^3=\mathrm{X}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X},\quad \mathrm{X}^4=\mathrm{X}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}$$

并以此类推

注 （集合直积）

注意关系 $(X\times Y)\times Z=X\times(Y\times Z)$ 为假。事实上左端的元素是形如 $((x,y),z)$ 的对象，而右端的元素是形如 $(x,(y,z))$ 的对象，两个序偶相等的规则不允许写出 $((x,y),z)=(x,(y,z))$，不管 x,y,z 是什么。但是在实际中，约定对 $((x,y),z)$ 和 $(x,(y,z))$ 不做任何区别且认为 $(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})\times\mathrm{Z}$ 和 $\mathrm{X}\times(\mathrm{Y}\times\mathrm{Z})$ 相等。对于这个约定严格地说是矛盾的，正如后面将引入的其他约定一样，不过使用该约定导致的矛盾 “无关紧要”。

定理 2.18 (集合直积包含关系)

设 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{X},\mathrm{Y}$ 为四个集合，则关系 $A\subset X$ 和 $B\subset Y$ 蕴涵 $A\times B\subset X\times Y$。另外若 A 和 B 都不为空集，则逆命题正确

证明 首先证逆命题，若 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\subset\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ 且 B 至少含有一个元素 b，则对于所有 $a\in\mathrm{A}$ 有 $(a,b)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$，则有 $(a,b)\in\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$，随之则有对于一个 $x\in\mathrm{X}$ 和一个 $y\in\mathrm{Y}$ 有 $(a,b)=(x,y)$，于是则有对于一个 $x\in\mathrm{X}$ 有 $a=x$，即 $A\subset X$。同理可证若 A 非空，则有 $B\subset Y$。

若 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$，则有 $A\times B=\varnothing$，反证：若 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\varnothing$ 为假，则 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\varnothing$ 至少含有一个序偶 (x,y)，从而 $x\in\mathrm{A}$ 并且 $y\in\mathrm{B}$，这就证明了 A 和 B 都不是空集，矛盾。由反证法有 $A\times B=\varnothing$，则有 $A\times B\subset X\times Y$

2.2.1.4 函数与映射

定义 2.29 (函数与图)

设集 $\mathrm{G},\mathrm{X},\mathrm{Y}$，若三元有序组 $f=(\mathrm{G},\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 满足下列条件一个：

(F1) $\mathrm{G}\subset\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$

(F2) $(\forall x\in\mathrm{X})(!\exists y\in\mathrm{Y}):(x,y)\in\mathrm{G}$

则称 $f=(\mathrm{G},\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 为函数 **(function)**。条件 (F1) 即 G 为一个图，称 G 为函数 f 的图，显然 f 的图 G 为形如 $(x,f(x))$ 的序偶的集，其中 $x\in\mathrm{X}$；由 (F2) 有 $\forall x\in\mathrm{X})(\exists z\in\mathrm{G}):x=\mathrm{pr}_1(z)$，则有

$$\mathrm{pr}_1(\mathrm{G})=\mathrm{X},\quad \mathrm{pr}_2(\mathrm{G})\subset\mathrm{Y}$$

若 x 为 X 的一个元素，称 Y 的唯一使得 $(x,y)\in\mathrm{G}$ 的元素 y 为函数 f 在 x 的值 **(value)**，记为

$$y=f(x)$$

♣

定义 2.30

设函数 $f=(\mathrm{G},\mathrm{X},\mathrm{Y})$，称 X 为 f 的出发集，称 Y 为 f 的到达集。设两个集合 X 和 Y，称以 X 为出发集以 Y 为到达集的函数为从 X 到 Y 内的映射 **(mapping)**

设 X 和 Y 为两个集合，则从 X 到 Y 内的所有映射的集合记为

$$Y^X$$

并称该集合为从 X 到 Y 内的映射的集合

♣

注 （映射）

由一个函数为一个三元有序组 $f=(\mathrm{G},\mathrm{X},\mathrm{Y})$，其中 $\mathrm{G}\subset\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$，注意到从 X 到 Y 内的映射的集合包含于 $\mathcal{P}(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})\times\{\mathrm{X}\}\times\{\mathrm{Y}\}$ 内。实际当 X 和 Y 给定时一般把一个从 X 到 Y 内的映射等同于它的图 $\mathrm{G}\subset\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$。按照这个约定，从 X 到 Y 内的映射的集合作为集合 $\mathcal{P}(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})$ 的一个子集出现

定理 2.19 (函数相等充分条件)

设二函数 $f=(\mathrm{G},\mathrm{X},\mathrm{Y}),f'=(\mathrm{G}',\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$，则有 $(\forall x\in\mathrm{X})(f(x)=f'(x))\Rightarrow(f=f')$

♡

证明 考虑两个三元有序组相等，等式 $f=f'$ 表示有 $\mathrm{G}=\mathrm{G}',\mathrm{X}=\mathrm{X}',\mathrm{Y}=\mathrm{Y}'$，由 $X=\mathrm{pr}_1(G)$ 和 $X'=\mathrm{pr}_1(G')$，则 $\mathrm{G}=\mathrm{G}'\Rightarrow\mathrm{X}=\mathrm{X}'$。若 $\mathrm{X}=\mathrm{X}',\mathrm{Y}=\mathrm{Y}'$，为了有 $\mathrm{G}=\mathrm{G}'\Rightarrow\mathrm{X}=\mathrm{X}'$ (即 $f=f'$)，显然只需 $\forall x\in\mathrm{X},f(x)=$

$f'(x)$

定义 2.31 (复合映射)

设三集合 X,Y,Z，$f=(\mathrm{G},\mathrm{X},\mathrm{Y}), g=(\mathrm{H},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$，分别为从 X 到 Y 内和从 Y 到内 Z 两个映射，定义从 X 到 Z 内的第三个映射

$$h=(\mathrm{K},\mathrm{X},\mathrm{Z}), x\in\mathrm{X}\mapsto h(x)=g(f(x))$$

记为

$$h=g\circ f$$

称 h 为 f 和 g 的复合 **(composite)**，仅当 f 到达集等于 g 出发集时，复合 $g\circ f$ 有定义。显然有 h 的图

$$K=\tau_{(x,z)}(\exists y\in\mathrm{Y}):((x,y)\in\mathrm{G})\wedge((y,z)\in\mathrm{H})$$

♣

定理 2.20 (交换图充要条件)

设三集合 X, Y, Z，给定两个映射 $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}, h:\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$ ，则以下条件等价：

a) 存在一个映射 $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{Z}$ 满足 $h=g\circ f$

b) $(\forall x',x''\in\mathrm{X}):[(f(x')=f(x''))\Rightarrow(h(x')=h(x''))]$

♡

证明 条件 a) 蕴涵条件 b)，因为若 a) 满足则有 $h(x')=g(f(x'))=g(f(x''))=h(x'')$

现证明 b) 蕴涵 a)。首先考察特殊情形：$f(\mathrm{X})=\mathrm{Y}$。为构造 g 构造其图 $\mathrm{G}\subset\mathrm{Y}\times\mathrm{Z}$：$\mathrm{G}=\tau_{(y,z)}\{(\exists x\in\mathrm{X})[(y=f(x))\wedge(z=h(x))]\}$（若假定问题已解决，而 G 是序偶 $(y,g(y))$ 的集合，由 $f(\mathrm{X})=\mathrm{Y}$ 可写出 $y=f(x)$，则有 $g(y)=g(f(x))=h(x)$，则 G 必然由形如 $(f(x),h(x))$ 的序偶组成，其中 x 遍历 X)。下验证如此得到的 G 为是一个映射 $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{Z}$ 的图且满足 $h=g\circ f$。

欲证 G 为一个映射的图，应当验证对于所有 $y\in\mathrm{Y}$，存在唯一的一个 $z\in\mathrm{Z}$ 使得 $(y,z)\in\mathrm{G}$。z 存在性显然：只需选择一个 x 使得 $y=f(x)$，再取 $z=h(x)$ 即可，下证唯一性；假定 G 含有 (y,z') 和 (y,z'')，则在 X 内存在元素 x' 和 x'' 使得 $y=f(x'),z'=h(x'),y=f(x''),z''=h(x'')$ ，于是 $f(x')=f(x'')$，再根据假设 b) 有 $h(x')=h(x'')$，即有 $z'=z''$，则 G 是一个从 Y 到 Z 内的一个映射 g 的图。

欲证 $h=g\circ f$，考虑一个 $x\in\mathrm{X}$，由 G 的构造，它含有序偶 $(f(x),h(x))$，从而 $h(x)=g(f(x))$，所要关系得证。下证在一般情形下 b) 蕴含 a)。

设 $\mathrm{Y}'=f(\mathrm{X})$，考虑从 X 到 Y′ 映射 f'：对于所有 $x\in\mathrm{X}$，令 $f'(x)=f(x)$。在上述证明中用 $\mathrm{X},\mathrm{Y}',\mathrm{Z},f',h$ 代替 $\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z},f,h$，则有 $f'(\mathrm{X})=\mathrm{Y}'$，根据上述结果存在一个从 Y′ 到 Z 内的一个映射 g' 使得 $h=g'\circ f'$，延拓 g' 成一个从 Y 到 Z 内的一个映射 g。对于所有 $x\in\mathrm{X}$ 有

$$h(x)=g'(f'(x))=g(f'(x))=g(f(x))$$

故 $h=g\circ f$

定义 2.32 (单射)

设映射 $f:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$，若

$$(\forall x',x''\in\mathrm{X})[(f(x')=f(x''))\Rightarrow(x'=x'')]$$

或

$$(\forall x',x''\in\mathrm{X})[(x'\neq x'')\Rightarrow(f(x')\neq f(x''))]$$

则称映射 $f:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ 为单射 **(injection/injective mapping)**

♣

定义 2.33 (恒等映射)

定义从 X 到 X 内的映射 $j_X : X \to X, j_X(x) = x$，经常用记号 id 代替 j_X，称该映射为 X 上恒等映射 **(identical mapping)**

在 $X \times X$ 里 j_X 的图为序偶 (x, x) 的集合，其中 $x \in X$，称该集合为乘积 $X \times X$ 的对角集 **(diagonal set)** ♣

注 （恒等映射）

根据定义，从 X 到 X 内的恒等映射显然为单射

定义 2.34 (典范单射)

设 X 和 Y 为两个集合且满足 $X \subset Y$。对于所有 $x \in X$，令 $j(x) = x$，称映射 $j : X \to Y$ 为从 X 到 Y 内的典范单射 **(canonical injection)**（形容词“典范的”用来表示这个特殊的单射是由“自然的”过程得到的，不牵扯任何特定元素的选择, 而只涉及它内在的已知条件，即 Y 和 Y 的一个子集 X） ♣

定义 2.35 (满射与双射)

若 $f(X) = Y$，亦即若对于所有 $y \in Y$ 至少存在一个 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$，则称映射 $f : X \to Y$ 为满射 **(surjection/surjective mapping)**，反之若对于所有 $y \in Y$ 至多存在一个 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$，称 f 为单射，若映射既是单射又是满射，亦即若对于所有 $y \in Y$ 存在一个且仅一个 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$，则称映射为双射 **(bijection/bijective mapping)**。可以总结为：

若对于所有 $y \in Y$ 至少存在一个 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$，则称映射 $f : X \to Y$ 为满射

若对于所有 $y \in Y$ 至多存在一个 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$，则称映射 $f : X \to Y$ 为单射

若对于所有 $y \in Y$ 存在唯一一个 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$，则称映射 $f : X \to Y$ 为双射 ♣

定理 2.21 (单射充要条件)

设 X 和 Y 为非空集合，f 为从 X 到 Y 内的一个映射，则下列性质等价：

a) f 为单射

b) 存在一个映射 $g : Y \to X$ 使得 $g \circ f$ 为从 X 到 X 内的恒等映射 ♡

证明 [证明一：] 考虑两个映射 $f : X \to Y, j_X : X \to X$，由定理 (2.20)，条件 $(\forall x', x'' \in X) : [f(x') = f(x'') \Rightarrow j_X(x') = j_X(x'') \Rightarrow x' = x'']$（$f$ 为单射）等价于存在一个映射 $g : Y \to X$, 使得 $j_X = g \circ f$

证明 [证明二：] 需要的映射 g 应当满足关系 $g(f(x)) = x$, 由于这是 g 应当满足的唯一条件, 当 y 不属于 $f(X)$ 时可以任意选择 $g(y)$; 反之, 如果 $y \in f(X)$, 因为 f 是单射的存在一个且仅一个 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$, 于是我们应该选择 $g(y) = x$.

定理 2.22 (满射充要条件)

设 $f : X \to Y$ 为一个映射，则以下条件等价：

a) f 为满射

b) 存在一个映射 $h : Y \to X$ 使得 $f \circ h$ 是从 Y 到 Y 上的恒等映射 ♡

证明 若 b) 满足，则对于所有 $y \in Y$ 有 $f(h(y)) = y$，于是所有 $y \in Y$ 都有形式 $f(x)$，即 f 为满射。

反之假定 f 为满射，对于每个 $y \in Y$，用 F_y 表示使得 $f(x) = y$ 的 $x \in X$ 的集合，这是 X 的非空子集。为构造所需映射 h，只需在每个集合 F_y 里随意选取一个元素记为 $h(y)$ 就定义了从 Y 到 X 内的一个映射 h，使得对于所有 $y \in Y$ 有 $f(h(y)) = y$

注 证明的第二部分似乎正确，但是数学上看远非完善，人们难以想象一个证明机在 F_y 里“随意选取”一个元素 ……，正确的证明借助 Hilbert 运算而得：令 $h(y) = \tau_x(f(x) = y)$ 就得到一个函数 $h(y)$。

注意问题归结为构造 X 的一个子集 S，使得对于每个 $y \in Y$，交集 $S \cap F_y$ 是恰好有一个元素的集合（于是

可以取这个唯一的元素为 $h(y)$)。构造一个这样的集合的可能性即为选择公理，首先人们可以证明它在逻辑上跟其他公理是相容的 (K.Gödel, 1939)，其次它在逻辑上是独立的 (P. Cohen, 1963)

注 该定理保证了 h 的存在性，但一般它不是唯一的

定理 2.23 (双射充要条件)

设 $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ 为一个映射，则以下条件等价：

a) f 为双射

b) 存在映射 $g,h:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ 使得

$$g\circ f=j_{\mathrm{X}},\quad f\circ h=j_{\mathrm{Y}}$$

此外若这些条件满足，则映射 g 和 h 唯一且相等

证明 性质 a) 和 b) 的等价性直接从定理 (2.21)(2.22) 得。为了证明存在仅一个函数 g，仅一个函数 h，只需证所有的函数 g 等于所有的函数 h。由定理 (2.20) 有 $(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)$，，这即为 $j_{\mathrm{X}}\circ h=h=g\circ j_{\mathrm{Y}}$，则显然有 $j_{\mathrm{X}}\circ h=h,g\circ j_{\mathrm{Y}}=g$

定义 2.36 (逆映射)

设 $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ 为一个双射，则存在唯一的一个映射 $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ 满足 $g\circ f=j_{\mathrm{X}},f\circ g=j_{\mathrm{Y}}$ 即 $g(f(x))=x,f(g(y))=y$ ，称 g 为 f 的逆映射 **(inverse mapping)**，记为

$$f^{-1}$$

显然对于所有 $x\in\mathrm{X}$ 和所有 $y\in\mathrm{Y}$ 有 $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ ，若 $\mathrm{G}\subset\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ 为 f 的图，则 f^{-1} 的图为满足 $(x,y)\in\mathrm{G}$ 的序偶 (y,x) 的集合

定理 2.24 (映射性质)

设 $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ 和 $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{Z}$ 为两个映射，则有：

1) 若 f 和 g 为单射，则 $g\circ f$ 也是单射

2) 若 f 和 g 为满射，则 $g\circ f$ 也是满射

3) 若 f 和 g 为双射，则 $g\circ f$ 也是双射且有 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

4) 若 f 为双射，则 f^{-1} 也是双射且有 $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

证明 若 f 和 g 为单射，由 g 为单射，关系 $g(f(x'))=g(f(x''))$ 蕴含 $f(x')=f(x'')$，又由 f 为单射，则有 $x'=x''$，则有 $g\circ f$ 为单射。

若 f 和 g 为满射，对于所有 $z\in\mathrm{Z}$，存在 $y\in\mathrm{Y}$ 使得 $z=g(y)$ 且存在 $x\in\mathrm{X}$ 使得 $y=f(x)$，由此有 $z=g(f(x))$，则 $g\circ f$ 为满射

由上述证明可知若 f 和 g 为双射，则 $g\circ f$ 也为双射且有

$$\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ\left(g^{-1}\circ g\right)\circ f=f^{-1}\circ j_{\mathrm{Y}}\circ f=f^{-1}\circ f=j_{\mathrm{X}},$$

即 $g\circ f$ 的逆映射必然为 $f^{-1}\circ g^{-1}$。

最后若 f 为双射，公式 $f^{-1}\circ f=j_{\mathrm{X}},\quad f\circ f^{-1}=j_{\mathrm{Y}}$ 由定理 (2.21)(2.22) 得 f^{-1} 同时为满射和单射且以 f 作为其逆映射

定义 2.37 (多元函数)

若函数出发集为两个集合的乘积或包含于一个这样的乘积，则称函数为两个变量的函数。若 f 为一个定义在乘积 $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ 的一个子集 A 上两个变量的函数，则将 f 在一个点 (x,y) 的值 $f((x,y))$ 记为 $f(x,y)$。类似地定义三个，四个，$\cdots$ 变量的函数，并且记为 $f(x,y,z),f(x,y,z,t)$ 等等

考虑映射

$$f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{U} \times \mathrm{V} \times \mathrm{W},$$

其中 X, Y, U, V, W 为任意集合，考虑投影

$$\mathrm{pr}_1 : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \times \mathrm{W} \to \mathrm{U}$$

$$\mathrm{pr}_2 : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \times \mathrm{W} \to \mathrm{V}$$

$$\mathrm{pr}_3 : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \times \mathrm{W} \to \mathrm{W}$$

由投影的定义有对于所有 $z \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \times \mathrm{W}, z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z), \mathrm{pr}_3(z))$。考虑映射

$$f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{U},$$

$$f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{V},$$

$$f_3 = \mathrm{pr}_3 \circ f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{W}.$$

显然对于任意 $x \in \mathrm{X}$ 和 $y \in \mathrm{Y}$ 有 $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$ 。在实际中记为

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

♣

定义 2.38 (同构)

设集合 M, M'，且定义了关系 R，若存在双射 $f : M \to M', m \mapsto m'$，且 $R(m_1, m_2) \Leftrightarrow R(m_1', m_2')$，则称 f 为同构映射 **(isomorphic mapping)**（一般简称同构 **(isomorphism)**），称集合 M 与 M' 关于关系 R 同构，记为 $M \cong M'$。特别地，若 $M = M'$，则称 f 为自同构 **(automorphism)**，M 关于关系 R 自同构

♣

定义 2.39 (同态)

设集合 M, M'，且定义了关系 R，若存在映射 $f : M \to M', m \mapsto m'$，且 $R(m_1, m_2) \Rightarrow R(m_1', m_2')$，则称 f 为从 M 到 M' 的同态映射 **(homomorphic mapping)**（一般简称同态 **(homomorphism)**）。特别地，若 $M = M'$，则称 f 为 M 的自同态映射（一般简称自同态 **(endomorphism)**）

♣

2.2.2 集上运算

2.2.2.1 集的交与并

注（族）

经常使用一个跟函数概念临近的族的概念，其直观定义为，给定一个集合 I，为了构造一个以 I 为指标集的族（或以 I 标记的族），对于每个 $i \in \mathrm{I}$ 给定一个依赖 i 的对象（没有预先明确在哪个集合里选取对应于 I 的元素的对象）。若记 x_i 为对应于 $i \in \mathrm{I}$ 的对象，则一般用记号

$$(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$$

表示所考虑的族。

数学上，以 I 标记的族为具有下面两个性质的一个图：有 $\mathrm{pr}_1(\mathrm{G}) = \mathrm{I}$，并且对于每个 $i \in \mathrm{I}$ 存在一个唯一的 $z \in \mathrm{G}$ 使得 $\mathrm{pr}_1(z) = i$（记为 $z = (i, x_i)$ 就回到了上面叙述的直观定义）。称指标集为空集的集族称为**空族**

定义 2.40 (族)

设 $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ 为一个族，若对于所有 $i \in \mathrm{I}$ 有 $x_i \in \mathrm{X}$，则称该族为集合 X 的元素的一个族（总存在一个这样的集合 X，例如 $\mathrm{pr}_2(\mathrm{G})$，其中 G 为所考虑族的图）

设 $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ 为一个族，若对每个 $i \in \mathrm{I}$ 有 $\mathrm{A}_i \subset \mathrm{X}$，则称族 $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ 为集合 X 的子集族

♣

定义 2.41 (交集与并集)

设 X 和 Y 为两个集合，定义

$$(z \in \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) := [(z \in \mathrm{X}) \wedge (z \in \mathrm{Y})]$$

称记为 $X \cap Y$ 的集合为 X 和 Y 的交集 (intersection/пересечение)。换言之，$\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ 由同时属于 X 和 Y 的对象组成

同理定义

$$(z \in \mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) := [(z \in \mathrm{X}) \vee (z \in \mathrm{Y})]$$

称记为 $X \cup Y$ 的集合为 X 和 Y 的并集 (union/объдинение)。换言之，$X \cup Y$ 由或属于 X，或属于 Y，或同时属于 X 和 Y 的对象组成

显然有关系

$$\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}, \quad \mathrm{Y} \subset \mathrm{X} \cup \mathrm{Y}$$

此外，设 Z 为任意一个集合，Z 包含于 X 并且包含于 Y，当且仅当对于所有的 $z \in \mathrm{Z}$ 有 $z \in \mathrm{X}$ 且 $z \in \mathrm{Y}$，即 $z \in \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$，即 $\mathrm{Z} \subset \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$。于是 $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ 为同时含于 X 和 Y 的最大集合；同理，Z 包含 X 并且包含 Y，当且仅当 $Z \supset X \cup Y$，于是 $X \cup Y$ 为同时包含 X 和 Y 的最小集合 ♣

注 (交与并)

具有所指出的性质的集合 $X \cap Y$ 和 $X \cup Y$ 的存在性直观上显然，但数学上看根本不是这样. $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ 的存在性借助于定理 (2.16)（把它用到 X 和关系 $x \in \mathrm{Y}$）。同理 $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}$ 的存在性若预先知道存在一个同时包含 X 和 Y 的集合可得（对于这个集合，以及关系 $z \in \mathrm{X}$ 或 $z \in \mathrm{Y}$，应用定理 (2.16)；但是同时包含 X 和 Y 的集合的存在性是一个公理。

定义 2.42 (不交)

对于两个集合 X, Y，若

$$\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing$$

则称 X 和 Y 不交 ♣

性质 (集合交与并性质)

集合的交与并有下列基本性质：

(1) (幂等律) $A \cap A = A = A \cup A$

(2) (交换律) $A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$

(3) (分配律) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) (结合律) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(5) (De Morgan 律) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C); A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

(6) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C); A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(7) $X \backslash (X \backslash A) = A \cap X$。特别地，若 $A \subseteq X$，则 $X \backslash (X \backslash A) = A$

(8) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

定义 2.43 (有限个集合并与交)

任给有限个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，称集合

$$\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i = \{x \mid \exists i \leqslant n, x \in A_i\}$$

为集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并

称集合

$$\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} A_i=\{x \mid \forall i\leqslant n, x\in A_i\}$$

为集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交

定义 2.44 (有限个集合并与交)

设 $\mathcal{A}=\{A_j\}_{j\in J}$ 为一个集族，称集合

$$\bigcup_{j\in J} A_j=\{x \mid \exists j\in J, x\in A_j\}$$

为 $\mathcal{A}$ 的并，有时也记为 $\cup\mathcal{A}$。显然，空族的并为空集；任何集族 $\mathcal{A}$ 都是它的并 $\cup\mathcal{A}$ 的子集族

设 $\mathcal{A}=\{A_j\}_{j\in J}$ 为一个指标集非空的集族，称集合

$$\bigcap_{j\in J} A_j=\{x \mid \forall j\in J, x\in A_j\}$$

$\mathcal{A}$ 的交，有时也记为 $\cap\mathcal{A}$。

注 (有限个集合交)

在给出一个集族 $\mathcal{A}=\{A_j\}_{j\in J}$ 的交的时，要求指标集 $J\neq\varnothing$，这一要求是合理的，因为若指标集 $J=\varnothing$，则有

$$\cap\mathcal{A}=\{X \mid \forall j\in\varnothing, X\in A_j\}=V$$

不是集合。若指标集 J 为空集，则 $\cap\mathcal{A}$ 没有意义

注 (有限个集合并)

当指标集 J 仅含有两个元素，比如记为 i 和 j 时，显然并集就是最初定义的集合 $\mathrm{A}_i\cup\mathrm{A}_j$，但在任意指标集 J 的情形下，并集的存在性为一个数学公理，我们承认它。反之，并集的唯一性可以借助公理 (2.6) 证明

性质 (集族交与并)

容易推广有限个集合的命题到集族的情况。设 A, X 为集合，$\{B_j\}_{j\in J}$ 是一集族并且指标集 J 非空，则有下列命题成立：

(1) (分配律) $A\cap\bigcup_{j\in J} B_j=\bigcup_{j\in J}(A\cap B_j)$; $A\cup\bigcap_{j\in J} B_j=\bigcap_{j\in J}(A\cup B_j)$

(2) (De Morgan 律) $X\backslash\bigcap_{j\in J} B_j=\bigcup_{j\in J}(X\backslash B_j)$; $X\backslash\bigcup_{j\in J} B_j=\bigcap_{j\in J}(X\backslash B_j)$

(3) $X\times\bigcap_{j\in J} B_j=\bigcap_{j\in J}(X\times B_j)$; $X\times\bigcup_{j\in J} B_j=\bigcup_{j\in J}(X\times B_j)$

证明 (仅证明分配律) 只需验证 $A\cap\bigcup_{j\in J} B_j$ 与 $\bigcup_{j\in J}(A\cap B_j)$ 包含相同的元素。若 $x\in A\cap\bigcup_{j\in J} B_j$，则 $x\in A$ 并且存在 $i\in J$ 使得 $x\in B_i$。于是 $x\in A\cap B_i$，则 $x\in\bigcup_{j\in J}(A\cap B_j)$。反之，若 $x\in\bigcup_{j\in J}(A\cap B_j)$，则存在 $i\in J$ 使得 $x\in A\cap B_i$。因此 $x\in A$ 并且 $x\in\bigcup_{j\in J} B_j$，所以 $x\in A\cap\bigcup_{j\in J} B_j$

定理 2.25

设 $\mathrm{A}=\bigcap_{i\in I}(\mathrm{A}_i)$，X 为一个集合，则有

$$(\forall i\in \mathrm{I})(\mathrm{A}_i\subseteq \mathrm{X})\Leftrightarrow(\mathrm{A}\subseteq \mathrm{X})$$

证明 假定 X 包含所有 A_i，若 $x\in\mathrm{A}$，则存在一个 i 使得 $x\in\mathrm{A}_i$，由 $\mathrm{A}_i\subset\mathrm{X}$，则 $x\in\mathrm{X}$，则有 $\mathrm{A}\subset\mathrm{X}$。反之，若 X 包含 A，为证明 X 包含所有 A_i，只需证对所有 i 有 $\mathrm{A}\supset\mathrm{A}_i$，而这是显然的

定理 2.26 (并集结合性)

设 $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 和 $(\mathrm{I}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为集族且

$$\mathrm{I}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{I}_\lambda$$

则有

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}_\lambda}\mathrm{A}_i\right)$$

♡

证明 事实上，令

$$\mathrm{B}_\lambda=\bigcup_{i\in\mathrm{I}_\lambda}\mathrm{A}_i$$

则 x 属于集族 $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 的并集当且仅当存在一个 $i\in\mathrm{I}$ 使得 $x\in\mathrm{A}_i$。由 I 为 I_λ 并集，则表明存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $i\in\mathrm{I}_\lambda$，于是存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $x\in\mathrm{B}_\lambda$。则集族 $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 的并集等于集族 $(\mathrm{B}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 的并集

注 该定理说明，计算一个并集可以把它的项分成若干组，再把每个组用其并集取代

定理 2.27

设 $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ 为一个映射，$(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 为 X 子集族，则有

$$f\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i\right)=\bigcup_{i\in\mathrm{I}}f(\mathrm{A}_i)$$

♡

证明 对于 $y\in\mathrm{Y}$，关系

$$y\in\bigcup_{i\in\mathrm{I}}f(\mathrm{A}_i)$$

等价于存在一个 $i\in\mathrm{I}$ 使得 $y\in f(\mathrm{A}_i)$，即存在一个 $i\in\mathrm{I}$ 和一个 $x\in\mathrm{A}_i$ 使得 $y=f(x)$，即存在一个 x 满足 $y=f(x)$ 和 $x\in\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$

定理 2.28

设 A 为一个非空族 $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 的交集，X 为一个集合，则有

$$(\forall i\in\mathrm{I})(\mathrm{X}\subseteq\mathrm{A}_i)\Leftrightarrow(\mathrm{X}\subseteq\mathrm{A})$$

♡

证明 证明方法同定理 (2.25)

定理 2.29 (交集结合性)

设 $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 和 $(\mathrm{I}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为集族，I,Λ 和诸 I_λ 非空，且有

$$\mathrm{I}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{I}_\lambda$$

则有

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}_\lambda}\mathrm{A}_i\right)$$

♡

证明 证明方法同定理 (2.26)

定理 2.30

设 $f: X \to Y$ 为一个映射，$(A_i)_{i\in I}$ 为 X 非空子集族，则有

$$f\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) \subset \bigcap_{i\in \mathrm{I}} f(\mathrm{A}_i)$$

若 f 为单射，则有

$$f\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \bigcap_{i\in \mathrm{I}} f(\mathrm{A}_i)$$

证明 设对于所有的 i 有 $x \in \mathrm{A}_i$，则有 $f(x) \in f(\mathrm{A}_i)$，定理第一部分得证。现假定 f 为单射，考虑 $f(\mathrm{A}_i)$ 的交集的一个元素 y。对于所有的 i 存在 A_i 的一个元素 x_i 使得 $y = f(x_i)$，但由于 f 为单射，仅存在唯一的 x 使得 $y = f(x)$，则对于所有的 i 必然有 $x = x_i$，从而对于所有的 i 有 $x \in \mathrm{A}_i, y$ 属于 A_i 的交集在 f 下的像，则有

$$\bigcap_{i\in \mathrm{I}} f(\mathrm{A}_i) \subset f\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right)$$

定理第二部分得证，因为在任何情形下已经有了反向的包含关系

注 若 f 不为单射，则上述定理的第二个结论可能是错误的。例如，取至少含有两个点 a 和 b 的集合作为 Y，取乘积 $\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}$ 作为 X，而取 pr_2 作为 f。设 A 为序偶 (a, y) 的集合，其中 $y \in \mathrm{Y}$，而 B 为序偶 (b, y) 的集合，其中 $y \in \mathrm{Y}$。显然有 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \varnothing$，故 $f(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \varnothing$；但是 $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{B}) = \mathrm{Y}$，故 $f(\mathrm{A})\cap f(\mathrm{B})$ 非空

定理 2.31

设 $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 为一个映射，$(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ 为 Y 非空子集族，则有

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \bigcap_{i\in \mathrm{I}} \overset{-1}{f}(\mathrm{A}_i)$$

证明 事实上，$x \in X$ 属于左端当且仅当 $f(x)$ 属于 A_i 的交集，即对于所有的 i 有 $f(x) \in \mathrm{A}_i$，即对于所有的 i 有 $x \in \overset{-1}{f}(\mathrm{A}_i)$，或有 $x \in \mathrm{X}$ 属于右端

注 同理有公式

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \overset{-1}{f}(\mathrm{A}_i)$$

定理 2.32

设 $(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ 为集合 X 非空子集族，则有

$$\mathrm{X} - \bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} (\mathrm{X} - \mathrm{A}_i); \quad \mathrm{X} - \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \bigcap_{i\in \mathrm{I}} (\mathrm{X} - \mathrm{A}_i)$$

证明 事实上，设 $x \in \mathrm{X}$，关系

$$x \in \mathrm{X} - \bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$$

等价于关系，对于所有 $i \in \mathrm{I}$ 有 $x \in \mathrm{A}_i$ 的否定，故等价于关系，存在一个 $i \in \mathrm{I}$, 使得 $x \notin \mathrm{A}_i$，随之等价于，存在一个 $i \in \mathrm{I}$, 使得 $x \in \mathrm{X} - \mathrm{A}_i$，故等价于

$$x \in \bigcup_{i\in \mathrm{I}} (\mathrm{X} - \mathrm{A}_i)$$

第一个公式得证。考虑到对于 X 的所有子集皆成立关系 $X - (X - A) = A$，则由第一个公式推导出第二个公式

2.2.2.2 集上等价关系

定义 2.45 (等价关系)

设 R 为涉及两个变量 xy 的关系，若满足条件：
a)（反身性）对于所有 x,R$\{x,x\}$ 是真的
b)（对称性）关系 R$\{x,y\}$ 蕴含关系 R$\{y,x\}$
c)（传递性）R$\{x,y\}$ 和关系 R$\{y,z\}$ 蕴含关系 R$\{x,z\}$
则称该关系为一个等价关系 **(equivalence relation)**。与此概念类似且在实际中更有用的是在一个集合 E 上的等价关系，即若满足下列条件：
(R0) 关系 R$\{x,y\}$ 蕴含 $x \in$ E 和 $y \in$ E
(R1) 对于所有 $x \in$ E, 关系 R$\{x,x\}$ 为真
(R2) 关系 R$\{x,y\}$ 蕴含关系 R$\{y,x\}$
(R3) R$\{x,y\}$ 和关系 R$\{y,z\}$ 蕴含关系 R$\{x,z\}$
则称该关系为集 E 上一个等价关系。若 R 为集 E 上等价关系，则称使得关系 R$\{x,y\}$ 为真的序偶 $(x,y) \in$ E $\times$ E 的集合 G $\subset$ E $\times$ E 为 R 的图。于是关系 R$\{x,y\}$ 为真的等价于 $(x,y) \in$ G, 条件 (R1) 表明 G 包含乘积 E $\times$ E 的对角集
考虑从 E 到一个任意集合 M 内的映射 f，取关系 $f(x) = f(y)$ 作为 R$\{x,y\}$，得到一个 E 上等价关系，称该等价关系为伴随于映射 f 的等价关系

例题 2.1 （等势关系等价性）

若存在从 X 到 Y 上的一个双射，称集合 X 等势于集合 Y。则关系 “X 等势于集合 Y” 是一个等价关系

解 考虑恒等映射 j_X 为双射，则 X 等势于 X；若 X 等势于集合 Y，则 Y 等势于集合 X（若 f 是从 X 到 Y 上双射，则 f^{-1} 是从 Y 到 X 上双射）；若 X 等势于 Y,Y 等势于 Z，则 X 等势于 Z（若 f 是从 X 到 Y 上双射，而 g 是从 Y 到 Z 上双射，则 $g \circ f$ 是从 X 到 Z 上双射）

定义 2.46 (等价类)

给定一个 $x \in$ E，称由使得

$$x \equiv y(\text{mod} \mathrm{R})$$

为真的 $y \in$ E 组成的集合为 x 模 R 的等价类 **(equivalence class)**，记为 $\mathrm{F}_x \subset \mathrm{E}$
在 E 的子集的集合 $\mathcal{P}(E)$ 里考虑 E 的子集 F 组成的集合，若 F 对于至少一个 $x \in$ E 有

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_x$$

其中 F_x 为 E 的不同元素的等价类的集合，称该集合为 E 关于等价关系 R 的商集 (quotient set)，记为 E/R

定理 2.33 (等价类不交性)

对于 $x,y \in$ E 有

$$x \equiv y(\text{mod} \mathrm{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{F}_x = \mathrm{F}_y$$

证明 显然有

$$x \equiv y(\text{mod} \mathrm{R}) \Longleftrightarrow y \in \mathrm{F}_x$$

假定 $x \equiv y(\text{mod} \mathrm{R})$，则关系 $z \in \mathrm{F}_y$ 亦即 $y \equiv z(\text{mod} \mathrm{R})$，蕴含 $x \equiv z(\text{mod} \mathrm{R})$，则有 $z \in \mathrm{F}_x$，则关系 $x \equiv y(\text{mod} \mathrm{R})$ 蕴含 $\mathrm{F}_y \subset \mathrm{F}_x$。同理有 $\mathrm{F}_x \subset \mathrm{F}_y$，即得 $\mathrm{F}_x = \mathrm{F}_y$。反之假定 $\mathrm{F}_x = \mathrm{F}_y$，由总有 $y \equiv y$ (mod R)，则 $y \in \mathrm{F}_y$，则有 $y \in \mathrm{F}_x$，则 $x \equiv y(\text{mod} \mathrm{R})$

定理 2.34 (典范映射存在性)

设 R 为集合 E 上等价关系，则存在一个集合 M 和一个映射 $f:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$ 有

$$x\equiv y(\mathrm{mod R})\Longleftrightarrow f(x)=f(y)$$

证明 由 $f(x)=\mathrm{F}_x$ 定义一个映射 $f:\mathrm{E}\to\mathrm{E/R}$,，即令每个 $x\in\mathrm{E}$ 对应它模 R 的等价类。由定理 (2.33) 有 $x\equiv y(\mathrm{mod R})$ 蕴含 $\mathrm{F}_x=\mathrm{F}_y$，这意味着 $x\equiv y(\mathrm{mod R})$

注称定义的映射 f 为从 E 到 E/R 上**典范映射 (canonical mapping)**。由 E/R 构造知道 f 显然为满射

注注意类 F_x 具有两个重要性质: F_x 的并集是整个 E (对于所有 $x\in\mathrm{E}$ 有 $x\in\mathrm{F}_x$)；另外，任意两个类 F_x 和 F_y 或者相等或者不交，因为若 $\mathrm{F}_x\cap\mathrm{F}_y$ 至少含有一个元素 z，则有关系 $x\equiv z(\mathrm{mod R})$ 和$y\equiv z(\mathrm{mod R})$ ，由此利用 (R2) 和 (R3) 即得关系 $x\equiv y(\mathrm{mod R})$ ，在定理证明中已经看到这蕴含 $\mathrm{F}_x=\mathrm{F}_y$

定理 2.35

设 E 为一个集合，R 为 E 上等价关系，p 为从 E 到 E/R 上典范映射，f 为从 E 到一个集合 X 内映射，则下列条件等价：

a) $x\equiv y(\mathrm{mod R})\Rightarrow f(x)=f(y)$

b) 存在一个映射 $\bar{f}:\mathrm{E/R}\to\mathrm{X}$ 使得 $f=\bar{f}\circ p$

且若条件满足，则映射 $\bar{f}$ 唯一。该映射为单射当且仅当 $x\equiv y(\bmod R)\Leftrightarrow f(x)=f(y)$ ，该映射为满射当且仅当 f 为满射

证明 由定理 (2.34)，存在一个满足所述条件的映射 $\bar{f}$ 的充要条件为关系 $p(x)=p(y)$ 蕴含关系 $f(x)=f(y)$，而关系 $p(x)=p(y)$ 等价于关系 $x\equiv y(\mathrm{mod R})$，则性质 a) 和 b) 等价

由 p 为满射有 $\bar{f}$ 的唯一性；设映射 g 和 h 使得 $f=g\circ p=h\circ p$，$\forall x\in\mathrm{E}:g(p(x))=h(p(x))$，则 g 和 h 在像 $p(\mathrm{E})$ 上重合，即在 E/R 上重合，即 $g=h$。由 $f(\mathrm{E})=\bar{f}(p(\mathrm{E}))=\bar{f}(\mathrm{E/R})$，则 f 为满射当且仅当 $\bar{f}$ 为满射；为了映射 f 为单射，由于 E/R 的所有元素有形式 $p(z)$，必须且只需 $\bar{f}(p(x))=\bar{f}(p(y))\Rightarrow p(x)=p(y)$，即 $f(x)=f(y)\Rightarrow x\equiv y(\mathrm{mod R})$

定理 2.36 (商集上代数运算)

设 X, Y, Z 为三个集合，R, S, T 分别为这些集合上对应的等价关系，f 为从 $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ 到 Z 内的一个映射，$x\to\bar{x},y\to\bar{y},z\to\bar{z}$ 为从 X, Y, Z 到 X/R, Y/S, Z/T 上典范映射，则下列命题等价：

a) $[(x'\equiv x''(\mathrm{mod R}))\wedge(y'\equiv y''(\mathrm{mod S}))]\Rightarrow f(x',y')\equiv f(x'',y'')\,(\mathrm{mod T})$

b) 存在一个映射 $\bar{f}:(\mathrm{X/R})\times(\mathrm{Y/S})\to(\mathrm{Z/T})$ 使得 $(\forall x\in\mathrm{X})(\forall y\in\mathrm{Y}):\bar{f}(\bar{x},\bar{y})=\overline{f(x,y)}$

若条件满足则映射 $\bar{f}$ 唯一

证明 考虑映射 $u:\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\to\mathrm{Z/T},u(x,y)=\overline{f(x,y)}$；再考虑映射 $v:\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\to(\mathrm{X/R})\times(\mathrm{Y/S}),v(x,y)=(\bar{x},\bar{y})$；再考虑映射 $v:\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\to(\mathrm{X/R})\times(\mathrm{Y/S}),v(x,y)=(\bar{x},\bar{y})$

命题归结为构造一个映射 $\bar{f}:(\mathrm{X/R})\times(\mathrm{Y/S})\to(\mathrm{Z/T})$ 使得 $u=\bar{f}\circ v$ 。应用定理 (2.34) 有 $\bar{f}$ 存在当且仅当

$$v(x',y')=v(x'',y'')\Rightarrow u(x',y')=u(x'',y'')$$

其中第一个关系表示为 $\overline{x'}=\overline{x''}$ 和 $\overline{y'}=\overline{y''}$，即 $x'\equiv x''(\mathrm{mod R})$ 和$y'\equiv y''(\mathrm{mod S})$，，第二个关系表示为 $f(x',y')\equiv f(x'',y'')\,(\mathrm{mod T})$

2.2.2.3 势与等势关系

定义 2.47 (等势)

若存在一个从集合 X 到集合 Y 上双射，称集合 X 等势 (equivalent) 于集合 Y，记为 $\mathrm{Eq}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ ♣

性质 (直积等势)

设 X,Y,X',Y' 为四个集合，X 等势于 Y 且 X' 等势于 Y'，则集合 $X\times X'$ 等势于集合 $\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}'$。同理从 X' 到 X 内的映射的集合 $X^{X'}$ 等势于从 Y' 到 Y 内的映射的集合 $Y^{Y'}$

证明 若 f 和 f' 分别是从 X 到 Y 上的和从 X' 到 Y' 上双射，则 $f\times f'$ 为从 $\mathrm{X}\times\mathrm{X}'$ 到 $\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}'$ 上双射

性质 (不交并集等势)

设 X,Y,X',Y' 为四个集合，X 等势于 Y 且 X' 等势于 Y'，若 X 和 X' 不交，同时 Y 和 Y' 不交，则 $\mathrm{X}\cup\mathrm{X}'$ 等势于 $\mathrm{Y}\cup\mathrm{Y}'$

证明 若 f 和 f' 分别是从 X 到 Y 上的和从 X' 到 Y' 上的双射，令

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & 若x\in\mathrm{X},\\ f'(x), & 若x\in\mathrm{X}',\end{cases}$$

则 g 是从 $\mathrm{X}\cup\mathrm{X}'$ 到 $\mathrm{Y}\cup\mathrm{Y}'$ 上双射

定理 2.37 (有限集映射性质)

设 X 为一个有限集，f 为从 X 到 X 内一个映射，则以下命题等价：

a) f 为单射

b) f 为满射

c) f 为双射 ♡

证明 只需证明 a) 和 b) 的等价性。设 f 为单射，f 为从 X 到 X 的一个子集 $f(\mathrm{X})$ 上的双射，则有 $f(\mathrm{X})$ 等势于 X，由 X 有限，则有 $f(\mathrm{X})=\mathrm{X}$，随之有 a) 蕴含 b)

假定 f 为满射，则存在从 X 到 X 内映射 h 使得 $f\circ h=j_{\mathrm{X}}$，后者为恒等映射；h 显然为单射，则根据 a) 蕴含 b)，h 为满射，则其为双射，则 f 是 h 的逆映射，因此为单射

定理 2.38 (Zermelo 定理)

给定两个集合，则下列二断言至少一个为真：

1)X 等势于 Y 的一个子集

2)Y 等势于 X 的一个子集 ♡

注 在后文引入与选择公理等价的 Zorn 引理后证明该定理的等价陈述，此处仅作辅助理解之用。证明见定理 (2.59)

定理 2.39 (Cantor-Bernstein 定理)

设 A 与 B 为两个任意集，若存在集 A 到集 B 的子集 B_1 上双射 f 及集 B 到集 A 的子集 A_1 上双射 g，则 A 与 B 等势 ♡

证明 不失一般性，设 A 与 B 不交。设 x 为 A 中的任一元素，令 $x=x_0$，并用下面的方法定义元素序列 $\{x_n\}$。设元素 x_n 已经确定，则当 n 为偶数时，取满足条件 $g(x_{n+1})=x_n$ 的 B 中元素作为 x_{n+1} (若这样的元素存在)，而当 n 为奇数时，则取满足条件 $f(x_{n+1})=x_n$ 的 A 中元素作为 x_{n+1} (若它存在)。于是有两种情况可能出现：

1° 对于某一个 n，满足上述条件的元素 x_{n+1} 不存在，称这样的数 n 为元素 x 的阶

2° 序列 $\{x_n\}$ 为无限的，这时称 x 为无限阶的元素

现在把 A 分成三类集：由偶数阶元素组成的集 A_E，由奇数阶元素组成的集 A_o 及由一切无限阶元素组成的集 A_I。对于集 B 也用类似的方法分成三类集。注意到 f 将 A_E 映到 B_o 上以及将 A_I 映到 B_I 上，而 g^{-1} 将 A_o 映到 B_E 上。则与 f 在 $A_E \cup A_I$ 上重合以及与 g^{-1} 在 A_o 上重合的一一映射 ψ 为全 A 到全 B 上的一一映射

注 该定理有时也称为 Schröder-Bernstein 定理，是 Cantor 于 1883 年提出的，但他并没有证明，他承诺在随后的论文中给出证明，然而他并没有兑现他的承诺。最先给出证明的是 Schröder（1896 年）和 Bernstein （1897 年)。

推论 2.1

给定两个集合，则下列两个断言至少一个为真：

1)X 等势于 Y 的一个子集

2)Y 等势于 X 的一个子集

并且若这两个断言同时为真，则 X 和 Y 等势

注 虽然 Cantor 在他最初的研究中就已经猜测到这里的结论，但是其第二部分在 1897 年才由 Bernstein 证明，而困难得多的第一部分到 1904 年才由 Zermelo 证明

注 在后文证明 Zermelo 的命题后即得该推论，这里仅作辅助理解之用

定义 2.48 (Cantor 定义)

定义满足下列条件的新的数学对象：两个集合 X 和 Y 等势当且仅当 $\mathrm{Card}(\mathrm{X}) = \mathrm{Card}(\mathrm{Y})$，称 $\mathrm{Card}(\mathrm{X})$ 为 X 的势 (**мощность**)

利用 Hilbert 运算表示为 $\mathrm{Card}(\mathrm{X}) = \tau_{\mathrm{Y}}\mathrm{Eq}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$

2.2.2.4 二元关系

定义 2.49 (二元关系)

给定集合 X，称所有从 $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ 到集合 X 自身内的映射为 X 上的二元运算 (**binary operation**)（或二元关系 (**binary relation/бинарное отношение**)），即令 X 的每个序偶 (x, y) 对应 X 的第三个元素，它按照预先给定规律依赖于 x 和 y

注 （符号约定）

在实际中表示运算经常使用 $(x, y) \to x + y$, 或 $(x, y) \to xy$, 或 $(x, y) \to x \wedge y$ 这类记号。在本节经常使用记号 $\perp$

定义 2.50 (结合性)

设 $(x, y) \to x \perp y$ 为 X 上二元关系，若给定 X 任意个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，对 n 逐步定义有

$$x_1 \perp x_2 \perp \cdots \perp x_n = (x_1 \perp x_2 \perp \cdots \perp x_{n-1}) \perp x_n$$

即

$$(\forall p \in \overline{1;n}) : x_1 \perp x_2 \perp \cdots \perp x_n = (x_1 \perp \cdots \perp x_p) \perp (x_{p+1} \perp \cdots \perp x_n)$$

则称该运算结合 (**associative**)，该运算具有结合性 (**associativity**)

注 （符号约定）

若把二元运算像乘法一样记作 $(x, y) \to xy$，对于所有 $x \in \mathrm{X}$ 和所有整数 $n \geqslant 1$，用公式 $x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n\text{个}}$ 定义 x 的 n 次幂，这时对于任何整数 $p, q \geqslant 1$ 有 $x^p x^q = x^{p+q}$。

类似地，若把二元运算记作 $(x,y)\to x+y$，对于所有 $x\in \mathrm{X}$ 和所有整数 $n\geqslant 1$，定义 $nx=\underbrace{x+\cdots+x}_{\text{n 个}}$ 为 n 项和。同理有 $px+qx=(p+q)x$

定义 2.51 (交换性)

设在集合 X 上二元运算 $(x,y)\to x\perp y$，若

$$\forall x,y\in X: x\perp y=y\perp x$$

则称二元运算交换 (commutative)，称二元运算具有交换性 (commutativity)

注 (符号约定)

在实际中，经常对非交换运算使用乘法记号，对交换运算使用加法记号

定义 2.52 (形式化记号)

设 $(x,y)\to x\perp y$ 为集合 X 上一个结合的与交换的二元运算，$(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ 为 X 元素的有限族。设 I 的元素个数是 n，把这些元素写成序列形式 $i_1,\cdots,i_n$，则 X 的元素 $x_{i_1}\perp x_{i_2}\perp\cdots\perp x_{i_n}$ 由于运算的结合性和交换性，不依赖将 I 的元素写成 n 项序列的方式，于是记为

$$\perp_{i\in \mathrm{I}}\, x_i=x_{i_1}\perp x_{i_2}\perp\cdots\perp x_{i_n}$$

若采用乘法记号则记为

$$\prod_{i\in \mathrm{I}} x_i=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$$

若采用加法记号则记为

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i=x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_n}$$

注 (符号约定)

缩写记号在实际中经常被修改，例如若 I 为整数 $\{1,\cdots,n\}$ 组成集合，常记为

$$x_1+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ 或 } \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$$

若 I 为整数序偶 (i,j) 的集合，其中 $1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q$，经常使用记号

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} x_{ij} \text{ 代替 } \sum_{(i,j)\in \mathrm{I}} x_{ij}$$

在这时运算交换性表达为

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} x_{ij}=\sum_{1\leqslant i\leqslant p}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant q} x_{ij}\right)$$

其中右端表示和 $(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1q})+\cdots+(x_{p1}+x_{p2}+\cdots+x_{pq})$

注 (符号约定)

记号 $\sum\limits_{i\in \mathrm{I}} x_i$ 中字母 i 不起作用，也不出现在结果中，它只是指出要进行的一个运算，即对于当 i 在 I 里变动时所得到的所有 x_i 的和，可以用未曾使用过的其它字母代替它

定义 2.53

设在集合 X 上二元运算 $(x,y)\to x\perp y$，$e\in \mathrm{X}$，若

$$\forall x\in X: x\perp e=e\perp x=x$$

则称 $e\in \mathrm{X}$ 为该二元运算中性元 **(neutral element)**。若使用乘法记号，则称中性元为单位元 **(identity** element)，若使用加法记号，则称中性元为零元 (zero element)

定理 2.40 (二元运算中性元唯一性)

若二元运算存在中性元，则中性元唯一

证明 反证法：设 e' 和 e'' 为中性元，由 $e' \perp x = x$ 有 $e' \perp e'' = e''$，由公式 $x \perp e'' = x$ 有 $e' \perp e'' = e'$，故有 $e' = e''$

例题 2.2 (二元运算)

设 $\mathbf{Q}^*$ 为非零有理数集，在 $\mathbf{Q}^*$ 上的乘法 $(x, y) \to xy$ 为一个二元运算（结合的、交换的，并且有中性元）；除法 $(x, y) \to x/y$ 也为二元运算（非交换、非结合，无中性元）。注意除法不是所有有理数集合 $\mathbf{Q}$ 上二元运算，因为商 x/y 当 $y = 0$ 时没有定义，除法不是定义在整个 $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ 上

定义 2.54 (对称元)

设在集合 X 上二元运算 $(x, y) \to x \perp y$ 有中性元 e，给定 $x \in \mathrm{X}$，若对 $x' \in \mathrm{X}$

$$x' \perp x = e\,(\text{ 对应的}, x \perp x' = e)$$

则称元素 $x' \in \mathrm{X}$ 为 x 左对称元 (left symmetry element)（对应地，称右对称元 (right symmetry element)），若

$$x' \perp x = x \perp x' = e$$

则称 $x' \in X$ 为 x 的对称元 (symmetry)。若存在 x 对称元，则称 x 为可对称元 (symmetrizable element)

若采用乘法记号，用逆元 (inverse element) 代替对称元，用可逆元 (invertible element) 代替可对称元，X 的可逆元 x 的逆元一般记为 x^{-1}；若采用加号记号，用相反元 (opposite element) 代替对称元并且把 $x \in X$ 的相反元记为 $-x$

例题 2.3 (对称元)

设 E 为任意集合，X 为从 E 到 E 内的所有映射的集合。从 $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ 到 X 内的映射 $(f, g) \to f \circ g$ 为 X 上的一个二元运算，其结合，有一个中性元（恒等映射 j_{X}）但不交换。

说一个元素 $f \in \mathrm{X}$ 有一个左逆元，即为存在一个映射 $g \in \mathrm{X}$ 使得 $g \circ f = j_{\mathrm{E}}$，这等价于 f 为单射；说一个元素 $f \in \mathrm{X}$ 有一个右逆元，即为存在一个映射 $g \in \mathrm{X}$ 使得 $f \circ g = j_{\mathrm{E}}$，这等价于 f 为满射。最后说 f 为可逆的，即指 f 为双射，对于所考虑运算，f 的逆元即为其逆映射。

定理 2.41 (幺半群可对称元存在充要条件)

设 $(x, y) \to x \perp y$ 为集合 E 上的一个结合的，并且有一个中性元的运算，则有：x 可对称等价于 x 有一个左对称元和一个右对称元；这时 x 有唯一对称元（它也为 x 的唯一的左对称元和唯一的右对称元）

证明 设 x' 为 x 一个左对称元，x'' 为 x 一个右对称元，则有

$$x' \perp x = x \perp x'' = e$$

其中 e 是 E 的中性元。由结合性有

$$x'' = e \perp x'' = (x' \perp x) \perp x'' = x' \perp (x \perp x'') = x' \perp e = x'$$

则 x 每一个左对称元等于它的每一个右对称元，这表明 x 有唯一的左对称元和唯一的右对称元，且它们相等，用 x' 表示它们的公共值则有

$$x' \perp x = x \perp x' = e$$

由此 x 可对称且以 x' 为其对称元

注 从此处至本节末尾假定在集合 E 上运算为结合的且有一个中性元 e。对于 E 的一个可对称元 x，则可以谈论它的对称元 x'

定理 2.42

若 $x \in \mathrm{E}$ 可对称，则其对称元 x' 也可对称，且 x' 对称元为 x。若 x 和 y 可对称，则 $x \perp y$ 可对称且有等式

$$(x \perp y)' = y' \perp x'.$$

♡

证明 $x' \perp x = x \perp x' = e$ 使得第一个断言平凡。为证明第二个断言，计算

$$(y' \perp x') \perp (x \perp y) = y' \perp (x' \perp x) \perp y = y' \perp e \perp y = y' \perp y = e,$$

$$(x \perp y) \perp (y' \perp x') = x \perp (y \perp y') \perp x' = x \perp e \perp x' = x \perp x' = e.$$

则有 $x \perp y$ 可对称的，并且其对称元恰是 $y' \perp x'$

注使用乘法记号定理陈述为：若 x 可逆，则其逆元 x^{-1} 可逆且 $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$ 。若 x 和 y 可逆，则 xy 可逆且有 $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

使用加法记号定理陈述为（另设运算交换）：若 x 有相反元，则其相反元 $-x$ 也有相反元且 $-(-x) = x$ 。若 x 和 y 都有相反元，则 $x+y$ 也有相反元且有 $-(x+y) = (-x)+(-y)$ ，一般把此式记为 $-(x+y) = -x-y$

定理 2.43 (可除性)

设 a 为 E 的一个可对称元，则

$$(\forall b \in \mathrm{E})(\exists! x \in \mathrm{E}) : (a \perp x = b)$$

♡

证明 关系 $a \perp x = b$ 蕴含 $a' \perp (a \perp x) = a' \perp b$, 即 $a' \perp b = (a' \perp a) \perp x = e \perp x = x$ 。从 $x = a' \perp b$ 得 $a \perp x = a \perp (a' \perp b) = (a \perp a') \perp b = e \perp b = b$

注 （记号约定）

使用乘法记号：若 a 可逆，则方程 $ax = b$ 有且仅有一个解 $x = a^{-1}b$

使用加法记号：若 a 有相反元，则方程 $a + x = b$ 有且仅有一个解 $x = b + (-a)$ ，还可以写成 $x = b - a$ (称为 b 和 a 之间的差)

2.2.3 序关系

2.2.3.1 偏序关系与有序关系

定义 2.55 (偏序关系)

设 M 为集合，φ 为 M 中（由某集 $R_\varphi \subset M \times M$ 确定的）二元关系，若关系 φ 满足下列条件：

1) 自反性：$a\varphi a$
2) 传递性：如果 $a\varphi b$ 且 $b\varphi c$, 那么 $a\varphi c$
3) 反对称性：如果 $a\varphi b$ 且 $b\varphi a$, 那么 $a = b$

则称关系 φ 为偏序关系 **(partial ordering relation)**，通常记为 $\leqslant$。记号 $a \leqslant b$ 表示序偶 (a, b) 属于对应的集 R_φ，称 a 不超过 b 或从属于 b。称在自身给定了某一偏序关系的集为偏序集 **(partially ordered set,[abbr]poset)**

♣

定义 2.56 (序同构)

设 M 与 M' 为两个偏序集，f 为 M 到 M' 内映射，若 $a \leqslant b (a, b \in M)$ 蕴涵 $f(a) \leqslant f(b)$ （在 M' 中），则称映射 f 为保序映射 (order-preserving mapping)。另外，若映射 f 为双射，而关系 $f(a) \leqslant f(b)$ 当且仅当 $a \leqslant b$ 时成立，则称 f 为偏序集 M 与 M' 的同构映射，这时称集 M 与 M' 同构

♣

定理 2.44 (序同构等价性)
序同构为等价关系 ♡

证明 显然，同构关系为自反的（任何部分有序集与自身同构），对称的（如果 X 与 Y 同构，则 Y 也与 X 同构）和传递的（两个集都与第三个集同构, 则它们也同构）

注 这表明偏序集可分解为同构集的类，称同构集的类为**序型 (order type)**。称同构的偏序集具有同一的序型

定义 2.57 (比较)
设 a 与 b 为偏序集 $(P,\leqslant)$ 的元素，若关系 $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 中任意一个都不成立，则称元素 a 与 b 不可比较 **(incomparable)**，反之称元素 a 与 b 可比较 **(comparable)**。若在偏序集 M 中没有不可比较的元素，则称集 M 有序 **(ordered)**（或线性有序 **(linearly ordered)**，全有序）
若 $A\subset P$ 且 A 中任意两个元素 a,b 可比较，即要么 $a\leqslant b$，要么 $b\leqslant a$，则称 A 为 $(P,\leqslant)$ 的链 **(chain)** ♣

定义 2.58 ()
有向集设 $(A,\geqslant$ 为任意偏序集，$a,b\in A$，若 $a\leqslant b$ 且 $a\neq b$，则引入符号 $<$ 并记关系为 $a<b$，称 a 小于 b 或 a 严格从属于 b，或者利用等价记号 $b\geqslant a$ 并称 b 不小于 a（大于 a，如果 $b\neq a$）或 b 在 a 后面。对于偏序集的任意两点 a,b，若可以找到它们后面的点 $c(a\leqslant c,b\leqslant c)$，称此集为有向集 **(directed set)** ♣

定义 2.59 (偏序集界)
设 $(A,\geqslant$ 为任意偏序集，$a,b\in A$，若由 $a\leqslant b$ 有 $b=a$，则称 a 为极大元 **(maximal element)**，若由 $c\leqslant a$ 有 $c=a$，则称 a 为极小元 **(minimal element)**
若 $\forall x\in A: x\leqslant a$，则称 a 为 A 的一个上界 **(upper bound)**，若 a 为 A 的上界并且任给 A 的上界 b，总有 $a\leqslant b$，则称 a 为 A 的上确界 **(supermum)**，记为 $a=\sup A$。若 $\forall x\in A: a\leqslant x$，则称 a 为 A 的一个下界 **(lower bound)**，若 a 为 A 的下界并且任给 A 的下界 b，总有 $b\leqslant a$，则称 a 为 A 的下确界 **(infimum)**，记为 $a=\inf A$ ♣

注 （偏序集界）

设 x 为偏序集 $(P,\leqslant)$ 任意元素，显然有 x 为 P 的空子集 $\varnothing$ 的一个上界（因为 $\varnothing$ 找不到元素大于等于 x）。则若上确界 $\sup\varnothing$ 存在，则 $\sup\varnothing$ 为 $(P,\leqslant)$ 中的极小元。反之，若 $(P,\leqslant)$ 有极小元 $\perp$，则 $\perp$ 为 $\varnothing$ 的上确界。由此可得，偏序集 $(P,\leqslant)$ 的空子集 $\varnothing$ 有上确界当且仅当 $(P,\leqslant)$ 有极小元。同理有 $(P,\leqslant)$ 的空子集有下确界当且仅当 $(P,\leqslant)$ 有极大元 $\top$ 且 $\inf\varnothing=\top$

定义 2.60 (完备格)
设偏序集 $(P,\leqslant)$ ，若 $(P,\leqslant)$ 的任子集（包括空集）都有上确界和下确界，则称 $(P,\leqslant)$ 为一个完备格 (complete lattice) ♣

定理 2.45 (偏序集为完备格充要条件)
设 $(L,\leqslant)$ 为偏序集，则以下命题等价:
1) $(L,\leqslant)$ 为完备格，即 L 的任意子集都有上确界和下确界
2) L 的任意子集有上确界
3) L 的任意子集有下确界 ♡

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然

(2) $\Rightarrow$ (3)。任给 L 的子集 A，令

$$A^{\downarrow}=\{x\in L \mid \forall a\in A, x\leqslant a\}$$

即 $A^{\downarrow}$ 为 A 的所有下界之集。由假设 $A^{\downarrow}$ 有上确界，不难验证该上确界即为 A 的下确界

(3) ⇒ (1)。假设 L 的任意子集有下确界，类似 (2) ⇒ (3) 可得 L 的任意子集也有上确界，因此 $(L,\leqslant)$ 为完备格

定理 2.46 (Tarski 不动点定理)

(Tarski[a]不动点定理) 若 $(L,\leqslant)$ 为完备格，并且 $f:(L,\leqslant)\longrightarrow(L,\leqslant)$ 保序，则 f 有不动点，即存在 $x\in L$ 使得 $f(x)=x$

[a]塔尔斯基 (Alfred Tarski,1902-1983) 波兰裔美国逻辑学家、语言学家和哲学家。代表作为《形式化语言中真这个概念》，完成于 1931 年，发表于 1933 年，该文开创了现代逻辑的语义学研究，奠定了他在逻辑学和语言学中的重要地位

证明 令

$$A=\{x\in L\mid x\leqslant f(x)\}$$

任给 A 的子集 K，令 $\sup K$ 表示 K 在 $(L,\leqslant)$ 中的上确界，因为

$$\sup K\leqslant\sup\{f(x)\mid x\in K\}\leqslant f(\sup K)$$

则有 $\sup K\in A$。这表明 $(A,\leqslant)$ 的任意子集有上确界，从而 $(A,\leqslant)$ 为完备格。任给 $x\in A$，由 f 保序知 $f(x)\leqslant f(f(x))$，于是 $f(x)\in A$。这说明把 f 的定义域和值域都限制在 A 上就可得到完备格 $(A,\leqslant)$ 到它自身的一个保序映射 $(A,\leqslant)\longrightarrow(A,\leqslant)$。令

$$B=\{x\in A\mid f(x)\leqslant x\}$$

同理可得 $(B,\leqslant)$ 为完备格。特别地，B 非空。显然，B 中每个元素都是 f 的不动点

2.2.3.2 基数

定义 2.61 (基数)

若存在一个集合 X 使得 $x=\mathrm{Card}(\mathrm{X})$，则称一个数学对象 x 为一个基数 **(cardinal number)**。对于下面出现的基数用符号 $0,1,2,\cdots$ 表示并以此类推：

$$0=\mathrm{Card}(\varnothing),1=\mathrm{Card}(\{\varnothing\}),2=\mathrm{Card}(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})$$

命题 2.1 (基数偏序性)

设 x 和 y 为两个基数，若存在集合 X 和 Y 使得 $x=\mathrm{Card}(\mathrm{X}),y=\mathrm{Card}(\mathrm{Y})$，则有偏序关系：X 等势于 Y 的一个子集

证明 利用推论 (2.39) 即知其为偏序关系，以下记为 $x\leqslant y$

定义 2.62 (基数乘积)

设 x 和 y 为二基数，令 $x=\mathrm{Card}(\mathrm{X}),y=\mathrm{Card}(\mathrm{Y})$，则称基数

$$xy=\mathrm{Card}(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})$$

为 x 乘 y 的乘积 **(product)**

注 （基数乘积）

显然把 X（对应的，Y）代以等势于 X（对应的，Y）的集合，乘积不变

性质 （基数乘积性质）

基数的乘积满足下列性质：

1)（对称性）$xy=yx$

2)（结合性）$x(yz)=(xy)z$

3)（零因子）$0x=0$

4)（酉性）$1x=x$

证明 （仅证明结合性）若 X, Y 和 Z 为三个集合，则有 $\mathrm{X}\times(\mathrm{Y}\times\mathrm{Z})$ 等势于 $(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})\times\mathrm{Z}$，令后者的每个元素 $((a,b),c)$ 对应前者的元素 $(a,(b,c))$ 即得

定义 2.63 (基数和)

设 x 和 y 为两个基数，选择两个不交的集合 X 和 Y 使得 $x=\operatorname{Card}(\mathrm{X}), y=\operatorname{Card}(\mathrm{Y})$，则称基数

$$x+y=\operatorname{Card}(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y})(\text{ 对于} \mathrm{X}\cap\mathrm{Y}=\varnothing)$$

为 x 与 y 的和 (sum)

♣

性质 （基数和性质）

基数的和满足下列性质：

1)（对称性）$x+y=y+x$

2)（结合性）$x+(y+z)=(x+y)+z$

3)（酉性）$0+x=x$

注 最后一个等式表示对于所有的集合 X, X 等势于 $X\cup\varnothing$，另外有 $X=X\cup\varnothing$

注 （基数和定义正确性）

上面所给出的 $x+y$ 的定义假定了总可以找到两个不交的集合 X 和 Y 使得 $x=\operatorname{Card}(\mathrm{X}), y=\operatorname{Card}(\mathrm{Y})$。为此令 $x=\operatorname{Card}(\mathrm{X}'), y=\operatorname{Card}(\mathrm{Y}')$, 取 $\mathrm{X}=\mathrm{X}'\times\{a\}$， $\mathrm{Y}=\mathrm{Y}'\times\{b\}$ ，其中 $a\neq b$，则 X 和 Y 分别等势于 X′ 和 Y′，并且是不交的，因为关系 $(x,a)=(y,b)$ 必然有 $a=b$

定义 2.64 (基数取幂)

设两个基数 x 和 y 并且令 $x=\operatorname{Card}(\mathrm{X}), y=\operatorname{Card}(\mathrm{Y})$，定义从 Y 到 X 内的所有映射的集合的基数

$$x^{y}=\operatorname{Card}\left(\mathrm{X}^{\mathrm{Y}}\right).$$

称该运算为基数的取幂

♣

性质 （基数取幂性质）

基数的取幂满足下列性质：

1)（分配性）$x^{y+z}=x^{y}\cdot x^{z}$

2)（分配性）$(xy)^{z}=x^{z}y^{z}$

3)$(x^{y})^{z}=x^{yz}$

4)（零因子）$x^{0}=1$

5)（酉性）$x^{1}=x$

证明 （仅证明性质一）令 $x=\operatorname{Card}(\mathrm{X}), y=\operatorname{Card}(\mathrm{Y}), z=\operatorname{Card}(\mathrm{Z})$ 且假定 Y 和 Z 不交，则有 $y+z=\operatorname{Card}(\mathrm{Y}\cup\mathrm{Z})$，仅需证 $X^{Y\cup Z}$ 和$X^{Y}\times X^{Z}$ 等势，即构造从第一个集合到第二个集合上的一个双射 f。

设 u 为第一个集合的一个元素，即从 $\mathrm{Y}\cup\mathrm{Z}$ 到 X 上的一个映射，设 u_{Y} 和 u_{Z} 为 u 分别在 Y 和 Z 上的限制，令 $f(u)=(u_{\mathrm{Y}},u_{\mathrm{Z}})$ 利用 Y 和 Z 不交容易验证 f 为双射

注考虑两个元素的一个集合如 $\mathrm{A}=\{0,1\}$，设 f 为从集合 X 到 A 内映射，显然 f 由使得 $f(x)=0$ 的 x 集合 $f^{-1}(0)\subset\mathrm{X}$ 唯一决定，则有如此定义的从 A^{x} 到 $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ 的映射 $f\rightarrow f^{-1}(0)$ 为双射，则有 $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(\mathrm{X}))=2^{\operatorname{Card}(\mathrm{X})}$

定理 2.47 (Cantor 定理一般形式)

任意集合 X 与其幂集 $\mathcal{P}(X)$ 之间不存在双射

♡

证明 令 φ 为 X 到 $\mathcal{P}(X)$ 一个双射。观察 $x\in X$ 而不属于对应的子集 $\varphi(x)$ 的所有元素 x 组成的集 $Z: Z=\{x\in X\mid x\notin\varphi(x)\}$. 。欲证 Z 不对应于任何 X 的元素，亦即对任何 $z\in X$ 都有 $Z\neq\varphi(z)$。假设对某个 z 有

$Z=\varphi(z)$，则有 $z\in Z\Leftrightarrow z\notin\varphi(z)\Leftrightarrow z\notin Z$，注意到 $\varphi(z)=Z$，该矛盾表明集 Z 不对应于任何元素 z 并且 φ 不为双射

注 对于空集 X，定理及其证明仍然正确（在这种情形下 $\mathcal{P}(X)$ 仅有一个元素）

注 定理表明对于所有基数 x 有 $x<2^x$（即 $x\leqslant 2^x$ 且 $x\neq 2^x$），特别地，若 X 为一个集合，则 $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ 不等势于 X

定义 2.65（集族直积基数乘积与基数和）

设 $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 为一个集族，其元素为所有的族 $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$，对于所有 $i\in\mathrm{I}$ 有 $x_i\in\mathrm{X}_i$，称该集族为 X_i 的直积，记为

$$\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_i$$

设 $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 是基数的任意一个族，对于每个 $i\in\mathrm{I}$ 选择一个集合 X_i 使得 $x_i=\operatorname{Card}(\mathrm{X}_i)$，定义

$$\prod_{i\in\mathrm{I}}x_i=\operatorname{Card}\left(\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_i\right)$$

称该基数为基数族 $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 的乘积

同样由关系

$$\sum_{i\in\mathrm{I}}x_i=\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_i\right)$$

定义基数族 $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ 的和，显然要选择 X_i 使得它们两两是不交的 ♣

注（符号约定）

设 $\forall i\in\mathrm{I}:x_i=1$，则可以对每个 $i\in\mathrm{I}$ 取 $\mathrm{X}_i=\{i\}$，这些集合的并为 I，则有

$$\operatorname{Card}(\mathrm{I})=\sum_{i\in\mathrm{I}}x_i$$

直观地说这表明所有的基数是其每个项（一般有无限多个）都等于 1 的一个和

定理 2.48（有限集性质）

设 X 为一个集合，则以下性质等价：

a) 包含于 X 且与 X 等势的集合只有 X 本身

b) $\operatorname{Card}(\mathrm{X})\neq\operatorname{Card}(\mathrm{X})+1$ ♡

证明 假定 $\operatorname{Card}(\mathrm{X})=\operatorname{Card}(\mathrm{X})+1$，设 a 为一个不属于 X 的元素，则存在从 $\mathrm{X}\cup\{a\}$ 到 X 上双射 f，这时 X 在 f 下的像显然等势于 X 并且严格包含于 X。

反之假定 X 等势于严格包含于 X 内的一个集合 X'，则由 $\mathrm{X}=\mathrm{X}'\cup(\mathrm{X}-\mathrm{X}')$ 有 $\operatorname{Card}(\mathrm{X})=\operatorname{Card}(\mathrm{X}')+\operatorname{Card}(\mathrm{X}-\mathrm{X}')$，但是由 $\mathrm{X}-\mathrm{X}'$ 非空，则 $\operatorname{Card}(\mathrm{X}-\mathrm{X}')\geqslant 1$，则有

$$\operatorname{Card}(\mathrm{X})\geqslant\operatorname{Card}(\mathrm{X})+1\geqslant\operatorname{Card}(\mathrm{X})$$

由定理 (2.39) 即得 $\operatorname{Card}(\mathrm{X})=\operatorname{Card}(\mathrm{X})+1$

注 若一个集合具有该定理中的性质 a）和 b)，则称集合为有限集，反之称集合为无穷集。同理，若 $x\neq x+1$，则称基数 x **有限 (finite)**，若 $x=x+1$，则说基数**无穷 (infinite)**。称有限基数为**自然数 (natural number)**，称无穷基数为**超限数 (transfinite number)**

2.2.4 自然数

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,alles andere ist Menschenwerk

（上帝创造了自然数，其它一切都是人的作品）

Leopold Kronecker 克罗内克

2.2.4.1 自然数集与可数集

注 （无穷集存在性）

由上文考虑，有限集的存在性变得显然，因为

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \cdots$$

都为有限集。反之，无穷集存在性不是明显的，这是一个数学公理

定理 2.49 (无穷集性质)

设 X 为一个无限集，则所有有限集等势于 X 的一个子集 ♡

证明 命题为归结：对于所有的有限基数 y 和所有的无限基数 x 都有 $y \leqslant x$，而若不成立，则有 $y \geqslant x$，则将有 x 有限

定理 2.50 (自然数集性质)

下列命题成立：

1) 存在且仅存在一个集合 N，使得关系 $x \in \mathrm{N}$ 等价于关系 x 为一个自然数

2) 集合 N 为无穷集 ♡

证明 （非严格证明）根据公理 (2.6) 有 N 唯一性显然。下证 N 存在性：若选择一个无穷基数 a（根据无限集存在性这是可能的），则所有的自然数 x 满足关系 $x < a$，于是仅需证明对于所有基数 a，满足 $x < a$ 的基数为一个集合的元素（承认该断言，令 $a = \mathrm{Card}(\mathrm{A}), x \leqslant a$ “双射对应”于关系 $\mathrm{Eq}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ 在 $\mathcal{P}(\mathrm{A})$ 内的等价类；这就似乎说明了为什么这些 x 在一个集合里）

设 N 有限，对每个 $n \in \mathrm{N}$ 选择一个集合 X_n 使得 $\mathrm{Card}\,(\mathrm{X}_n) = n$，由 N 和每个 X_n 有限，则集合

$$\mathrm{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{X}_n$$

也有限，而由于 X_n 包含于 X 内，则若 N 有限，就存在一个自然数 $x = \mathrm{Card}(\mathrm{X})$ 使得对于所有有限的 n 有 $n \leqslant x$；这时由于 x 有限，则 $x+1$ 也有限，故有 $x+1 \leqslant x$，又由 $x \leqslant x+1$，则有 $x = x+1$，这与 x 有限相矛盾

注 这表明两个断言等价：存在一个无穷集；存在一个集合，其元素是所有自然数

定义 2.66 (可数集)

称基数 $\mathrm{Card}(\mathbf{N})$ 为可数势（可数基数 (**countable cardinal number**)）。若一个集合等势于 $\mathbf{N}$，亦即存在一个从自然数集合到 X 的元素的集合上的双射，$n \to x_n$，则称该集合为可数集 (**countable set/счётное множество**)，反之称不可数集 (**uncountable set/несчётное множество**) ♣

定义 2.67 (序列)

若一个族的指标集的元素为自然数时，称该族为一个（整序）序列 (**sequence**)，经常记为

$$(x_n)_{n \geqslant 1}$$

给定一个集合 X 的元素的一个序列归结为选择 X 的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$。即给定从自然数的集合到 X 内的一个映射 $n \to x_n$ ♣

定理 2.51

所有 0 和 1 的无穷序列的集不可数 ♡

证明 （Cantor 对角线证明法 (канторов диагональный процесс)）设这个集可数，则所有 0 和 1 的无穷序列应能编号：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$。下令 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ 为无穷二维表的行：

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_0 & = & \underline{\alpha_{00}} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \cdots \\ \alpha_1 & = & \alpha_{10} & \underline{\alpha_{11}} & \alpha_{12} & \cdots \\ \alpha_2 & = & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \underline{\alpha_{22}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

其中 α_{ij} 是第 i 个序列 (α_i) 的第 j 个元素。观察对角线上序列：元素为 $\alpha_{00}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots$（对角序列的第 i 元素是 α_{ii}，它等于第 i 个序列的第 i 个元素）。由对角序列可得序列 $\beta_i = 1 - \alpha_{ii}$ 。序列 β 不同于 α_i（有不同的第 i 项），则 β 不能出现在表中：对任何 i 均有 $\beta \neq \alpha_i$。而假设是所有 0 和 1 的无穷序列都出现在 α_i 中，于是矛盾，这表明所有的 0 和 1 的序列集 $2^{\mathbb{N}}$ 是不可数的

定义 2.68 (连续统基数)

$\mathcal{P}(\mathbf{N})$ 的基数

$$2^{\operatorname{Card}(\mathbf{N})}$$

严格大于 $\operatorname{Card}(\mathbf{N})$，称该基数为连续统势 **(мощность континуума)**（连续统基数 **(cardinal number of the continuum)**）

定理 2.52 (可数集性质)

下列命题正确：

(a) 可数集的任意子集必为有限的或可数的

(b) 任何无穷集都有一个可数子集

(c) 有限或可数集族的有限或可数的并集为有限的或可数的

证明 (a) 令 B 为可数集 $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ 的子集。删去序列 $a_0, a_1, \ldots$ 中不属于 B 的元素，余下的元素构成一个有限序列（B 是有限的）或一个无限序列（B 是可数的）

(b) 令 A 为无限集，则 A 非空；令 b_0 为 A 的某个元素，由 A 无限，则它必含有其他元素。令 b_1 为其中之一（也就是 $b_1 \in A$, $b_1 \neq b_0$ ）。既然 A 不只有两个元素，就可以选择不同于 b_0 和 b_1 的 b_2 等等。于是得到了一个序列 $b_0, b_1, \ldots$ (既然 A 为无限集，对每一个 i 就能找到一个新元素 $b_i \in A$)。于是集 $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$ 是 A 的一个可数子集。(注意到即便 A 是可数的, B 也可能是 A 的一个真子集)

(c) 考虑可数集 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ 的一个可数族。既然 A_i 为可数的，则 A_i 的元素能排成一个序列 $A_i = \{a_{i0}, a_{i1}, \ldots\}$。写下所有这些序列，得到一个表

$$\begin{array}{ccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

该表可转换为一个序列，可按对角线取得

$$a_{00}, \quad a_{01}, a_{10}, \quad a_{02}, a_{11}, a_{20}, \quad a_{03}, a_{12}, a_{21}, a_{30}, \ldots$$

若所有的 A_i 不交，则该序列就给出了 $\mathbb{N}$ 与所有 A_i 的并之间的一个一一对应，若 A_i 不是不相交的，则必须删除重复的元素。若只有有限多个集（或者有些集是有限的），则序列中的某些元素不出现，而剩余的元素构成了有限或可数集

注 其中 b) 和 c) 的证明使用了选择公理

例题 2.4 单位正方形（及其内部）与单位闭区间的基数相同

解 正方形的点由它的坐标确定，则单位正方形与数对 $\langle x, y\rangle$ 构成的集 $[0,1] \times [0,1]$ 有相同的基数（其中 $x, y \in$

$[0,1]$)。已经知道 $[0,1]$ 的元素能够替换成 0 和 1 的序列，余下的就是注意到序列对

$$\langle x_0x_1x_2\ldots,y_0y_1y_2\ldots\rangle$$

能够映射到序列

$$x_0y_0x_1y_1x_2y_2\ldots$$

该映射提供了序列与序列对之间的双射

注 德国数学家 Georg Cantor 创立了集合论，他在 1877 年证明了该结论，并感到十分惊异。Cantor 给 Dedekind 写信说他很想知道是否不同维数的空间会有同样多的点，于是写道："看起来这个问题的回答是肯定的，虽然若干年来我一直有不同的看法"(1877 年 6 月 20 日)

Dedekind 回答说 Cantor 的结果并没有使维数的概念失去意义，它只是说明必须将注意限制在连续的一一对应之上，这样就能区别不同维数的空间了。这个很不寻常的猜想被证明是真的，第一个尝试的证明（还有 Cantor 在一篇文章中的证明）包含着错误。直到 30 年以后 Brouwer 才给出了正确的证明

注 应当注意到对一条线段和一个正方形来证明是简单的，问题出在高维。注意到存在一个连续的映射 $\pi:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$，它的值域是 $[0,1]\times[0,1]$，该映射被称为"Peano 曲线"

2.2.4.2 有理整数

定义 2.69 (有理整数)

在集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上定义一个等价关系 R，称自然数的两个序偶 (x,y) 和 (x',y') 为模 R 等价的，当且仅当

$$x+y'=x'+y$$

显然，R 为一个等价关系。定义

$$\mathbb{Z}=(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\mathrm{R}$$

称 $\mathbb{Z}$ 的所有元素为有理整数 **(rational integer)** ♣

注 下面在有理整数上定义代数运算，并且指出如何把自然数看作特殊的有理整数

定义 2.70 (有理整数和与有理整数乘积)

设 D 为 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Z}$ 上的典范映射，定义两个有理整数 z 和 z' 的和与乘积：取 $(x,y),(x',y')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 满足

$$z=\mathrm{D}(x,y),\quad z'=\mathrm{D}\left(x',y'\right)$$

今

$$z+z'=\mathrm{D}\left(x+x',y+y'\right)$$
$$zz'=\mathrm{D}\left(xx'+yy',xy'+x'y\right)$$

♣

性质 下列断言成立：

(1)（加法交换性与结合性）$(\forall x,y,z\in\mathbb{Z}):(x+y=y+x)\wedge(x+(y+z)=(x+y)+z)$

(2)（零元存在唯一性）$\exists!0\in\mathbb{Z}(\forall x\in\mathbb{Z}):x+0=x$

(3)（可减性）$(\forall x,y\in\mathbb{Z})(\exists z\in\mathbb{Z}):x+z=y$

(4)（乘法交换性和结合性）$(\forall x,y,z\in\mathbb{Z}):(xy=yx)\wedge(x(yz)=(xy)z)$

(5)（单位元存在唯一性）$(\exists!1\in\mathbb{Z})(\forall x\in\mathbb{Z}):1x=x$

(6)（乘法对加法分配律）$(\forall x,y,z\in\mathbb{Z}):x(y+z)=xy+xz$

证明 （仅证明 5,6）在 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 里选择序偶使得

$$x=\mathrm{D}\left(x',x''\right),\quad y=\mathrm{D}\left(y',y''\right),\quad z=\mathrm{D}\left(z',z''\right)$$

于是有

$$
\begin{aligned}
x(y+z) &= \mathrm{D}\left(x', x''\right) \cdot \mathrm{D}\left(y'+z', y''+z''\right) \\
&= \mathrm{D}\left[x'\left(y'+z'\right)+x''\left(y''+z''\right), x'\left(y''+z''\right)+x''\left(y'+z'\right)\right]
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
xy+xz &= \mathrm{D}\left(x'y'+x''y'', x'y''+x''y'\right)+\mathrm{D}\left(x'z'+x''z'', x'z''+x''z'\right) \\
&= \mathrm{D}\left(x'y'+x''y''+x'z'+x''z'', x'y''+x''y'+x'z''+x''z'\right)
\end{aligned}
$$

比较所得结果就得到 (5)(6)

定理 2.53 (自然数映到有理整数)

定义从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Z}$ 内的单射 $n \to \mathrm{D}(n,0)$，则对于任意自然数 x 和 y 有

$$
\mathrm{D}(x,y) = \mathrm{D}(x,0) - \mathrm{D}(y,0)
$$

♡

证明 事实上有 $\mathrm{D}(x,y)+\mathrm{D}(y,0)=\mathrm{D}(x+y,y)$，则问题归结为验证 $\mathrm{D}(x+y,y)=\mathrm{D}(x,0)$，即 $(x+y)+0=y+x$，而这是显然的。

注由该定理，此后规定

$$
(\forall x) \in \mathbb{N} : \mathrm{D}(x,0) = x
$$

定理的关系一般记为

$$
\mathrm{D}(x,y) = x - y
$$

这就表明所有的有理整数为两个自然数的**差 (difference/разность)**

定义 2.71

由于定义在自然数上的与定义在有理整数上的代数运算相容，把 $\mathbb{N}$ 看作 $\mathbb{Z}$ 的子集是合理的

♣

定义 2.72 (相反数)

设 z 为一个有理整数，称有理整数 $0-z$ 为 z 的相反数 **(opposite number)**，记为 $-z$，显然满足

$$
z + (-z) = 0
$$

♣

定义 2.73 (非负整数与正整数)

若 $z=x-y$，则显然有 $-z=y-x$。对于 $z=x-y, x, y \in \mathbb{N}$，若 $x \geqslant y$，则存在一个 $z' \in \mathbb{N}$ 使得 $x=y+z'$，由 $\mathbb{Z}$ 内减法唯一性，这时 $z=z'$，则有 z 为自然数；若 $y \geqslant x$，令 $-z=y-x$ 则得 $-z \in \mathbb{N}$。因此对于所有有理整数 z 有，要么 $z \in \mathbb{N}$，要么 $-z \in \mathbb{Z}$

则称有理整数 $z \in \mathbb{N}$ 为非负整数 **(non-negative integer)**，称其余的有理整数为非正整数 **(non-positive integer)**。另外，记 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}/\{0\}$，则称有理整数 $z \in \mathbb{N}^*$ 为正整数 **(positive integer)**（对称地，有负整数 **(negative integer)**）

若 x 和 y 为两个有理整数，当 $y-x$ 非负时记为 $x \leqslant y$，则 $z \in \mathbb{Z}$ 为非负的一般记为

$$
z \geqslant 0
$$

♣

性质 在集合 $\mathbb{Z}$ 里，关系 $\leqslant$” 的下列性质成立：

(1)$(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$

(2)$(x = y) \Leftrightarrow (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x)$

(3)$(\forall x, y) : (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$

(4)$(x \leqslant y) \Leftrightarrow (x + z \leqslant y + z)$

(5)$(z > 0) \wedge (x \leqslant y) \Leftrightarrow (xz \leqslant yz)$

$(z<0)\wedge(x\leqslant y)\Leftrightarrow(xz\geqslant yz)$

2.2.4.3 良基与归纳法

定理 2.54 (良基性充要条件)

设偏序集 X，则以下命题等价：

(a) （最小元性质）集 X 的任何非空集都有一个极小元

(b) （有限递降性）集 X 中不存在严格递减元素无穷序列 $x_0>x_1>x_2>\cdots$.

(c) （归纳法原理）对 X 下面的归纳原理为真：若对每个 $x\in X$，性质 $A(y)$ 对所有的 $y<x$ 都蕴含 $A(x)$，则 $A(x)$ 对所有的 $x\in X$ 都成立：

$$(\forall x)\{\forall y[(y<x)\Rightarrow A(y)]\Rightarrow A(x)\}\Rightarrow\forall xA(x)$$

♡

证明 首先证明性质 (a) 和 (b) 等价。若 $x_0>x_1>x_2>\cdots$ 为无穷递减序列，则它的值的集没有极小元，则 (a) 蕴涵 (b)。反之若 B 为没有极小元素的非空集，则可如下构造一个无穷递减序列：取任意元素 $b_0\in B$，由所设它不为极小元，则可找到一个 $b_1\in B$ 有 $b_0>b_1$，同理存在 $b_2\in B$ 有 $b_1>b_2$ 等，元素 $b_0,b_1,\ldots$ 形成一个无穷递减序列。

现由任意集存在极小元导出归纳原理，令 $A(x)$ 为任意性质，它对集 X 的某个元素不真。考察没有性质 A 的所有元素的非空集 B。令 x 为 B 的极小元，则 B 中不会有更小的元素，故所有 $y<x$ 的元素 y 都有性质 A。由归纳假设 $A(x)$ 必为真，矛盾。

再由归纳原理证明任何子集都含有极小元。令 B 为没有极小元的子集，由归纳原理来证明 B 为空集。取性质 $x\notin B$ 就有 $A(x)$。若 $A(y)$ 对所有 $y<x$ 为真，则 B 中不含比 x 小的元素。因此若 x 为 B 的元素（即若 $A(x)$ 为假），则 x 为 B 极小元，而 B 没有这样的元素

注： 有性质 (a)-(c) 的序称为**良基的** (well-founded)

定义 2.74 (良序集)

称良基线性序集为良序集 (well-ordered)

♣

定理 2.55 (超限归纳法)

设 A 为良序集，$f:A\to A$ 为递增映射（即若 $x<y$，就有 $f(x)<f(y)$），则对所有的 $x\in A$ 都有 $f(x)\geqslant x$

♡

证明 由定理 (2.54) 归纳原理足以证明，在假设对所有 $y<x$ 都有 $f(y)\geqslant y$ 的条件下不等式 $f(x)\geqslant x$ 成立。反证：假设它不成立并且 $f(x)<x$，但 f 递增有 $f(f(x))<f(x)$；另一方面，元素 $y=f(x)$ 小于 x，则由归纳假设有 $f(y)\geqslant y$，亦即 $f(f(x))\geqslant f(x)$。可以利用最小元的存在性直接重建上述论证如下：设命题不真。取使 $f(x)<x$ 的最小元素 x，因为 f 递增，应有 $f(f(x))<f(x)$，故而 x 不是最小的，这与假设矛盾。

另一种方式可重建证明如下：若 $x>f(x)$ 而 f 递增，应有 $x>f(x)>f(f(x))>f(f(f(x)))>\cdots$，但良序集中没有无穷严格递减序列

2.2.4.4 Zorn 引理，良序定理与选择公理

> 数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏的极深
>
> Johann Carl Friedrich Gauss　高斯

引理 2.1 (选择公理/axiom of choice(AC)/аксиома выбора)

若 $f: X \to Y$ 为满射，则存在映射 $s: Y \to X$ 满足 $f \circ s = 1_Y$ ♡

注 由映射 $s: Y \longrightarrow X$ 满足 $f \circ s = 1_Y$ 当且仅当任给 $y \in Y, s(y)$ 属于 y 的原像集 $f^{\leftarrow}(y)$，于是选择公理等价于：若 $f: X \longrightarrow Y$ 为满射，则存在一个映射 s 从每个原像集 $f^{\leftarrow}(y)$ 里选择一个元素 $s(y)$，这即为选择公理名称的来历

定理 2.56 (Banach-Tarski 分球定理)

（**Banach**[a]**-Tarski** 分球定理）若选择公理成立，则可以将一个三维实心球分成有限个部分，然后通过旋转和平移重新组合成两个半径和原来相同的完整的球

[a]巴拿赫 (Stefan Banach,1892.3.30-1945.8.31) 著名波兰数学家，利沃夫学派的开创人之一，波兰科学院和乌克兰科学院通讯院士、波兰数学学会主席。Banach 对泛函分析的发展做出了突出贡献，引进了线性赋范空间的概念，建立了其上的线性算子理论，把完备的线性赋范空间称为 Banach 空间。 ♡

注 Banach-Tarski 分球定理让人们开始思考是否拒绝选择公理，不过 1963 年 Paul Cohen 证明了选择公理独立于集合论的 ZF 公理，换言之即承认或拒绝选择公理都与 ZF 公理系统不矛盾。因此这里把选择公理作为集合论的基本公理之一

定义 2.75 (链完备子集)

设偏序集 $(P, \leqslant)$，若 P 的子集 A 满足下列条件：

(a)$\forall x \in A: f(x) \in A$

(b) 若 $L \subseteq A$ 为一条链，则 L 在 $(P, \leqslant)$ 中的上确界 $\sup L$ 属于 A

则称 A 为 P 的 f 不变的链完备子集 ♣

定理 2.57 (由选择公理证明 Zorn 引理的命题)

若偏序集 $(P, \leqslant)$ 的任意链都有上确界，$f: P \to P$ 满足 $\forall x \in P: x \leqslant f(x)$，则 f 有不动点，即 $\exists x \in P: f(x) = x$ ♡

证明 令 P_0 为 P 的所有 f 不变的链完备子集的交，则 P_0 为 P 的最小的 f 不变的链完备子集。显然 P 的最小元 $\perp$（空链的上确界）属于 P_0。欲证 $\exists b \in P_0: f(b) = b$，因此只需考虑 P_0 以及 f 在 P_0 上的限制。给出定义：若 $\forall y \in P_0: [y < x \Rightarrow f(y) \leqslant x]$，则称 $x \in P_0$ 为 P_0 的连接点。下分四步证明。

1) 欲证若 x 为 P_0 的连接点，则对任意 $y \in P_0$, 总有 $y \leqslant x$ 或 $f(x) \leqslant y$ 成立。令 $A_x = \{y \in P_0 \mid y \leqslant x \text{ 或} f(x) \leqslant y\}$，下证 A_x 为 P 的 f 不变的链完备子集，由 P_0 为 P 的最小的 f 不变的链完备子集，将有 $A_x = P_0$，从而结论成立。

首先证明 A_x 满足条件 (a)，即若 $y \in A_x$，则 $f(y) \in A_x$。分三种情况：

(i) $y < x$. 由 x 为 P_0 连接点，则有 $f(y) \leqslant x$，则有 $f(y) \in A_x$

(ii) $y = x$. 显然 $f(x) \leqslant f(y)$，则 $f(y) \in A_x$

(iii) $f(x) \leqslant y$. 由条件有 $f(x) \leqslant y \leqslant f(y)$，则 $f(y) \in A_x$

其次证明 A_x 满足条件 (b)。设 L 为 A_x 的一条链，若存在 $y \in L$ 使得 $f(x) \leqslant y$，则 $f(x) \leqslant \sup L$，因此 $\sup L \in A_x$。若不存在这样的 y，则对任意 $y \in L$ 都有 $y \leqslant x$，于是 $\sup L \leqslant x$，从而 $\sup L \in A_x$

2) 欲证 P_0 的每一个元素都是 P_0 的连接点。令 $A = \{x \in P_0 \mid x \text{ 为 } P_0 \text{ 的连接点}\}$，下证 A 为 P 的 f 不变的链完备子集，因此 $A = P_0$，从而结论成立。

首先证明若 $x \in A$, 则 $f(x) \in A$。设 $y < f(x)$，由第 1 步的结论可得 $y \leqslant x$，再由 x 为 P_0 连接点有 $f(y) \leqslant f(x)$，因此 $f(x)$ 为 P_0 的连接点，即 $f(x) \in A$

其次证明若 $L \subseteq A$ 为一条链，则 $\sup L \in A$，即 $\sup L$ 为 P_0 连接点。设 $y < \sup L$，若不存在 $x \in L$ 使得 $y \leqslant x$，则由第 1 步的结论知对任意 $x \in L$ 都有 $x \leqslant f(x) \leqslant y$，于是 $\sup L \leqslant y$，这与 $y < \sup L$ 矛盾，因此存在

$x_1 \in L$ 使得 $y \leqslant x_1$。又由 L 为一条链且 $y < \sup L$，则存在 $x_2 \in L$ 满足 $y < x_2$，因此则有 $f(y) \leqslant x_2 \leqslant \sup L$，即 $\sup L$ 为 P_0 连接点，这就证明了 $\sup L \in A$

3) 欲证 P_0 为一条链。设 $x, y \in P_0$ 并且 y 不小于等于 x，由 x 为 P_0 的连接点（第 2 步）及第 1 步的结论有 $f(x) \leqslant y$，则有 $x \leqslant f(x) \leqslant y$，则要么 $y \leqslant x$，要么 $x \leqslant y$

4) 由 P_0 为 P 的 f 不变的链完备子集，且 P_0 为一条链，则 P_0 的上确界 $b = \sup P_0 \in P_0$，并且 $f(b) \in P_0$。因此 $b \leqslant f(b) \leqslant b$，则有 $f(b) = b$

定理 2.58 (Zorn 引理：良序定理与选择公理等价性)

给出下列断言：

1)**Куратовский-Zorn**[a]引理：若偏序集 $(P, \leqslant)$ 中任意一条链有上界，则 $(P, \leqslant)$ 有极大元

2)**Zermelo**[b]定理/良序定理 (**Well-ordering Theorem**)：任意集合 X 都可良序化，即任意集合 X 都存在 X 上的偏序 "$\leqslant$" 使得 $(X, \leqslant)$ 为良序集。

则有：Zorn 引理 (ZL)$\Leftrightarrow$ 良序定理 (WO) $\Leftrightarrow$ 选择公理 (AC)

[a]马克斯 · 奥古斯特 · 佐恩 (Max August Zorn,1906.6.6-1993.3.9) 德裔美国数学家

[b]恩斯特 · 弗里德里希 · 费狄南 · 策梅洛 (德语：Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo,1871.7.27-1953.5.21) 德国数学家

♡

证明 (ZL) $\Rightarrow$ (WO)。给定集合 X，令

$$P = \{(A, \leqslant_A) \mid A \subseteq X, \leqslant_A \text{ 为 A 上良序}\}$$

在 P 中规定 $(A, \leqslant_A) \leqslant (B, \leqslant_B)$，若有

(i) $A \subseteq B$

(ii) $(\forall x, y \in A)[(x \leqslant_A y) \Leftrightarrow (x \leqslant_B y)]$

(iii) $(\forall x \in A)(\forall y \in B \backslash A) : x \leqslant_B y$

则易得 "$\leqslant$" 为 P 上偏序。设 $\{(A_i, \leqslant_i) \mid i \in J\}$ 为 $(P, \leqslant)$ 一条链，令 $A = \bigcup_{i \in J} A_i$。任给 $x, y \in A$，规定：

$$(x \leqslant_A y) \Leftrightarrow (\exists i \in J)(\exists x, y \in A_i) : x \leqslant_i y$$

若有 $(A, \leqslant_A)$ 为良序集，则它为 $\{(A_i, \leqslant_i) \mid i \in J\}$ 上界，于是 $(P, \leqslant)$ 满足 Zorn 引理条件。显然，$(A, \leqslant A)$ 为线性序集。下证 A 的任意非空子集 B 在 $(A, \leqslant_A)$ 中有最小元。由 $A = \bigcup_{i \in J} A_i$，则 $(\exists i \in J) : B \cap A_i \neq \varnothing$。由 $(A_i, \leqslant_i)$ 为良序集，则 $B \cap A_i$ 在 $(A_i, \leqslant_i)$ 中有最小元。可验证该最小元也为 B 在 $(A, \leqslant_A)$ 中最小元，因此 $(A, \leqslant_A)$ 为良序集。

由 Zorn 引理 $(P, \leqslant)$ 有极大元。设 $(A, \leqslant_A)$ 为 $(P, \leqslant)$ 的一个极大元。若 $A = X$，则 X 可良序化。若存在 $x_0 \in X \backslash A$，令 $B = A \cup \{x_0\}$。任给 $x, y \in B$，规定：

$$(x \leqslant_B y) \Leftrightarrow (y = x_0) \vee [(x, y \in A) \wedge (x \leqslant_A y)]$$

则 $(B, \leqslant_B) \in P$ 且比 $(A, \leqslant_A)$ 严格大，与 $(A, \leqslant_A)$ 为极大元矛盾。

(WO) $\Rightarrow$ (AC)。设 $f : X \longrightarrow Y$ 为满射，由假设存在 X 上的二元关系 "$\leqslant$" 使得 $(X, \leqslant)$ 为良序集。任给 $y \in Y$，令 $s(y)$ 为 X 的非空子集 $f^{\leftarrow}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ 的最小元，则 $s : Y \longrightarrow X$ 满足条件

(AC) $\Rightarrow$ (ZL)。设 $(P, \leqslant)$ 为偏序集且 $(P, \leqslant)$ 中每一条链都有上界，欲证 $(P, \leqslant)$ 有极大元。考虑 $(P, \leqslant)$ 中的链（包括空链）在包含序下构成的偏序集 $(C(P), \subseteq)$，称该偏序集中的极大元为 $(P, \leqslant)$ 的极大链。由于 $(P, \leqslant)$ 的极大链的上界一定为 $(P, \leqslant)$ 的极大元，因此证明 $(P, \leqslant)$ 有极大链即可。令

$$Q = \{(L, M) \in C(P) \times C(P) \mid L \subset M, L \neq M\}$$

若 $(P, \leqslant)$ 没有极大链，则映射 $g : Q \to C(P), (L, M) \mapsto L$ 为满射，则存在 $s : C(P) \to Q$ 使得 $g \circ s = 1_{C(P)}$。令 $f = h \circ s : C(P) \to C(P)$，其中 $h : Q \to C(P)$ 把 Q 中元素 (L, M) 映为 M。由 Q 及 f 定义知任给 $L \in C(P)$，$f(L)$ 严格包含 L，则 $f(L) \neq L$。另一方面易验证 $(C(P), \subseteq)$ 任意链都有上确界，因此由定理 (2.57) 有存在 $L \in C(P)$ 使得 $f(L) = L$，矛盾。

注 良序定理非常重要，其确保所有集合适用于超限归纳法。另外，现代教科书也常常采用 Zorn 引理代替超限

归纳法

定理 2.59 (Zermelo)

给定两个集合 X, Y，下列两个断言至少一个为真：存在 X 到 Y 的单射，存在 Y 到 X 的单射。特别地，若 X 为无限集，则存在单射 $\mathbb{N} \longrightarrow X$.

证明 为了利用 Zorn 引理，先构造一个满足 Zorn 引理条件的偏序集 $(P, \leqslant)$。P 的一个元素为一个序对 (A, f)，其中 A 为 X 的一个子集，f 为 A 到 Y 的一个单射。P 上的偏序 "$\leqslant$" 规定如下：

$$(A, f) \leqslant (B, g) \Leftrightarrow A \subseteq B, f = g \mid A$$

即 $(A, f) \leqslant (B, g)$ 当且仅当 f 是 g 的一个限制

设 $\{(A_i, f_i) \mid i \in J\}$ 为 $(P, \leqslant)$ 中一条链，令 $A = \bigcup_{i \in J} A_i$。若 $x \in A_i$，定义映射 $f : A \longrightarrow Y$ 满足 $f(x) = f_i(x)$。容易看出 f 是良定义的且为单射，则有 $(A, f) \in P$。显然 (A, f) 为 $\{(A_i, f_i) \mid i \in J\}$ 的一个上界，则有 $(P, \leqslant)$ 满足 Zorn 引理条件，因此有极大元。

下设 (A, f) 为 $(P, \leqslant)$ 的一个极大元。下利用反证法说明要么 f 为满射，要么 $A = X$。假设 $A \neq X$ 并且 f 不是满射，任取 $x_0 \in X \backslash A$ 及 $y_0 \in Y \backslash f \to (A)$。定义 $g : A \cup \{x_0\} \longrightarrow Y$ 如下：

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

则 $(A \cup \{x_0\}, g) \in P$ 且比 (A, f) 严格大，与 (A, f) 为极大元矛盾。

若 $A = X$，则 $f : X \longrightarrow Y$ 为单射。若 f 为满射，定义映射 $g : Y \longrightarrow X$ 如下：

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y,$$

则 $g : Y \longrightarrow X$ 即为单射

最后设 X 为无限集，若 X 为可数无限集，则存在双射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$（$f$ 为单射）；若 X 不可数，则不存在单射 $g : X \longrightarrow \mathbb{N}$，因此必然存在单射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$

推论 2.2 (Hilbert 旅馆问题变形)

若 X 为无限集，Y 为可数集，则 $X \cup Y$ 与 X 等势

证明 不妨设 $X \cap Y = \varnothing$，否则令 $Y' = Y \backslash X$，则 Y' 可数且 $X \cup Y' = X \cup Y$。设 Y 可数无限（Y 有限的情形类似证明）。将 Y 的元素用自然数编号为 $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$。由 X 为无限集，由定理 (2.59) 有存在单射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$。定义映射 $g : X \cup Y \longrightarrow X$ 如下：

$$g(z) = \begin{cases} z, & z \in X \backslash f^{-1}(\mathbb{N}) \\ f(2n), & z = f(n); \\ f(2n+1), & z = y_n. \end{cases}$$

则 $g : X \cup Y \longrightarrow X$ 为双射，因此 $X \cup Y$ 与 X 等势

注 Hilbert 旅馆悖论 (Hilbert's paradox of the Grand Hotel) 是一个与无限集合有关的数学悖论，为在上世纪 20 年代 Hilbert 提出的一个著名的思想实验。

假设有一个拥有可数无限多个房间的旅馆，且所有的房间均已客满。一个男士走进了酒店并且要求一个房间。夜班经理并没有拒绝他，而是决定给他一个房间。他让 1 号客房的客人搬到了 2 号客房，2 号客房的客人搬到 3 号客房，以此类推。每个客人从"n" 号房间搬入"n+1" 号房间。因为酒店有无限个房间，所以总有第 n+1 个房间给每 n 个已入住的客人，这样的话 1 号房间就留给了新的客人。这个安排房间的方法可以被重复给任何有限个的新客人们。

现在有一个无限长的巴士拉了可数的无限多位客人来订房间。经理于是让 1 号房间的客人搬到了 2 号房间。他然后让 2 号房间的客人搬到了 4 号房间，3 号房间的客人搬到 6 号房间，以此类推。让每一个原先入住的客

人从"n" 号房间搬到了"2n" 号房间，于是只有无限多的偶数号房间里住了人，而空闲下来的无限多个奇数房间由新来的客人入住。

一天晚上，外面来了由无限多辆并且每一辆都是无限长的大巴们开到酒店门口，每个大巴都载着可数的无限多位的客人。经理于是把第一个质数 2 作为的底数，原有客人当前的房间号为指数。譬如，原先住在房间号为 7 的酒店客人就要搬到房间号为 2 的 7 次方的房间里，也就是 128 号房。然后经理如下安排在第一个超级大巴上的客人，以下一个质数 3 为底数，以他们在大巴的座位号为指数来分配房间。因此，座位号为 7 的第一辆大巴上的人到房间号为 3 的七次方即 2187 号房间去。这个过程持续给第一辆大巴上的所有人。第二辆大巴上的乘客们被安排到了下一个质数 5 为底数。接下的大巴以 7 为底的幂。每辆大巴如下：11 的幂，13 的幂，17 的幂，等等。因为这些底数都是质数，因此就房间号就不会重复，也就利用了这种基于质数的独特安置分配方案将所有大巴里乘客们散列分配到到各自房间。这样一来，经理能够安排每辆大巴的每位乘客入住。

第 3 章 实分析

3.1 测度论基础

3.1.1 基本概念

3.1.1.1 集半环上测度与扩张

定义 3.1 (集半环测度)

若集函数 $\mu(A):\mathfrak{S}\to\mathbb{R}$ 满足下列条件:

1) (集半环定义域) 集族 $\mathfrak{S}$ 为集半环

2) (值域非负性) 集函数 $\mu(A)$ 的值为非负实数

3) (有限可加性 (свойство аддитивности)) 基函数 $\mu(A)$ 有限可加，即

$$(\forall A_1,A_2,\cdots A_n\in\mathfrak{S}):\left[\left(A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\Rightarrow\left(\mu(A)=\sum_{k=1}^{n}\mu\left(A_k\right)\right)\right]$$

其中 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则称该集函数 $\mu(A)$ 为集 A 上测度 **(мера)**

♣

注 (集半环空集测度)

从 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing$ 有 $\mu(\varnothing)=2\mu(\varnothing)$，即 $\mu(\varnothing)=0$

定义 3.2 (σ 可加性/可数可加性)

设集函数 $\mu(A):\mathfrak{S}\to\mathbb{R}$ 为定义在集半环 $\mathfrak{S}$ 上测度，若

$$(\forall A_1,A_2,\cdots A_n,\cdot\in\mathfrak{S}):\left[\left(A=\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)\Rightarrow\left(\mu(A)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu\left(A_k\right)\right)\right]$$

其中 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则称 $\mu(A)$ 可数可加 **(счётно-аддитивная)** 或 σ 可加 **(σ-аддитивная)**

♣

定义 3.3 (外测度)

设 $\mathfrak{S}_m$ 为半环，$B_n\in\mathfrak{S}_m$，称数

$$\mu^*(A)=\inf\sum_{n}m\left(B_n\right)$$

为集 $A\subset E$ 的外测度，其中下确界从集 A 的有限覆盖或可数覆盖中取

♣

定理 3.1 (半环测度保序性)

设 $\mathfrak{S}$ 为半环，则有

$$(\forall A,B\in\mathfrak{S})[(A\subset B)\Rightarrow(\mu(A)\leqslant\mu(B)]$$

♡

证明 由 $B=A\cup(B\backslash A)=A\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right),A_i\in\mathfrak{S}$ 即得 $\mu(B)=\mu(A)+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu\left(A_i\right)\geqslant\mu(A)$

定理 3.2 (半环外测度可数保序性)

若集 $A\subset\bigcup\limits_{n}A_n$，其中 $\{A_n\}$ 为有限集族或可数集族，则有

$$\mu^*(A)\leqslant\sum_{n}\mu^*\left(A_n\right)$$

♡

定理 3.3 (半开半闭区间测度可数可加性)

设半环 $\mathcal{S}=\{[a;b)|a\leqslant b\}$ ，定义半开半闭区间的测度为 $m[a,b)=b-a$，则半环 $\mathcal{S}$ 上测度 m 为可数可加的

证明 设 $[a;b)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[a_i;b_i)$，则有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i;b_i)\subset[a;b)\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}m\left[a_i;b_i\right)\leqslant m[a;b)\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)\leqslant b-a$$

不妨设 $b>a$，另设 $(\forall i\in\mathbb{N}^*):b_i>a_i$，则对于 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$[a;b-\varepsilon]\subset[a;b)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i;b_i)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i};b_i\right)$$

由 Heine-Borel 引理有 $(\exists m>0)$ 满足

$$[a;b-\varepsilon)\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i};b_i\right)\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left[a_i-\frac{\varepsilon}{2^i};b_i\right)\Rightarrow$$

$$m[a,b-\varepsilon)\leqslant\sum_{i=1}^{m}m\left[a_i-\frac{\varepsilon}{2^i},b_i\right)\Rightarrow b-a-\varepsilon\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left(b_i-a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)+\varepsilon$$

则令 $\varepsilon\to0$ 即有 $b-a\leqslant\sum\limits_{i=1}^{+\infty}(b_i-a_i)$

例题 3.1 （Cantor 集）考虑数 $x\in I=[0;1)$ 的三进制表示

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\ldots,\quad a_i\in\{0,1,2\}$$

现设 G_1 为数集，其中 $a_1=1,K_1=I\backslash G_1$；设 G_2 为数集，其中 $a_1\neq1,a_2=1,K_2=K_1\backslash G_2$；设 G_3 为数集，其中 $a_1\neq1,a_2\neq1,a_3=1,K_3=K_2\backslash G_3$，以此类推⋯⋯则得到了 Cantor 集 (множество Кантора)：

$$K=\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i\neq\varnothing$$

该集合不包含三进制表示法至少包含一位数字 1 的数

设 $G=\bigcup G_n$，下计算该集合的测度：

$$\mu(G)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(G_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}=1\Rightarrow\mu(K)=0$$

另外，Cantor 集 K 有连续统基数：

$$K=\left\{x=(0,x_1x_2x_3\ldots)_3,x_i\in\{0,2\}\right\}\sim\left\{x=(0,x_1x_2x_3\ldots)_2,x_i\in\{0,1\}\right\}=(0,1)$$

定义 3.4 (扩张)

设集族 $\mathfrak{S}_m\subset\mathfrak{S}_\mu$，若

$$(\forall A\in\mathfrak{S}_m):\mu(A)=m(A)$$

则称测度 μ 为测度 m 的扩张 **(продолжение)**

定理 3.4

设半环 $\mathfrak{S}$ 上有测度 $\hat{\mu}$，则下列命题成立：

1) （半环测度在生成环上扩张存在唯一性）在环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ 上存在且仅存在唯一的测度 μ 为测度 $\hat{\mu}$ 的扩张

2) （半环上 σ 可加测度扩张 σ 可加性）若测度 m 可数可加，则测度 $\hat{\mu}$ 在环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ 上扩张 μ 也可数可加

证明

1) 唯一性：由引理 (??) 有 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})=\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, A_i\in\mathcal{S}\right\}$，设 μ 为 $\hat{\mu}$ 在 $\mathfrak{R}\mathfrak{S})$ 上扩张，则

$$(\forall B\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S})): B=\bigcup_{i=1}^{n} A_i, A_i\in\mathcal{S}\Rightarrow\mu(B)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}\left(A_i\right)$$

则若测度 μ 存在扩张，该扩张唯一

存在性：设 $B\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$，若 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, A_i\in\mathfrak{S}, B=\bigcup\limits_{j=1}^{m} C_j, C_j\in\mathfrak{S}$，则有

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left(A_i\cap C_j\right), A_i=\bigcup_{j=1}^{m}\left(A_i\cap C_j\right), C_j=\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i\cap C_j\right)$$

$$\mu(B)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu\left(A_i\cap C_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mu\left(A_i\cap C_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\mu\left(C_j\right)$$

则 B 上测度不依赖于半环上有限分解式的选择，则

$$(\forall B\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S})):\left[\left(B=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\Rightarrow\left(\mu(B)=\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}\left(A_i\right)\right)\right]$$

显然有 $(\forall B\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S}):\mu(B)\geqslant 0$，则 μ 为 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ 上测度

设 $C\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$，且 $C=\bigcup\limits_{j=1}^{m} D_j, D_j\in\mathfrak{S}, C\cap B=\varnothing$ ，则有

$$B\cup C=\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m} D_j\right)\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$$

$$\mu(B\cup C)=\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}\left(A_i\right)+\sum_{j=1}^{m}\hat{\mu}\left(D_j\right)=\mu(B)+\mu(C)$$

2) 对于任意集 $A, A_i\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S}): A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，设 $A=\bigcup\limits_{s=1}^{m} B_s, B_s\in\mathfrak{S}, A_i=\bigcup\limits_{j=1}^{m_i} B_{ij}, B_{ij}\in\mathfrak{S}$，则

$$B_s=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(A_i\cap B_s\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{m_i}\left(B_{ij}\cap B_s\right),\hat{\mu}\left(B_s\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\hat{\mu}\left(B_{ij}\cap B_s\right),(\forall i, j): B_{ij}\cap A=B_{ij}$$

$$\mu(A)=\sum_{s=1}^{m}\hat{\mu}\left(B_s\right)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\hat{\mu}\left(B_{ij}\cap B_s\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{s=1}^{m}\hat{\mu}\left(B_{ij}\cap B_s\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\hat{\mu}\left(B_{ij}\cap A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\hat{\mu}\left(B_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$$

则扩张可数可加性得证

3.1.1.2 环上测度与连续测度

定义 3.5 (连续测度)

设在环 $\mathfrak{R}$ 上给定测度 μ，若

$$\forall A, A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots\in\mathcal{K}: A_i\subset A_{i+1},\forall i, A=\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Rightarrow\mu(A)=\lim_{i\to+\infty}\mu\left(A_i\right)$$

则称测度为连续测度

♣

注 （符号约定）

今后约定若 $A_i\subset A_{i+1}, A=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$，则 $A=\lim A_i$，这时有 $\mu\left(\lim A_i\right)=\lim\mu\left(A_i\right)$

定理 3.5 (环上测度连续性充要条件)

设 μ 为环 $\Re$ 上测度，则下列命题等价：

1)（连续性）μ 连续

2)（可数可加性）μ 可数可加

3)（集列形式 Heine 定理）设集列 $\{B_i\}$ 满足 $B_i \supset B_{i+1}, B = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} B_i, \lim\limits_{i\to\infty} B_i = B$ 且 $B, B_i \in \Re$，则有 $\mu(B) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(B_i)$

♡

证明 2)⇒1) 设 μ 为可数可加测度，观察集族 $A, A_i \in \Re$，其满足 $A_i \subset A_{i+1}, A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$，则有 $A = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \cup \ldots$，则

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \ldots = \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_1) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \ldots + \mu(A_n \backslash A_{n-1})\right)$$

再由

$$A_i = A_{i-1} \cup (A_i \backslash A_{i-1}) \Rightarrow \mu(A_i) = \mu(A_{i-1}) + \mu(A_i \backslash A_{i-1}) \Rightarrow \mu(A_i \backslash A_{i-1}) = \mu(A_i) - \mu(A_{i-1})$$

即得 $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$

1)⇒2) 设测度 μ 连续，观察集族 $A, A_i \in \Re, A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，下记 $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 且 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : B_n \subset B_{n+1}$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = A$，由测度连续性即有

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

1)⇒ 3) 显然有 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} (B_1 \backslash B_i) = B_1 \backslash \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} B_i$ 且 $(B_1 \backslash B_i) \subset (B_1 \backslash B_{i+1})$，即有

$$\mu\left(B_1 \backslash \bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_1 \backslash B_i)$$

则得

$$\mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} \left(\mu(B_1) - \mu(B_i)\right) \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \mu(B)$$

3)⇒ 1) 设 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \subset A_{i+1}, A_i, A \in \Re$，且 $B_i = A \backslash A_i, B_i \supset B_{i+1}$

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (A \backslash A_i) = A \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$$

$$\lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \lim_{i\to\infty} \left(\mu(A) - \mu(A_i)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(A)$$

上述命题等价性得证

定理 3.6 (环上测度保序性)

设 $\Re$ 为环，μ 为环 $\Re$ 上测度，则下列命题成立：

1) 设 $A, A_i \in \Re$，若 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$

2) 设 $A, A_i \in \Re$，若 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 且 μ 可数可加，则 $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

♡

证明 1) 由条件有 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \mu(A)$$

令 $n \to \infty$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$

2) 由条件有 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$，其中 $\tilde{A}_i = A_i \cap A \in \Re$，则有表达式

$$A = \tilde{A}_1 \cup \left(\tilde{A}_2 \backslash \tilde{A}_1\right) \cup \left(\tilde{A}_3 \backslash \left(\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2\right)\right) \cup \ldots$$

进而有

$$\begin{aligned}\mu(A) =& \mu\left(\tilde{A}_1\right) + \mu\left(\tilde{A}_2 \backslash \tilde{A}_1\right) + \mu\left(\tilde{A}_3 \backslash \left(\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2\right)\right) + \ldots \\ \leqslant& \mu\left(\tilde{A}_1\right) + \mu\left(\tilde{A}_2\right) + \mu\left(\tilde{A}_3\right) + \ldots \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots\end{aligned}$$

则有 $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

3.2 Lebesgue 积分论

假如我必须偿还一笔钱，如果我从口袋中随意摸出不同面值的钞票，逐一地还给债主直到全部还清，这就是 Riemann 积分法；不过，我还有另外一种做法，就是把钱全部拿出来并把相同面值的钞票放在一起，然后再付给应还的数目，这就是我的积分法

Lebesgue　勒贝格

进入 19 世纪中叶之后，微积分开始进入严密化阶段，随着 Weierstrass 和 Cantor 工作的问世，一些“奇怪”的函数使 Riemann 积分暴露出巨大的局限性，其中具有轰动性的是 Volterra 的反例，他构造出了一个可微函数，其导函数有界，但却非 Riemann 可积，这一反例直接威胁到了 Riemann 积分理论乃至整个微积分学的重要结论——微积分基本定理。这催促数学家们展开对 Riemann 积分的改造

这时，法国数学家 Lebesgue 在 1897 年大学毕业后在本校图书馆工作了两年，期间出版的 Borel 的《函数论讲义》等著作激发了 Lebesgue 的热情，在 1902 年 Lebesgue 发表了博士论文《积分、长度和面积》，在这篇文章中，Lebesgue 创立了以他名字命名的 Lebesgue 测度论和 Lebesgue 积分论，这些理论在现代分析学中持久地占有重要位置

值得一提的是，在 Lebesgue 之前，Jordan 曾阐述过所谓的 Jordan 测度，但存在严重的缺陷，甚至在 Jordan 测度论下，有理数集为 Jordan 不可测的。在 1898 年，Borel 在《函数论讲义》引入了“Borel 集”的概念，Borel 从开集的测度为构成区间的总和出发，发展出了一套测度理论，但在 Borel 的测度思想中，却存在 Borel 不可测的 Jordan 可测集，特别是存在零测度的稀疏集。尽管这引起了当时很多数学家的反感，但 Lebesgue 却洞察到了该思想的深刻意义并接受了它，这使得 Lebesgue 测度论得以诞生。Lebesgue 突破了 Jordan 对集合测度的定义中所做的有限覆盖的限制，以更一般的方式发展了 Borel 测度的观念，分别定义了点集的内、外测度（也称为上下测度），并将上下测度相等的集合定义为 Lebesgue 可测集，由此则证明了 Lebesgue 可测集满足 Lebesgue 测度公理中最重要的一条——可数可加性

Lebesgue 给出了可测函数定义，并将函数序列的逐点收敛、一致收敛推广到了几乎处处收敛、近乎一致收敛和沿测度收敛。这种“几乎处处”的思想，给研究函数性质创造了新的方法，即在整体而非局部上考虑集合与函数等对象所具有的性质，这在当时是极其独到的

另外，函数级数的逐项积分并不总是可行的，甚至对于 Riemann 可积函数一致有界的级数，都未必得到 Riemann 可积，该问题促使 Lebesgue 在他的新积分理论中获得了一个重要结果——Lebesgue 控制收敛定理 (3.33)，该定理的创立显示出 Lebesgue 积分论极大的优越性。作为微积分学核心的微积分基本定理在 Riemann 积分下具有较大局限性，但在 Lebesgue 积分论中，可证明不存在导函数有界却不可积的情况。进一步，Lebesgue 证明了微积分基本定理成立的充要条件为函数绝对连续。值得一提的是，许多拓扑向量空间（例如 Hilbert 空间或者 Banach 空间）中的定理及其中的极限运算，通过使用 Lebesgue 积分获得了巨

大的简化

3.2.1 Lebesgue 测度论

借助上测度和下测度的概念给出了 Lebesgue 可测与 Lebesgue 测度的定义，另外给出了上测度可数半加性 (3.8) 及其推论，然后给出了 Lebesgue 可测第一充要条件 (3.9) 以及其更好用的推论 Lebesgue 可测第二充要条件 (3.5)。然后给出了作为基本性质的 Lebesgue 可测集基本集运算的算术封闭性 (3.2.1.1)，Lebesgue 可测集可数并的 Lebesgue 可测性 (3.11) 与 Lebesgue 可测集可数交的 Lebesgue 可测性 (3.7)

借助抽象可测函数引入常用的可测函数的定义，指出结构可测函数体 (3.15)。最后指出相对于 Lebesgue 可测集的等价函数的概念。引入“几乎处处”概念，依次证明了逐点收敛可测函数序列极限函数可测性，并得其推论一致收敛可测函数序列极限函数可测性和几乎处处收敛可测函数序列极限函数可测性。另外给出了揭示可测函数序列一致收敛与几乎处处收敛间联系的 Egorov 定理 (3.18)。

另外，引入“沿测度收敛”的定义，并指出作为可测函数序列沿测度收敛必要条件的从几乎处处收敛到沿测度收敛的 Lebesgue 定理 (3.19) 与作为可测函数序列沿测度收敛（有限制的）充分条件的从沿测度收敛到几乎处处收敛的 Riesz 定理 (3.20)，并举例 (3.5) 验证可测函数序列沿测度收敛为其几乎处处收敛的必要不充分条件

3.2.1.1 Lebesgue 测度与 Lebesgue 可测

借助上测度和下测度的概念给出了 Lebesgue 可测与 Lebesgue 测度的定义，另外给出了上测度可数半加性 (3.8) 及其推论，然后给出了 Lebesgue 可测第一充要条件 (3.9) 以及其更好用的推论 Lebesgue 可测第二充要条件 (3.5)

最后给出作为基本性质的 Lebesgue 可测集基本集运算的算术封闭性 (3.2.1.1)，Lebesgue 可测集可数并的 Lebesgue 可测性 (3.11) 与 Lebesgue 可测集可数交的 Lebesgue 可测性 (3.7)

定义 3.6 (Lebesgue 零)

设 $\Re$ 为环，该环上测度 μ 可数可加，若

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A_i\in\Re):\left[\left(E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\mu\left(A_i\right)<\varepsilon\right)\right]$$

则称集合 E 有 **Lebesgue** 零（测度）**(Лебега нуль)**

♣

定理 3.7 (Lebesgue 零可数可加性)

设 $\Re$ 为集环，集 $A_i\in\Re$ 有 Lebesgue 零测度且 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，则集 A 也有 Lebesgue 零测度

♡

证明 由条件有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B_{ij}\in\Re):\left[\left(A_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{ij}\right)\Rightarrow\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mu\left(B_{ij}\right)<\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right]$$

则由 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}B_{ij}$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu\left(B_{ij}\right)<\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon$，则集 A 有 Lebesgue 零测度

定义 3.7 (上测度与下测度)

设 X 为集合，集环 $\Re$ 为 X 的子集的集代数，在集代数 $\Re$ 上定义了可数可加的测度 m。对于任意 $A\subset X$

定义

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} m\left(B_i\right) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, B_i \in \Re\right\}$$

称 $\mu^*(A)$ 为上测度 **(верхняя мера)**（或外测度），定义

$$\mu_*(A)=m(X)-\mu^*(X \backslash A)$$

称 $\mu_*(A)$ 为下测度 **(нижняя мера)**

另外，若

$$\mu^*(A)+\mu^*(X \backslash A)=m(X) \Leftrightarrow \mu^*(A)=\mu_*(A)$$

则称集 $A \subset X$ 为 **Lebsgue** 可测 **(измеримое по Лебегу)**，这时称 $\mu(A)=\mu^*(A)$ 为集合 A 的 **Lebsgue** 测度 **(мера Лебега)**

♣

注（上测度）

设 $A \in \Re$，则由上测度定义有 $\mu^*(A) \leqslant m(A)$。另一方面，设 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i, B_i \in \Re$，这时由测度 m 可数可加性有

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} m\left(B_i\right) \Rightarrow m(A) \leqslant \mu^*(A)$$

则有 $(\forall A \in \Re): \mu^*(A)=m(A)$

定理 3.8 (上测度可数半加性 (полуаддитивность))

设 X 为集合，集环 $\Re$ 为 X 的子集的集代数，在集代数 $\Re$ 上定义了可数可加的测度 m，$A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$，其中 $A, A_i \subset X$，则

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*\left(A_i\right)$$

♡

证明 若 $A_i \in \Re$，则该断言从上测度的定义中直接得出。下证对于任意 $A_i \subset X$ 满足下确界的定义，这时有 $(\forall \varepsilon>0)(\exists B_{ik} \in \Re)$，当 $A_i \subset \bigcup\limits_k B_{ik}$ 时满足

$$\mu^*\left(A_i\right) \leqslant \sum_k m\left(B_{ik}\right) \leqslant \mu^*\left(A_i\right)+\frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow \sum_{i,k} \mu^*\left(B_{ik}\right) \leqslant \sum_i \mu^*\left(A_i\right)+\varepsilon$$

$$A \subset \bigcup_i A_i \subset \bigcup_{i,k} B_{ik} \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum_{i,k} m\left(B_{ik}\right)=\sum_{i,k} \mu^*\left(B_{ik}\right) \leqslant \sum_i \mu^*\left(A_i\right)+\varepsilon$$

定理即证

推论 3.1 (上下测度基本不等式)

设 X 为集合，集环 $\Re$ 为 X 的子集的集代数，在集代数 $\Re$ 上定义了可数可加的测度 m，$A \subset X$，则 $0 \leqslant \mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$

♡

证明 显然有 $X \subset A \cup(X \backslash A)$，则由上测度可数半加性 (3.8) 即有 $m(X) \leqslant \mu^*(A)+\mu^*(X \backslash A)$，则得 $\mu_*(A)=m(X)-\mu^*(X \backslash A) \leqslant \mu^*(A)$

推论 3.2 (上测度绝对值不等式/上测度差的对称差估计)

设 X 为集合，集环 $\Re$ 为 X 的子集的集代数，$A, B \subset X$，则有 $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right| \leqslant \mu^*(A \Delta B)$

♡

证明 显然有 $A \subset B \cup (B\Delta A)$ 且 $B \subset A \cup (B\Delta A)$，则由上测度可数半加性 (3.8) 即有

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(B\Delta A), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B\Delta A)$$

推论即证

推论 3.3 (上测度三角不等式)

设 X 为集合，集环 $\mathfrak{R}$ 为 X 的子集的集代数，$A, B \subset X$，则有 $\mu^*(A\Delta B) \leqslant \mu^*(A\Delta C) + \mu^*(C\Delta B)$ ♡

证明 显然有 $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B)$，则由上测度可数半加性 (3.8) 即有 $\mu^*(A\Delta B) \leqslant \mu^*(A\Delta C) + \mu^*(C\Delta B)$

推论 3.4 (Lebesgue 零测度 Lebesgue 可测性)

Lebesgue 零测度集为 Lebesgue 可测集，即若 A 为 Lebesgue 零测度集，则有 $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$ ♡

定理 3.9 (Lebesgue 可测第一充要条件)

设 X 为集合，集环 $\mathfrak{R}$ 为 X 的子集的集代数，在集代数 $\mathfrak{R}$ 上定义了可数可加的测度 m，$A \subset X$。则集 A 为 Lebesgue 可测集充要条件为

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B \in \mathfrak{R}) : \mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$$

♡

证明 充分性：对于集 B 由上测度绝对值不等式 (3.2) 有 $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$，进而有 $\mu^*(B) - \varepsilon \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon$，同理由 $(X\backslash A)\Delta(X\backslash B) = A\Delta B$ 即得 $\mu^*(X\backslash B) - \varepsilon \leqslant \mu^*(X\backslash A) \leqslant \mu^*(X\backslash B) + \varepsilon$

由 $B \in \mathfrak{R}$，则有 $\mu^*(B) + \mu^*(X\backslash B) = m(X)$，则

$$(\forall \varepsilon > 0) : m(X) - 2\varepsilon < \mu^*(A) + \mu^*(X\backslash A) \leqslant m(X) + 2\varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) + \mu^*(X\backslash A) = m(X)$$

则 A 为 Lebesgue 可测集

必要性：设 A 为 Lebesgue 可测集，则 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B_k \in \mathfrak{R}) : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ 有

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} m(B_k) \leqslant \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\exists N \in \mathbb{N}) : \sum_{k=N+1}^{+\infty} m(B_k) < \frac{\varepsilon}{3}$$

设 $B = \bigcup\limits_{k=1}^{N} B_k$，下证 $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$。显然有 $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$，则有 $\mu^*(A\Delta B) \leqslant \mu^*(A\backslash B) + \mu^*(B\backslash A)$，因此

$$A\backslash B \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} B_k \Rightarrow \mu^*(A\backslash B) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} m(B_k) < \frac{\varepsilon}{3}$$

由集合 $X\backslash A$ 可测，则有 $(\exists C_k \in \mathfrak{R})$ 满足

$$\mu^*(X\backslash A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) \leqslant \mu^*(X\backslash A) + \frac{\varepsilon}{3}, \quad X\backslash A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

进而有

$$X = A \cup (X\backslash A) \subset \bigcup_k B_k \cup \bigcup_k (C_k\backslash B_k) \Rightarrow m(X) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) + \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k\backslash B_k)$$

$$B\backslash A = B \cap (X\backslash A) \subset B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (C_k \cap B) \Rightarrow \mu^*(B\backslash A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k \cap B)$$

$$m(C_k \cap B) = m(C_k) - m(C_k\backslash B) \Rightarrow \mu^*(B\backslash A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) - \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k\backslash B)$$

则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\left(B_k\right) \leqslant \mu^*(A)+\frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m\left(C_k\right) \leqslant \mu^*(X \backslash A)+\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} m\left(B_k\right)+\sum_{k=1}^{\infty} m\left(C_k\right) \leqslant m(X)+\frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} m\left(B_k\right)+\sum_{k=1}^{\infty} m\left(C_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\left(B_k\right)+\sum_{k=1}^{\infty} m\left(C_k \backslash B_k\right)+\frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} m\left(C_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\left(C_k \backslash B_k\right)+\frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow \mu^*(B \backslash A) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow \mu^*(A \Delta B)<\varepsilon$$

综上，定理得证

推论 3.5 (Lebesgue 可测第二充要条件)

设 X 为集合，$A \subset X$，则集合 A 为 Lebesgue 可测的充要条件为 $(\forall \varepsilon>0)$ 存在 Lebesgue 可测集 B 满足 $\mu^*(A \Delta B)<\varepsilon$

证明 设集环 $\Re$ 为 X 的子集的集代数，若 B 存在则有对于 $(\forall B_1 \in \Re)$ 由上测度三角不等式 (3.3) 有

$$\mu^*\left(B \Delta B_1\right)<\varepsilon \Rightarrow \mu^*\left(A \Delta B_1\right) \leqslant \mu^*(A \Delta B)+\mu^*\left(B \Delta B_1\right)<2\varepsilon$$

结合定理 (3.9)，该推论即证

性质 (Lebesgue 可测集集运算封闭性)

设 X 为集合，集环 $\Re$ 为 X 的子集的集代数，$A, B \subset X$，集合 A, B 为 Lebesgue 可测集，则下列命题成立：

1)$A \cup B$ 为 Lebesgue 可测集

2)$A \cap B$ 为 Lebesgue 可测集

3)$A \backslash B$ 为 Lebesgue 可测集

4)$A \Delta B$ 为 Lebesgue 可测集

证明 1) 若 A, B 集合 A, B 为 Lebesgue 可测的，则有 $(\exists A_1 \in \Re): \mu^*\left(A \Delta A_1\right)<\varepsilon$ 且 $(\exists B_1 \in \Re): \mu^*\left(B \Delta B_1\right)<\varepsilon$，则有

$$(A \cup B) \Delta\left(A_1 \cup B_1\right) \subset\left(A \Delta A_1\right) \cup\left(B \Delta B_1\right) \Rightarrow \mu^*\left((A \cup B) \Delta\left(A_1 \cup B_1\right)\right)<2\varepsilon$$

由此 $A \cup B$ 为 Lebesgue 可测的

2) 若集 A 为 Lebesgue 可测的，则由 Lebesgue 可测定义即得 $X \backslash A$ 也为 Lebesgue 可测集，因此 $A \cap B = X \backslash((X \backslash A) \cup(X \backslash B))$ 表明 $A \cap B$ 为 Lebesgue 可测集

3) 由 $A \backslash B=A \cap(X \backslash B)$ 即得 $A \backslash B$ 为 Lebesgue 可测集

4) 由 $A \Delta B=(A \backslash B) \cup(B \backslash A)$ 即得 $A \Delta B$ 为 Lebesgue 可测集

定理 3.10 (Lebesgue 测度有限可加性)

设 X 为集合，集环 $\Re$ 为 X 的子集的集代数，$A \subset X$，$A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$，其中 A, A_k 为 Lebesgue 可测集，则

$$\mu^*(A)=\sum_{k=1}^{n} \mu^*\left(A_k\right)$$

证明 当 $n=2$ 时，A_1, A_2, A 为 Lebesgue 可测集，则 $A=A_1 \cup A_2$，则

$$(\exists B_i \in \Re): \mu^*\left(A_i \Delta B_i\right)<\varepsilon, i=1,2$$

由定理 (3.8) 有 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$。下证反向不等式，设 $B = B_1 \cup B_2$，则有

$$\begin{aligned}|\mu^*(A) - \mu^*(B)| &\leqslant \mu^*(A\Delta B) = \mu^*\left((A_1 \sqcup A_2)\,\Delta\,(B_1 \cup B_2)\right)\\ &\leqslant \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < 2\varepsilon\\ &\Rightarrow \mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) - 2\varepsilon = m(B_1 \cup B_2) - 2\varepsilon = m(B_1) + m(B_2) - m(B_1 \cap B_2) - 2\varepsilon\end{aligned}$$

另外有

$$\begin{aligned}B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2) &\Rightarrow \mu^*(B_1 \cap B_2) = m(B_1 \cap B_2) < 2\varepsilon\\ &\Rightarrow \mu^*(A) \geqslant \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) - 4\varepsilon\end{aligned}$$

则有

$$\mu^*(B_i) \geqslant \mu^*(A_i) - \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon$$

由 $\varepsilon > 0$ 任意性则有 $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$

推论 3.6 (Lebesgue 测度可数可加性)

设 X 为集合，集环 $\mathfrak{R}$ 为 X 的子集的集代数，$A \subset X$，$A = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$，其中 A, A_k 为 Lebesgue 可测集，则

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

♡

定理 3.11 (Lebesgue 可测集可数并 Lebesgue 可测性)

Lebesgue 可测集的可数并集也为 Lebesgue 可测集

♡

证明 设 A_i 为 Lebesgue 可测集，$A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，则有

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k', \quad A_1' = A_1, A_2' = A_2 \backslash A_1, \ldots, A_k' = A_k \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)$$

对于任意正整数 n 有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i' \subset A$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i') \leqslant \mu^*(A)$，进而 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i')$ 收敛，则有

$$\begin{aligned}(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}): &\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(A_i') < \varepsilon, \quad A \backslash \bigcup_{k=1}^{N} A_k' \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k'\\ \Rightarrow \mu^*&\left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{N} A_k'\right) < \varepsilon, \quad \bigcup_{k=1}^{N} A_k' \subset A \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{N} A_k' \backslash A = \varnothing\end{aligned}$$

即有

$$A \backslash \bigcup_{k=1}^{N} A_k' = A \Delta \bigcup_{k=1}^{N} A_k' \Rightarrow \mu^*\left(A \Delta \bigcup_{k=1}^{N} A_k'\right) < \varepsilon$$

则 A 为 Lebesgue 可测集

推论 3.7 (Lebesgue 可测集可数交 Lebesgue 可测性)

若集 A_i 为 Lebesgue 可测集，则 $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 也为 Lebesgue 可测集

♡

证明 应用对偶原理 (принцип двойственности)，由 $A = X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (X \backslash A_i)$ 即得

注 现考虑集 X 不存在有限测度的情况。则 $\mathfrak{R}$ 为环，但不是集代数

称测度 μ 为 σ 有限的，若

$$\exists X_k : X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k, \mu(X_k) < \infty$$

例题 3.2 $X = \mathbb{R} = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} [k; k+1), \mu([a; b)) = b - a$

定义 3.8

称集 $A \subset X$ 为可测的，若 $\forall k$ 集 $A \cap X_k$ 为 Lebesgue 可测的，设 $A_k = A \cap X_k$，这时有

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k, \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

♣

例题 3.3 （Lebegue 不可测集/Пример Витали）设 $I = [0; 1)$，定义等价关系 $x \sim y$，其中 $x - y \in \mathbb{Q} \cap [-1; 1)$，另外任意 $x \in I$ 都会属于某个等价类

设 M 为恰包含每个等价类中的一个点的集合，考虑

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(M + r_k) \,|(r_k \in \mathbb{Q} \cap [-1; 1))\} \Rightarrow [0; 1) \subset A \subset [-1; 2)$$

由 $(\forall x \in [0; 1))(\exists y \in M) : x - y = r_k \Rightarrow x = y + r_k \in M + r_k$ ，则集 $M + r_k, k = 1, 2, \ldots$ 不交（反之设 $x \in (M + r_k) \cap (M + r_m)$，则有 $x = y_1 + r_k = y_2 + r_m, r_m \neq r_k, \Rightarrow y_1 - y_2 = r_m - r_k \in \mathbb{Q} \Rightarrow y_1 \sim y_2$，这与 M 仅仅包含等价类中一个点矛盾）。反证：假设 M 为 Lebesgue 可测集，则 $M + r_k$ 为 Lebesgue 可测集，$\mu(M) = \mu(M + r_k)$，下分类讨论

1) 设 $\mu(M) = 0$，则有 $1 = \mu([0, 1)) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(M + r_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(M) = 0$ ，导出矛盾

2) 设 $\mu(M) > 0$，则 $3 = \mu([-1, 2)) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(M + r_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(M) = +\infty$ ，导出矛盾

则集 M 为 Lebesgue 不可测集

3.2.1.2 可测函数与可测性

借助抽象可测函数引入常用的可测函数的定义，指出结构可测函数体 (3.15)。最后指出相对于 Lebesgue 可测集的等价函数的概念

定义 3.9 (抽象可测函数)

设 X 和 Y 为二任意集，$\mathfrak{S}_X$ 和 $\mathfrak{S}_Y$ 为对应子集族，另设抽象函数 $f : X \to Y, x \mapsto y = f(x)$，若

$$(A \in \mathfrak{S}_Y) \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$$

则称 f 为 $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$ 可测函数

♣

定理 3.12 (抽象可测函数复合可测性)

设 X, Y, Z 为三个任意集，$\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y, \mathfrak{S}_Z$ 为对应子集族，又设函数 f 为 $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$ 可测函数，函数 g 为 $(\mathfrak{S}_Y, \mathfrak{S}_Z)$ 可测函数，则函数 $z = \varphi(x) \equiv g(f(x))$ 为 $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Z)$ 可测函数

♡

证明 若 $A \in \mathfrak{S}_Z$，则由函数 g 的 $(\mathfrak{S}_Y, \mathfrak{S}_Z)$ 可测性有 $g^{-1}(A) = B \in \mathfrak{S}_Y$。又由 f 的 $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$ 可测性，集 $f^{-1}(B) \in \mathfrak{S}_X$，即 $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) = \varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$，即函数 φ 为 $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Z)$ 可测函数

定义 3.10 (可测函数第一定义)

设 X 为一个在其上给定了一个在 σ 代数 $\mathfrak{S}_\mu$ 上有定义的 σ 可加测度 μ 的集，函数 $f(x)$ 为实函数，若对于实直线上任意 Borel 集 A 都有

$$f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu$$

则称实函数 $f(x)$ 在 X 上为 μ 可测函数，不引起歧义时称可测函数
特别地，若实直线上任意 Borel 集 A 的原像都为 Borel 集，则称 $f(x)$ 为 **Borel** 可测函数 ♣

注 （可测函数复变情形）
类似地，只需将实直线改为复平面，若实部和虚部都可测，则称复函数可测

定理 3.13 (实变函数可测性充要条件)

实变函数 $f(x)$ 为可测函数的充要条件为对于任意实数 c，集 $\{x : f(x) < c\}$ 为 Lebesgue 可测集 ♡

证明 必要性显然，因为 $(-\infty; c)$ 为一个 Borel 集。充分性：注意到，由一切射线 $(-\infty; c)$ 的集族 Σ 所生成的 σ 代数与直线上的一切 Borel 集的 σ 代数完全相同。但每一个 Borel 集的原像属于由那些属于 Σ 的半直线的原像所生成的 σ 代数，即实函数 f 为可测函数
注 由该定理导出更为常用的可测函数的第二定义

定义 3.11 (可测函数第二定义)

设 $f : X \to \mathbb{R}$，若 $(\forall c \in \mathbb{R})$ 都满足集 $M_c = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\}$ 为 Lebesgue 可测集，则称实变函数 $f(x)$ 为可测函数 ♣

定理 3.14 (可测函数必要条件)

设 $f(x)$ 为可测函数，则对于任意 $c \in \mathbb{R}$ 有集合

$$\bar{M}_c = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \leqslant c\}$$

为 Lebesgue 可测集 ♡

注 结论也可改为

$$\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} | f(x) < c + \frac{1}{k} \right\}$$

例题 3.4 （可测函数/Dirichlet 函数）Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

为可测函数
解 当 $c \leqslant 0$ 时有 $M_c = \varnothing$；当 $c \in (0; 1]$，则有 $M_c = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$；当 $c > 1$，则有 $M_c = \mathbb{R}$。上述集合均为 Lebesgue 可测集，则 $D(x)$ 为可测函数
注 类似地，设 A 为 Lebesgue 可测集，则指标函数 χ_A：

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

为可测函数

定理 3.15 (可测函数体)

全体可测函数关于函数的和与乘法运算构成体 ♡

证明 1) 若 f 可测，则对于任意常数 k 和 a，函数 kf 和 $a+f$ 显然可测

2) 若 f 和 g 可测，则集 $\{x : f(x) > g(x)\}$ 可测，因为

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}$$

其中求和为对按任意次序编号的一切有理数 r_k 遍历。由此得

$$\{x : f(x) > a - g(x)\} = \{x : f(x) + g(x) > a\}$$

可测，即可测函数之和可测

3) 由 1) 和 2) 即得差 $f-g$ 的可测性

4) 由 1)2)3) 和抽象可测函数复合可测性 (3.12) 即有恒等式

$$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$

右端为可测函数

5) 设 $g(x) \neq 0$，若 $c > 0$，则

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : f(x) > \frac{1}{c}\right\} \cup \{x : f(x) < 0\}$$

而若 $c < 0$，则

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : 0 > f(x) > \frac{1}{c}\right\}$$

而若 $c = 0$，则

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x : f(x) < c\}$$

右端均为 Lebesgue 可测集，则若 $f(x) \neq 0$ 可测，$\dfrac{1}{f(x)}$ 也可测。由 4) 和 5) 即得商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的可测性（在 $g(x) \neq 0$ 的条件下）

定义 3.12 (完备测度)

设 μ 为测度，若

$$(\forall A, B) : \{[(\mu(A) = 0) \wedge (B \subset A)] \Rightarrow (\mu(B) = 0)\}$$

则称 μ 为完备测度 **(полная мера)** ♣

注 （完备测度）

以下可测函数部分均假设测度为完备测度

定义 3.13 (等价函数)

若两个定义在同一 Lebesgue 可测集 E 上的函数 f 与 g 满足条件

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

则称函数 f 和 g 等价 ♣

注 （等价性）

在古典分析里函数的等价性概念不起重要作用，因为在古典分析里主要讨论一元或多元连续函数，而对这些函数等价性就相当于恒等性。确切地说，若两个在某一闭区间 E 上连续的函数 f 和 g 等价（Lebesgue 测度意义下），则它们恒等。事实上，若在任一点 x_0 上 $f(x_0) \neq g(x_0)$，则由 f 和 g 的连续性可找到点 x_0 的一个邻域，在该邻域内的一切点上有 $f(x) \neq g(x)$。这样的邻域的测度为正，因此连续函数不可能等价，除非它们恒等。

而对于任意可测函数，两个函数的等价性绝不表示两个函数恒等。例如，在实直线的有理点等于 1 而在无理点等于零的 Dirichlet 函数就与恒等于零的函数等价

定理 3.16 (等价函数可测性传递性)

若定义在 Lebesgue 可测集 E 上的函数 $f(x)$ 与在 E 上的某一可测函数 $g(x)$ 等价，则函数 $f(x)$ 也为可测函数

证明 由等价性定义推出集 $\{x : f(x) < a\}$ 与 $\{x : g(x) < a\}$ 彼此仅可能相差某一测度为零的集，则若它们中的第二个集可测，则第一个集也为可测的

3.2.1.3 可测函数序列逐点收敛，一致收敛，几乎处处收敛与沿测度收敛

本节依次证明了逐点收敛可测函数序列极限函数可测性，并得其推论一致收敛可测函数序列极限函数可测性和几乎处处收敛可测函数序列极限函数可测性。另外给出了揭示可测函数序列一致收敛与几乎处处收敛间联系的 Egorov 定理 (3.18)

最后指出作为可测函数序列沿测度收敛必要条件的从几乎处处收敛到沿测度收敛的 Lebesgue 定理 (3.19) 与作为可测函数序列沿测度收敛（有限制的）充分条件的从沿测度收敛到几乎处处收敛的 Riesz 定理 (3.20)，并举例 (3.5) 验证可测函数序列沿测度收敛为其几乎处处收敛的必要不充分条件

定理 3.17 (逐点收敛可测函数序列极限函数可测性)

设可测函数序列 $f_n(x)$ 逐点 (по-точечно) 收敛到 $f(x)$，则极限函数 $f(x)$ 为可测函数

证明 下考虑

$$M_c = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n+1}^{+\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

设 $x \in M_c$，则对于充分大的 k 有 $f(x) < c - \dfrac{1}{k}$。因为当 $m \to \infty$ 时 $f_m(x) \to f(x)$，则

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m > n) : f_m(x) < c - \frac{1}{k} \Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n+1}^{+\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

下设

$$x \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n+1}^{+\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

则有

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m > n) : f_m(x) < c - \frac{1}{k} \Rightarrow f(x) \leqslant c - \frac{1}{k} \Rightarrow f(x) < c \Rightarrow x \in M_c$$

则集合 $\left\{x \in \mathbb{R} : f_m(x) < c - \dfrac{1}{k}\right\}$ 中每一个均可测，因此 M_c 也可测，则 $f(x)$ 为可测函数

推论 3.8 (一致收敛可测函数序列极限函数可测性)

设可测函数序列 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$，则极限函数 $f(x)$ 为可测函数

定义 3.14 (函数序列几乎处处收敛)

设函数序列 $f_n(x)$ 定义在某一具有测度 μ 的集 X 上，若

$$\mu\left\{x \in X : \nexists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)\right\} = 0$$

则称函数序列几乎处处 (**почти всюду**) 收敛到函数 $f(x)$，记为 $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в}} f(x)$

推论 3.9 (几乎处处收敛可测函数序列极限函数可测性)

设可测函数序列 $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$，则极限函数 $f(x)$ 为可测函数

证明 设 $(\forall x \in X_0): f_n(x) \to f(x)$ 且 $\mu(X \backslash X_0) = 0$，则令

$$M_c = \{x \in \mathbb{R}: f(x) < c\} = (\{x: f(x) < c\} \cap X_0) \cup (\{x: f(x) < c\} \cap (X \backslash X_0)) = X_1 \cup X_2$$

由逐点收敛可测函数序列极限函数可测性 (3.17) 有 X_1 为 Lebesgue 可测集，而 X_2 为 Lebesgue 零测度集，则 X_2 也可测，因此 M_c 为 Lebesgue 可测集，且极限函数 $f(x)$ 在 X 上可测

定理 3.18 (Egorov 定理/теорема Егоров)

(Egorov 定理/теорема Егоров[a]) 设可测函数序列 $f_n(x)$ 在一个具有有限测度的集 E 上几乎处处收敛到 $f(x)$，则对于任意 $\delta > 0$ 总存在 Lebesgue 可测集 $E_\delta \subset E$ 满足

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$

2) 在集 E_δ 上序列 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$

[a] 德米特里 · 叶戈罗夫 (Дми́трий Фёдорович Его́ров,1869—1931) 俄罗斯及苏联数学家，主要贡献在微分几何、数学分析等领域。1911 年，叶戈罗夫发表了 Егоров 定理。1921 年，当选莫斯科数学学会会长。1923 年，成为莫斯科大学数学与力学学院院长

证明 由几乎处处收敛可测函数序列极限函数可测性 (3.9) 有，函数 $f(x)$ 为可测函数。下设

$$E_n^m = \bigcap_{i \geqslant n} \left\{x: |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}$$

又设 $E^m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^m$ ，由集 E_n^m 的定义，对于固定的 m 显然有

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \cdots \subset E_n^m \subset \cdots$$

则由测度连续性充要条件 (3.5)，根据 σ 可加测度的连续性有

$$(\forall m)(\forall \delta > 0)(\exists n_0(m): \mu\left(E^m \backslash E_{n_0(m)}^m\right) < \frac{\delta}{2^m}$$

令 $E_\delta = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$，下证，这样构造的 E_δ 满足定理的要求

首先证明在 E_δ 上序列 $\{f_i(x)\}$ 一致收敛于函数 $f(x)$。若 $x \in E_\delta$，则有

$$(\forall m)(\forall i \geqslant n_0(m)): |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

现估计集 $E \backslash E_\delta$ 的测度. 注意到，$(\forall m): \mu(E \backslash E^m) = 0$。若 $x_0 \in E \backslash E^m$，则有充分大的 i 存在，满足

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geqslant \frac{1}{m}$$

即序列 $\{f_n(x)\}$ 在点 x_0 不收敛于 $f(x)$。由条件，$\{f_n(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$，则 $\mu(E \backslash E^m) = 0$ ，由此推出

$$\mu\left(E \backslash E_{n_0(m)}^m\right) = \mu\left(E^m \backslash E_{n_0(m)}^m\right) < \frac{\delta}{2^m}$$

因此

$$\mu(E \backslash E_s) = \mu\left(E \backslash \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(E \backslash E_{n_0(m)}^m\right)\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(E \backslash E_{n_0(m)}^m\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta$$

定理得证

注 该定理揭示了几乎处处收敛与一致收敛间的关系

定理 3.19 (Lebesgue 定理/теорема Лебега)

若可测函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在集 X 上几乎处处收敛到 $f(x)$，则有 $f_n(x)$ 沿测度收敛到 $f(x)$

证明 仅需考虑逐点收敛的情形，设 $(\forall x \in X): f_n(x) \to f(x)$，则有对于 $(\forall \varepsilon > 0)$

$$E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}, R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$$

则有 $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \Rightarrow \mu(S) = \lim_{n\to\infty} \mu(R_n)$，下证 $S = \varnothing$

反证：设 $(\exists x_0 \in S = \cap R_n)$，则有

$$(\forall k_m)(\exists \{E_{k_m}\}): x_0 \in E_{k_m} \Rightarrow (\forall k_m): |f_{k_m}(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$$

与收敛条件矛盾。

若 $S = \varnothing$，则 $\mu(S) = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} \mu(R_n) = 0$，则由 $E_n \subset R_n$ 有

$$\mu(E_n) \leqslant \mu(R_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \mu(E_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$$

由此定理即证

定理 3.20 (Riesz 定理/теорема Рисса)

(Riesz 定理/теорема Рисса[a]) 若可测函数序列 $\{f_n(x)\}$ 沿测度收敛到函数 $f(x)$，则存在子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在集 X 上几乎处处收敛到 $f(x)$

[a] 弗里杰什 · 里斯 (匈牙利语：Riesz Frigyes,1880.1.22-1956.2.28) 匈牙利数学家，出生于奥地利（今匈牙利杰尔），卒于匈牙利布达佩斯，是匈牙利与瑞典数学家 Riesz Marcel 的哥哥。Riesz Frigyes 为现代泛函分析的主要创始人之一，其主要工作已与波兰数学家 Banach 合并，最出名的工作有 Riesz 表示定理，Riesz- Fischer 定理和 Riesz 空间

♡

证明 由沿测度收敛性，可以构造集列

$$E_k = \left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}$$

并满足 $\mu(E_k) \leqslant \frac{1}{2^k}$，下证 $f_{n_k}(x)$ 几乎处处收敛到 $f(x)$

设 $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots, \lim_{n\to\infty} R_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = S$，则有

$$\mu(R_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

则由测度连续性充要条件 (3.5) 有 $\mu(S) = \lim_{n\to\infty} \mu(R_n) = 0$

注意到 $(\forall x_0 \notin S)(\exists m \in \mathbb{N}^*): x_0 \notin R_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$，则有 $(\forall k \geqslant m): x_0 \notin E_k$。这时由集列 E_k 的定义有

$$(\forall k \geqslant m): |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{k}$$

即有 $f_{n_k}(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$，由 $x_0 \notin S$ 任意性即证 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 X 上几乎处处收敛到 $f(x)$

例题 3.5 （可测函数序列沿测度收敛但非几乎处处收敛例子）

从可测函数列按测度收敛一般推不出其为几乎处处收敛的，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，则在半开区间 $(0;1]$ 上定义 k 个函数 $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \cdots, f_k^{(k)}$，其中

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{当} \dfrac{i-1}{k} < x \leqslant \dfrac{i}{k} \text{ 时} \\ 0, & \text{当} x \text{ 为其余值时} \end{cases}$$

可以验证其按测度收敛到 0，但同时在每一点都不收敛

注 该例表明可测函数序列沿测度收敛为其几乎处处收敛的必要不充分条件

3.2.2 Lebesgue 积分基本概念

首先给出简单函数定义及函数简单性充要条件 (3.21)，并指出结构简单函数体 (3.22)，然后在可测函数的简单函数序列一致逼近 (3.23) 基础上给出简单函数 Lebesgue 积分的形式定义，再根据有限数量函数值一致收敛简单函数序列 Lebesgue 可积性 (3.24) 以及有限数量函数值一致收敛简单函数序列存在性 (3.25) 给出一般函数的 Lebesgue 积分的定义。然后给出一般函数 Lebesgue 可积的充分条件 (3.11) 和必要条件 (3.12)，一些 Lebegue 积分的基本性质以及好用的 Lebesgue 可积的判别法（Weierstrass 强函数 Lebesgue 可积判别法 (3.26) 和 Lebesgue 可积夹逼准则 (3.27)）

此外，引入测度和函数绝对连续的概念，给出测度绝对连续准则 (3.29) 和函数绝对连续充要条件 (3.30)。在此基础上给出了 Lebesgue 积分绝对连续性充要条件 (3.32)。另外，需指出 Lebesgue 积分 Chebyshev 不等式 (3.31) 的一个推论实际上即为 Lebesgue 积分绝对连续性充要条件 (3.32) 的特例

接着介绍逐项 Lebesgue 积分，亦即极限号下取积分的相关定理：Lebesgue 控制收敛定理 (3.33)，Levy 单调性定理 (3.34) 与 Fatou 定理 (3.35)。另外，介绍无穷测度的 Lebesgue 积分概念，而 Lebesgue 控制收敛定理 (3.33)，Levy 单调性定理 (3.34) 与 Fatou 定理 (3.35) 在无穷测度情形也正确

最后，给出定理 (3.36) 表明 Lebesgue 积分是对常义 Riemann 积分定义的推广，并指出在反常积分的情形可能存在 Riemann 积分但不存在 Lebesgue 积分

3.2.2.1 简单函数与 Lebesgue 积分

本节给出简单函数定义及函数简单性充要条件 (3.21)，并指出结构简单函数体 (3.22)

然后在可测函数的简单函数序列一致逼近 (3.23) 基础上给出了简单函数 Lebesgue 积分的形式定义，再根据有限数量函数值一致收敛简单函数序列 Lebesgue 可积性 (3.24) 以及有限数量函数值一致收敛简单函数序列存在性 (3.25) 给出了一般函数的 Lebesgue 积分的定义。

最后给出一般函数 Lebesgue 可积的充分条件 (3.11) 和必要条件 (3.12)，一些 Lebegue 积分的基本性质以及好用的 Lebesgue 可积的判别法（Weierstrass 强函数 Lebesgue 可积判别法 (3.26) 和 Lebesgue 可积夹逼准则 (3.27)）

定义 3.15 (简单函数)

若定义在集 X 上的函数 $f(x)$ 为可测函数且取至多可数数量的函数值，则称 $f(x)$ 为简单函数 **(простая функция)** ♣

定理 3.21 (函数简单性充要条件)

定义在集 X 上函数 $f(x)$ 为简单函数的充要条件为存在 Lebesgue 可测集族 A_i 满足 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 且 $(\forall x\in A_i): f(x)\equiv y_i$，其中 y_i 为常数 ♡

证明 必要性：设 $f(x)$ 为简单函数，则 $f(x)$ 可取至多可数数量的值 $y_1,y_2,\dots$，设

$$A_k=\{x|f(x)=y_k\}=\{x|f(x)\leqslant y_k\}\setminus\{x|f(x)<y_k\}$$

则有 A_k 为 Lebesgue 可测集，则 $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$

充分性：注意 $M_c=\{x:f(x)<c\}=\bigcup\limits_{k}\{A_k:y_k<c\}$ 为 Lebesgue 可测集，则函数 $f(x)$ 为可测函数，进而为简单函数

定理 3.22 (简单函数体)

全体简单函数与函数的和与乘法运算构成体 ♡

证明 (不完全证明)设函数 $f(x), g(x)$ 为定义在 X 上简单函数，下证

$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$$

也为简单函数。由简单函数定义有存在可测集族 A_k, B_m 满足

$$(X = \bigcup_k A_k) \wedge [(\forall x \in A_k) : f(x) \equiv y_k]; \quad (X = \bigcup_m B_m) \wedge [(\forall x \in B_m) : g(x) \equiv z_m]$$

则有 $X = \bigcup\limits_{k,m} A_k \cap B_m$，且满足

$$(\forall x \in A_k \cap B_m) : f(x) \pm g(x) \equiv y_k \pm z_m, f(x)g(x) \equiv y_k z_m, \frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{y_k}{z_m}$$

定理即证

定理 3.23 (可测函数的简单函数序列一致收敛逼近)

设在集 X 上可测函数 $f(x)$，则存在当 $n \to \infty$ 时在 $x \in X$ 上一致收敛到 $f(x)$ 的简单函数序列 $f_n(x)$，形式化即存在简单函数序列 $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$

证明 设 $E_n^m = \left\{x \in X : \frac{m}{n} < f(x) \leqslant \frac{m+1}{n}\right\}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$，且有 $(\forall x \in E_n^m) : f_n(x) = \frac{m}{n}$，显然 $f_n(x)$ 为简单函数序列，则有

$$(\forall x \in X) : |f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

即 $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} f(x)$，定理即证

注 基于该定理，引入所谓 Lebesgue 积分。不过在引入之前，先借助该定理给出可测函数的算术封闭性 (3.10)

推论 3.10 (可测函数算术封闭性)

设函数 $f(x), g(x)$ 为定义在 X 上可测函数，则

$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}((\forall x \in X) : g(x) \neq 0)$$

也为可测函数

证明 由可测函数的简单函数序列一致收敛逼近 (3.23) 即有简单函数序列 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), g_n(x) \rightrightarrows g(x)$，则有

$$f_n(x) \pm g_n(x) \rightrightarrows f(x) \pm g(x), f_n(x)g_n(x) \rightrightarrows f(x)g(x), \frac{f_n(x)}{g_n(x)} \rightrightarrows \frac{f(x)}{g(x)}$$

推论即证

注 实际上，定理 (3.15) 已经证明了这里的结论，此处仅指出其为可测函数的简单函数序列一致收敛逼近 (3.23) 的应用

定义 3.16 (简单函数 Lebesgue 积分)

设 f 为取至多可数数量函数值

$$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots, \quad (\forall i \neq j) : y_i \neq y_j$$

的简单函数，又设 A 为 X 的 Lebesgue 可测子集。则形式上定义

$$\int_A f(x) \mathrm{d}\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \quad A_n = \{x \in A | f(x) = y_n\}$$

若右端级数绝对收敛，则称简单函数 f 在集 A 上 (沿测度 μ) Lebesgue 可积；若简单函数 f 在集 A 上沿测度 μ 可积，则称 $\int_A f(x) \mathrm{d}\mu$ 为简单函数 f 在集 A 上的 Lebesgue 积分

定理 3.24 (有限数量函数值一致收敛简单函数序列 Lebesgue 可积性)

若在 Lebesgue 可测集 X 上取有限数量函数值的简单函数序列 $f_n(x)$ 一致收敛，则有且仅有一个不依赖于简单函数序列选择的极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu$$

♡

证明 存在性：显然有

$$\left|\int_X f_n(x)d\mu-\int_X f_m(x)d\mu\right|=\left|\int_X (f_n(x)-f_m(x))\,d\mu\right|\leqslant \max_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)|\cdot\mu(X)$$

注意到，由条件简单函数序列 $f_n(x)$ 仅取有限数量函数值（以及测度有限性的假设），则得不等式右端有限性，则由函数序列一致收敛 Cauchy 准则，有

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall x\in X)(\exists N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*)(\forall m,n\in\mathbb{N}^*):$$
$$\left[(m,n>N(\varepsilon))\Rightarrow\left(\max_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)|\cdot\mu(X)<\varepsilon\right)\right]$$

则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*)(\forall m,n\in\mathbb{N}^*):\left[(m,n>N_1(\varepsilon))\Rightarrow\left(\left|\int_X f_n(x)d\mu-\int_X f_m(x)d\mu\right|<\varepsilon\right)\right]$$

则由数值序列收敛 Cauchy 准则 (??) 有存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu$，下形式化记

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu=\int_X f(x)d\mu$$

唯一性：现假设存在另一个一致收敛到同一极限函数的简单函数序列 $g_n(x)$，则固定 x，由数值序列收敛 Cauchy 准则 (??) 有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*)(\forall n>N_2(\varepsilon)):\max_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\cdot\mu(X)<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_3(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*)(\forall n>N_3(\varepsilon)):\max_{x\in X}|g_n(x)-f(x)|\cdot\mu(X)<\frac{\varepsilon}{2}$$

则显然当 $n>N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$ 时，由

$$\begin{aligned}\left|\int_X f_n(x)d\mu-\int_X g_n(x)d\mu\right|&=\left|\int_X (f_n(x)-f(x))-(g_n(x)-f(x))d\mu\right|\\&\leqslant\left|\int_X f_n(x)d\mu-\int_X f(x)d\mu\right|+\left|\int_X g_n(x)d\mu-\int_X f(x)d\mu\right|\\&\leqslant\max_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\cdot\mu(X)+\max_{x\in X}|g_n(x)-f(x)|\cdot\mu(X)=\varepsilon\end{aligned}$$

则有

$$(\forall\varepsilon>0)\in\mathbb{N}^*)(\forall m,n\in\mathbb{N}^*):\left[(m,n>N)\Rightarrow\left(\left|\int_X f_n(x)d\mu-\int_X g_n(x)d\mu\right|<\varepsilon\right)\right]$$

则有

$$\int_X g_n(x)d\mu\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu=\int_X f(x)d\mu$$

定理即证

注 该引理表明，借助简单函数序列的 Lebesgue 积分，可给出一般情况的 Lebesgue 积分的定义。不过为了说明定义的正确性，在给出一般情况定义之前，先给出满足引理条件的简单函数序列存在的充分条件

定理 3.25 (有限数量函数值一致收敛简单函数序列存在充分条件)

若函数 $f(x)$ 为有界可测函数，则存在取有限数量函数值的简单函数序列 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$

♡

证明 设 $(\forall x\in X):|f(x)|\leqslant M$，观察集合

$$E_n^m=\left\{x\in X:\frac{m}{n}<f(x)\leqslant\frac{m+1}{n}\right\},X=\bigcup_{m=-L}^{L}E_n^m,L=[nM]+1$$

再设 $f_n(x)=\dfrac{m}{n}$，其中 $x\in E_n^m$，这时 $0\leqslant|f(x)-f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n}$，且 $f_n(x)$ 均取有限数量值，满足定理条件

定义 3.17 (Lebesgue 积分)

设取有限数量函数值的简单函数序列 $f_n(x)$ 在 Lebesgue 可测集 X 上一致收敛到极限函数 $f(x)$，则称

$$L\int_X f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu$$

为函数 f 在集 X 上的 **Lebesgue** 积分，不引起歧义时，也经常简记为

$$\int_X f(x)d\mu$$

并称函数 f 在集 X 上 **Lebesgue** 可积

♣

推论 3.11 (Lebesgue 可积充分条件)

任意有界可测函数均 Lebesgue 可积

♡

证明 设 Lebesgue 可测集 X 上函数 $f(x)$ 为有界可测函数，由定理 (3.25) 可得存在有限数量函数值简单函数序列 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，则由简单函数 Lebesgue 积分定义有

$$\int_X f_n(x)d\mu=\sum_m\frac{m}{n}\mu\left\{x\in X:\frac{m}{n}<f(x)\leqslant\frac{m+1}{n}\right\}$$

又由引理 (3.24) 则存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu=L\int_X f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_m\frac{m}{n}\mu\left\{x\in X:\frac{m}{n}<f(x)\leqslant\frac{m+1}{n}\right\}$$

推论即证

推论 3.12 (Lebesgue 可积必要条件)

设函数 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则若取有限数量函数值的简单函数序列 $\{g_n(x)\}$ 一致收敛到 $f(x)$，有从某序号 n 开始，函数 $g_n(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

♡

证明 由定理 (3.25) 可得存在有限数量函数值简单函数序列 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_1(\varepsilon))(\forall n\geqslant N_1)(\forall x\in X):|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_2(\varepsilon))(\forall n\geqslant N_2)(\forall x\in X):|f(x)-g_n(x)|<\varepsilon$$

则当 $n\geqslant N=\max\{N_1,N_2\}$ 时有 $|g_n(x)|<|f(x)|+\varepsilon<|f_n(x)|+2\varepsilon$，下设

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}z_k\chi_{B_k}(x),f_n(x)=\sum_{j=1}^{+\infty}f_j\chi_{A_j}(x),\sum_{j=1}^{+\infty}|f_j|\,\mu\left(A_j\right)<\infty$$

$$X=\bigcup_{k=1}^{+\infty}B_k=\bigcup_{j=1}^{+\infty}A_j=\bigcup_{k,j}\left(A_j\cap B_k\right)$$

则有

$$\infty>\sum_{j=1}^{+\infty}|f_j|\,\mu\left(A_j\right)=\sum_{k,j=1}^{+\infty}|f_j|\,\mu\left(A_j\cap B_k\right)>\sum_{k,j=1}^{+\infty}\left(|z_k|-2\varepsilon\right)\mu\left(A_j\cap B_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|\,\mu\left(B_k\right)-2\varepsilon\mu(X)\Rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}|z_k|\,\mu\left(B_k\right)<\infty$$

则有 $g_n(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

例题 3.6 （Lebesgue 可积必要条件）设简单函数

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ n, & 0<x\leqslant \dfrac{1}{n}\\ 0, & \dfrac{1}{n}<x\leqslant 1\end{cases}$$

则有

$$\int_X f_n(x)d\mu = n\cdot\frac{1}{n}=1$$

但这时 $(\forall x\in X): f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$，因此

$$1=\int_X f_n(x)d\mu \not\Rightarrow \int_X f(x)d\mu=0$$

注 该例表明在 Lebesgue 可积必要条件 (3.12) 中不可以用逐点收敛来代替一致收敛

性质 （Lebesgue 积分可加性）

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则 $f(x)+g(x)$ 也在集 X 上 Lebesgue 可积，且有

$$\int_X (f(x)+g(x))d\mu=\int_X f(x)d\mu+\int_X g(x)d\mu$$

证明 1) 先证明对于简单函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 定理成立。现设

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} y_k\chi_{A_k}(x),\quad g(x)=\sum_{j=1}^{+\infty} z_j\chi_{B_j}(x),\quad X=\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k=\bigcup_{j=1}^{+\infty}B_j$$

则有

$$f(x)+g(x)=\sum_{k,j=1}^{+\infty}(y_k+z_j)\,\chi_{A_k\cap B_j}(x)$$

进而

$$\begin{aligned}\sum_{k,j=1}^{+\infty}|y_k+z_j|\,\mu(A_k\cap B_j)&\leqslant\sum_{k,j=1}^{+\infty}|y_k|\,\mu(A_k\cap B_j)+\sum_{k,j=1}^{+\infty}|z_j|\,\mu(A_k\cap B_j)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}|y_k|\,\mu(A_k)+\sum_{j=1}^{+\infty}|z_j|\,\mu(B_j)<\infty\end{aligned}$$

则 $f(x)+g(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则有

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))d\mu&=\sum_{k,j=1}^{+\infty}(y_k+z_j)\,\mu(A_k\cap B_j)=\sum_{k=1}^{+\infty}y_k\mu(A_k)+\sum_{j=1}^{+\infty}z_j\mu(B_j)\\&=\int_X f(x)d\mu+\int_X g(x)d\mu\end{aligned}$$

2) 现证对于任意在集 X 上 Lebesgue 可积的 $f(x),g(x)$ 定理成立。由定理 (3.25) 可得存在有限数量函数值简单函数序列 $f_n(x)$ 与 $g_n(x)$，满足 $f_n(x)\rightrightarrows f(x), g_n(x)\rightrightarrows g(x)$

由 1) 有函数 $f_n(x)+g_n(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则由 $f_n(x)+g_n(x)\rightrightarrows f(x)+g(x)$，有 $f(x)+g(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则有

$$\begin{aligned}&\int_X (f_n(x)+g_n(x))\,d\mu=\int_X f_n(x)d\mu+\int_X g_n(x)d\mu\\ \Rightarrow&\int_X (f(x)+g(x))d\mu=\int_X f(x)d\mu+\int_X g(x)d\mu\end{aligned}$$

定理得证

性质 （Lebesgue 积分模性）

若函数 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则对于任意 $\in \mathbb{R}$ 有函数 $cf(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，且有

$$\int_X cf(x)d\mu = c\int_X f(x)d\mu$$

证明 1) 先对简单函数情形证明，由

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k \chi_{A_k}(x), \sum_{k=1}^{+\infty} |y_k| \mu(A_k) < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c| \cdot |y_k| \mu(A_k) < \infty$$

则有 $cf(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，且有

$$\int_X cf(x)d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} (cy_k)\mu(A_k) = c\sum_{k=1}^{+\infty} y_k \mu(A_k) = c\int_X f(x)d\mu$$

2) 若 $f(x)$Lebesgue 可积，则由定理 (3.25) 可得存在有限数量函数值简单函数序列 $f_n(x)$ 满足 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$，于是函数 $cf_n(x) \rightrightarrows cf(x)$，则有 $cf(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，且有

$$\int_X cf_n(x)d\mu = c\int_X f_n(x)d\mu \Rightarrow \int_X cf(x)d\mu = c\int_X f(x)d\mu$$

性质即证

性质 （Lebesgue 积分单调性）

若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积且 $f_1(x) \leqslant f_2(x)$，则

$$\int_X f_1(x)d\mu \leqslant \int_X f_2(x)d\mu$$

证明 设 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积且有界，设

$$\left(\forall x \in E_n^m = \left\{x : \frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}\right\}\right) : f_n(x) = \frac{m}{n}, \quad X = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{x : \frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}\right\}$$

则有简单函数序列 $f_n(x)$ 满足

$$(\forall x \in X)(0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}) \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$$

又由 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 有界有

$$(\exists c \in R)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in E_n^m) : f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant c$$

由 Lebesgue 可积必要条件 (3.12) 有，从某个序号 n 开始，函数 $f_n(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则由简单函数 Lebesgue 积分定义有

$$\begin{aligned}\int_X f_n(x)d\mu &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{m}{n}\mu\left\{x : \frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}\right\} \\ &\leqslant c\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mu\left\{x : \frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}\right\} = c\mu(X)\end{aligned}$$

则由 Lebesgue 积分定义有

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu \leqslant c\mu(X)$$

由条件 $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ 有 $f_1(x) - f_2(x) \leqslant 0$，则有

$$\int_X (f_1(x) - f_2(x))\, d\mu \leqslant c'\mu(X) \leqslant 0$$

则有

$$\int_X f_1(x)d\mu - \int_X f_2(x)d\mu = \int_X (f_1(x) - f_2(x))\, d\mu \leqslant 0$$

性质即证

性质 （Lebesgue 积分对范数保序性）

若函数 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则 $|f(x)|$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，且

$$\left|\int_X f(x)d\mu\right| \leqslant \int_X |f(x)|d\mu$$

证明 1) 若 $f(x)$ 为简单函数，则可设

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} y_k\chi_{A_k}(x),\quad \sum_{k=1}^{+\infty}|y_k|\,\mu\left(A_k\right)<\infty$$

即有 $|f(x)|$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

2) 对于任意在集 X 上 Lebesgue 可积的 $f(x)$，存在取有限数量值的简单函数序列 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$，则 $|f_n(x)| \rightrightarrows |f(x)|$，则 $|f(x)|$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，且有

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \Rightarrow -\int_X |f(x)|d\mu \leqslant \int_X f(x)d\mu \leqslant \int_X |f(x)|d\mu$$

性质即证

例题 3.7 （Lebesgue 积分对范数保序性）设

$$f(x)=\begin{cases}+1, & x\in E\\ -1, & x\notin E\end{cases}$$

其中 E 为 Lebesgue 不可测集，则 $|f(x)|$ 在变集上 Lebesgue 可积，但 $f(x)$ 在变集上不可测且非 Lebesgue 可积

注 该例表明性质 (3.2.2.1) 中条件函数 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积是不可缺少的

性质 （不交并上 Lebesgue 积分可加性）

设集族 A_n 均为 Lebesgue 可测集，$A=\bigcup\limits_n A_n$，且 $(\forall i\neq j): A_i\cap A_j=\varnothing$，若 f 在集 A 上 Lebesgue 可积，则有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu=\sum_n\int_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu$$

且从左端积分存在性可得右端积分存在性，并且由右端积分所构成的级数绝对收敛

证明 1) 首先对取函数值为 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$ 的简单函数 f 证明。设

$$B_k=\{x:x\in A, f(x)=y_k\},\quad B_{nk}=\{x:x\in A_n, f(x)=y_k\}$$

则有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu=\sum_k y_k\mu\left(B_k\right)=\sum_k y_k\sum_n\mu\left(B_{nk}\right)=\sum_n\sum_k y_k\mu\left(B_{nk}\right)=\sum_n\int_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu$$

由条件级数 $\sum\limits_k y_k\mu\left(B_k\right)$ 绝对收敛，而集测度非负，则上式中其余级数也绝对收敛

2) 在任意函数 f 的情形，由 f 在 A 上 Lebesgue 可积有，对于任意 $\varepsilon>0$ 总存在在 A 上 Lebesgue 可积的简单函数 g 满足

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon \tag{3.1}$$

而对于 g 有

$$\int_A g(x)\mathrm{d}\mu=\sum_n\int_{A_n} g(x)\mathrm{d}\mu \tag{3.2}$$

且 g 在每一个集 A_n 上 Lebesgue 可积，则该级数绝对收敛。从后面这个情况以及估计 (3.2) 即有 f 在每个 A_n 上也 Lebesgue 可积，且有

$$\sum_n\left|\int_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu-\int_{A_n} g(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \sum_n\varepsilon\mu\left(A_n\right)=\varepsilon\mu(A)$$

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}\mu-\int_A g(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \varepsilon\mu(A)$$

再根据式 (3.2) 即得级数 $\sum\limits_n \int_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu$ 绝对收敛，且有估计

$$\left|\sum_n \int_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu - \int_A f(x)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant 2\varepsilon\mu(A)$$

由 $\varepsilon > 0$ 任意性，则有

$$\sum_n \int_{A_n} f(x)\mathrm{d}\mu = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu$$

性质即证

性质 （完备测度 Lebesgue 零测度集 Lebesgue 积分零性）

设 $E \subset X, \mu(E) = 0$（测度假设为完备测度），则若函数 $f(x)$ 在集 E 上 Lebesgue 可积，则有

$$\int_E f(x)d\mu = 0$$

证明 在完备测度假设下，E 为 Lebesgue 可测集，因此 $f(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可测

1) 设 $f(x)$ 为简单函数，则有 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} y_k\chi_{A_k}(x), \chi_E(x)f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} y_k\chi_{A_k\cap E}(x)$，由 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |y_k|\,\mu\left(A_k \cap E\right) = 0$ 即有存在 Lebesgue 积分

$$\int_E f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k\mu\left(A_k \cap E\right) = 0$$

2) 对于任意函数 $f(x)$ 得情形，设 $E_n^m = \left\{x : \frac{m}{n} < f(x) \leqslant \frac{m+1}{n}\right\}, (x \in E_n^m) : f_n(x) = \frac{m}{n}$，则 $0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}, f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$，则有 $f_n(x)\chi_E(x) \rightrightarrows f(x)\chi_E(x)$，因此存在 Lebesgue 积分

$$\int_X f(x)\chi_E(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\chi_E(x)d\mu = 0$$

性质即证

性质 （几乎处处为零函数 Lebesgue 积分零性）

若在集 X 上函数 $f(x)$ 几乎处处为零，则 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，且有

$$\int_X f(x)d\mu = 0$$

证明 由条件则有 $(\forall x \in E) : f(x) = 0$ 且 $(\forall x \in \tilde{E}) : f(x) \neq 0$，其中 $E \cup \tilde{E} = X, \mu(\tilde{E}) = 0$，则函数 $f(x)$ 在集 $\tilde{E}$ 与 E 上 Lebesgue 可积，因此 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，且有

$$\int_X f(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu + \int_{\tilde{E}} f(x)d\mu = 0$$

定理即证

推论 3.13

设在集 X 上几乎处处 $f(x) = g(x)$，若 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则有 $g(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

♡

定理 3.26 (Weierstrass 强函数 Lebesgue 可积判别法)

设 $f(x)$ 为集 X 上可测函数，且 $(\forall x \in X) : |f(x)| \leqslant \varphi(x)$，若函数 $\varphi(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

♡

证明 1) 考虑 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 为简单函数的情况，并设

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k\chi_{A_k}(x), \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} z_j\chi_{B_j}(x), \quad \sum_{j=1}^{+\infty} |z_j|\,\mu\left(B_j\right) < \infty$$

则由 $A_k=\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}(A_k\cap B_j)$ 有

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|y_k|\,\mu\left(A_k\right)=\sum_{k,j=1}^{+\infty}|y_k|\,\mu\left(A_k\cap B_j\right)\leqslant\sum_{k,j=1}^{+\infty}z_j\mu\left(A_k\cap B_j\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}z_j\mu\left(B_j\right)<\infty$$

则函数 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

2) 现考虑函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 为任意函数情形。则由定理 (3.25) 可得存在有限数量函数值简单函数序列 $\varphi_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$ 与 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N}^*)(\forall n\geqslant N)(\forall x\in X):|\varphi(x)-\varphi_n(x)|<\varepsilon,|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

则有

$$|f_n(x)|<|f(x)|+\varepsilon\leqslant\varphi(x)+\varepsilon\leqslant|\varphi_n(x)|+2\varepsilon$$

则由 1) 函数 $f_n(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，则 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

定理 3.27 (Lebesgue 可积夹逼准则)

若 $(\forall x\in X):f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$，且函数 $f_1(x),f_2(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，而 $f(x)$ 为可测函数，则 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

♡

证明 由条件有 $(\forall x\in X):|f(x)|\leqslant|f_1(x)|+|f_2(x)|$，则由 $|f_1(x)|,|f_2(x)|$ 在集 X 上 Lebesgue 可积有 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积

3.2.2.2 绝对连续与 Lebesgue 积分绝对连续性

本节引入了测度和函数绝对连续的概念，给出了测度绝对连续准则 (3.29) 和函数绝对连续充要条件 (3.30)。在此基础上给出了 Lebesgue 积分绝对连续性充要条件 (3.32)。另外，需指出 Lebesgue 积分 Chebyshev 不等式 (3.31) 的一个推论实际上即为 Lebesgue 积分绝对连续性充要条件 (3.32) 的特例

定义 3.18 (函数左连续)

设函数 $F(t)$，若

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall t):[(t_0-\delta<t<t_0)\Rightarrow(F\left(t_0\right)-F(t)<\varepsilon)]$$

则称函数 $F(t)$ 在点 t_0 处左连续 **(непрерывна слева)**

♣

定理 3.28 (广义半开半闭区间测度左连续充要条件)

设 $F(t)$ 为单调递增函数集，并设 $\mu([a,b))=F(b)-F(a)$，则函数 $F(t)$ 在点 t_0 处左连续的充要条件为测度 μ 可数可加

♡

证明 充分性：观察任意序列 $\{b_n\}:b_n\to b,b_n<b$，仅需证 $F\left(b_n\right)\to F(b)$。注意到 $[0;b_1)\subset[0;b_2)\subset\ldots\subset[0;b_n)\subset\ldots\subset[0;b)$，则测度可数可加与环上测度连续性充要条件 (3.5) 有

$$\mu([0;b))=\lim_{n\to\infty}\mu\left([0;b_n)\right)\Rightarrow F\left(b_n\right)\to F(b)$$

必要性：设 $[a;b)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k;b_k)$，由定理 (3.6) 即有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu\left([a_k,b_k)\right)\leqslant\mu([a;b))$，下证明相反的不等式

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists a_k')([a_k,b_k)\subset(a_k',b_k)):F\left(a_k\right)-F\left(a_k'\right)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists b')([a;b']\subset[a;b)):F(b)-F\left(b'\right)<\varepsilon$$

则有

$$
\begin{aligned}
[a;b'] \subset [a;b) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k;b_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k';b_k) \Rightarrow (\exists N\in\mathbb{N}) : [a;b'] \subset \bigcup_{k=1}^{N}(a_k';b_k) \\
\Rightarrow F(b') - F(a) \leqslant \sum_{k=1}^{N}(F(b_k) - F(a_k')) \leqslant \sum_{k=1}^{N}(F(b_k) - F(a_k)) + \varepsilon \\
\Rightarrow F(b) - F(a) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) + 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

定理即证

定义 3.19 (测度绝对连续)

设 μ 为测度，若

$$(\forall A) : [(\mu(A)=0) \Rightarrow (\nu(A)=0)]$$

则称 ν 相对于测度 μ 绝对连续 **(абсолютно непрерывна)**

定理 3.29 (绝对连续准则/критерий абсолютной непрерывности)

设 μ,ν 为可数可加测度，则测度 ν 相对于测度 μ 绝对连续的充要条件为

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall A) : [(\mu(A)<\delta) \Rightarrow (\nu(A)<\varepsilon)]$$

证明 充分性：设 $\mu(A)=0$ 且满足条件

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall A) : [(\mu(A)<\delta) \Rightarrow (\nu(A)<\varepsilon)]$$

则 $(\forall\varepsilon>0) : \nu(A)<\varepsilon$，则 $\nu(A)=0$

必要性：反证：假设

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall k\in\mathbb{N})(\exists A_k) : \left[\left(\mu(A_k)<\frac{\delta}{2^k}\right) \Rightarrow (\nu(A_k)\geqslant\varepsilon)\right]$$

再设 $U_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \supset U_{n+1} \supset U_{n+2} \supset \ldots$，则由环上测度连续性充要条件 (3.5) 有

$$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \Rightarrow \mu(U) = \lim_{n\to\infty}\mu(U_n) = 0, \nu(U) = \lim_{n\to\infty}\nu(U_n) \geqslant \varepsilon$$

但这时由绝对连续性有 $\nu(U)=0$，矛盾

定义 3.20 (函数绝对连续)

设函数 $F(t)$ ，若

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\{a_i,b_i\}) : \left[\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta\right) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(F(b_i)-F(a_i))<\varepsilon\right)\right]$$

其中区间 (a_i,b_i) 两两不交，$n\in\mathbb{N}$，则称函数 $F(t)$ 绝对连续 **(абсолютно непрерывна)**

定理 3.30 (函数绝对连续充要条件)

设 μ 为 Lebesgue 测度，而 ν 为由在 Borel 集 σ 代数上的函数 $F(t)$ 生成的可数可加测度，则函数 $F(t)$ 绝对连续的充要条件为测度 ν 相对于测度 μ 绝对连续

证明 充分性：设 ν 相对于 μ 绝对连续。观察集合 $A=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i;b_i)$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$$

由绝对连续准则 (3.29) 有 $\nu(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)<\varepsilon$ ，则有函数 $F(t)$ 绝对连续

必要性：设 $F(t)$ 绝对连续，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\{a_i;b_i\}):\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)<\delta\right)\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)<\varepsilon\right)\right]$$

设 $\mu(A)=0$，则存在半开半闭区间族 $[a_i;b_i)$ 满足当 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}[a_i;b_i)$ 时

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(b_i-a_i\right)<\delta\Rightarrow\nu(A)\leqslant\sum_{i=1}^{+\infty}\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)<\varepsilon$$

再令 $n\to+\infty$ 即有 $F(t)$ 绝对连续

定义 3.21 (Lebesgue 可测)

设集 A，若对于任何 $\varepsilon>0$ 总可以找到这样的 $B\in\Re(\subseteq_m)$ 使得

$$\mu^*(A\triangle B)<\varepsilon$$

则称集 A 为 Lebesgue 可测的。称仅在可测集上定义的函数 μ^* 为 Lebesgue 测度，记为 μ。显然 $\mathfrak{S}_m$ 里和 $\Re(\mathfrak{S}_m)$ 里的所有的集都是 Lebesgue 可测的，这时若 $A\in\mathfrak{S}_m$，则有

$$\mu(A)=m(A)$$

♣

例题 3.8 （Cantor 阶梯/Канторова лестница）设 K 为 Cantor 集，且有 Cantor 阶梯函数

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=G_1\\ \frac{1}{4} & ,x\in\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\subset G_2\\ \frac{3}{4} & ,x\in\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\subset G_2\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

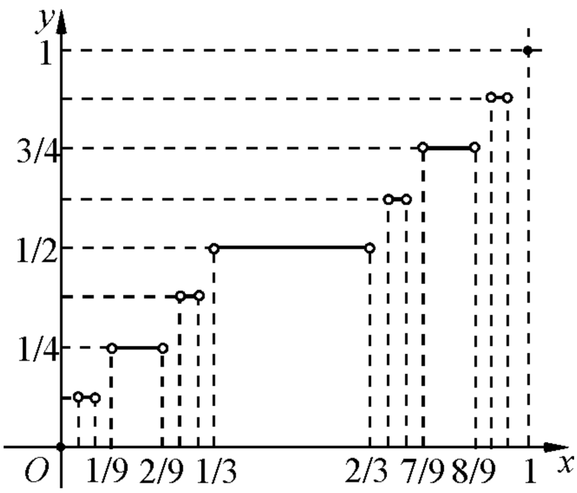

图 3.1: Cantor 阶梯函数

由

$$(\forall x_0\in K):F\left(x_0+\frac{1}{3^n}\right)-F\left(x_0-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2^{n-1}}$$

有函数 $F(x)$ 连续

下设 $(\forall a<b):\nu([a,b))=F(b)-F(a)$ ，则由 $\mu(K)=0$ 与 $(\forall k):\nu\left(G_k\right)=0$

$$\nu(K)=\nu\left([0,1]\backslash\cup G_k\right)=1-\sum_{k=1}^{\infty}\nu\left(G_k\right)=1$$

则 $F(x)$ 不绝对连续

注 该例表明存在连续但不绝对连续的函数

定理 3.31 (Lebesgue 积分 Chebyshev 不等式/неравенство Чебышёва)

设非负函数 $f(x)$ 在集 A 上 Lebesgue 可积，$c>0$，则有

$$\mu\{x\in A|f(x)\geqslant c\}\leqslant\frac{1}{c}\int_A f(x)\mathrm{d}\mu$$

证明 设 $A'=\{x\in A|\varphi(x)\geqslant c\}$，由性质 (3.2.2.1) 则有

$$\int_A\varphi(x)\mathrm{d}\mu=\int_{A'}\varphi(x)\mathrm{d}\mu+\int_{A\backslash A'}\varphi(x)\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{A'}\varphi(x)\mathrm{d}\mu\geqslant c\mu\left(A'\right)$$

定理即证

推论 3.14

若 Lebesgue 积分

$$\int_A|f(x)|\mathrm{d}\mu=0$$

则几乎处处有 $f(x)=0$

证明 由 Chebyshev 不等式 (3.31) 有

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*:\mu\left\{x\in A||f(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}\leqslant n\int_A|f(x)|\mathrm{d}\mu=0$$

则有

$$\mu\{x:x\in A,f(x)\neq 0\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left\{x:x\in A,|f(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}=0$$

推论即证

注 该推论实际上为下面 Lebesgue 积分绝对连续性 (3.32) 的极端情况

定理 3.32 (Lebesgue 积分绝对连续性)

设函数 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积，$A\subset X$ 且 A 为 Lebesgue 可测集，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\left[(\mu(A)<\delta)\Rightarrow\left|\int_A f(x)d\mu\right|<\varepsilon\right]$$

证明 1) 设 $f(x)$ 为简单函数，则设

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}y_k\chi_{A_k}(x),\sum_{k=1}^{+\infty}|y_k|\,\mu\left(A_k\right)<\infty$$

则有估计

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_1\in\mathbb{N}^*):\sum_{k=N+1}^{\infty}|y_k|\,\mu\left(A_k\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

则有

$$\begin{aligned}\left|\int_A f(x)d\mu\right|&=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}y_k\mu\left(A_k\cap A\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{N}|y_k|\cdot\mu\left(A_k\cap A\right)+\sum_{k=N+1}^{+\infty}|y_k|\cdot\mu\left(A_k\cap A\right)\\&<\sum_{k=1}^{N}|y_k|\cdot\mu\left(A_k\cap A\right)+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

另设 $M=\max\limits_{k=1,\dots,N}|y_k|,\delta=\dfrac{\varepsilon}{2M},\mu(A)<\dfrac{\varepsilon}{2M}$，则有

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right|\leqslant M\cdot\mu(A)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

2) 考虑 $f(x)$ 为任意函数情形。由条件有存在简单函数序列 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，则对于 Lebesgue 可测集 $A\subset X$ 有

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right|\leqslant\int_A|f_n(x)-f(x)|\,d\mu+\int_A|f_n(x)|\,d\mu$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_2\in\mathbb{N}^*)(\forall n\geqslant N_2):\int_A|f_n(x)-f(x)|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

则由 1) 有

$$(\exists\delta>0)(\forall A):\left[\mu(A)<\delta\Rightarrow\int_A|f_n(x)|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\left|\int_A f(x)d\mu\right|<\varepsilon\right]$$

定理即证

推论 3.15 (不交并上 Lebesgue 积分可加性)

设集族 A_k 均为 Lebesgue 可测集，$A=\bigcup\limits_k A_k$，且 $(\forall i\neq j):A_i\cap A_j=\varnothing$，若 f 在集 A 上 Lebesgue 可积，则有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu=\sum_n\int_{A_n}f(x)\mathrm{d}\mu$$

且从左端积分存在性可得右端积分存在性，并且由右端积分所构成的级数绝对收敛

证明 显然 $\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$，下设 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\bigcup R_n,R_n=\bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty}A_k$，则有

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}f(x)d\mu+\int_{R_n}f(x)d\mu$$

注意到 $\mu(R_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ 及 $\int_{R_n}f(x)d\mu\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$，则级数收敛且

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}f(x)d\mu$$

推论即证

注 在 (3.2.2.1) 处已证明相同结论，这里仅作为绝对连续性推论指出

3.2.2.3 逐项 Lebesgue 积分

本节介绍逐项 Lebesgue 积分，亦即极限号下取积分的相关定理，Lebesgue 控制收敛定理 (3.33)，Levy 单调性定理 (3.34) 与 Fatou 定理 (3.35)。另外，介绍无穷测度的 Lebesgue 积分概念，而 Lebesgue 控制收敛定理 (3.33)，Levy 单调性定理 (3.34) 与 Fatou 定理 (3.35) 在无穷测度情形也正确

最后，给出定理 (3.36) 表明 Lebesgue 积分是对常义 Riemann 积分定义的推广，并指出在反常积分的情形可能存在 Riemann 积分但不存在 Lebesgue 积分

定理 3.33 (Lebesgue 控制收敛定理/теорема Лебега о мажорируемой сходимости)

设 $\{f_n(x)\}$ 为集 X 上 Lebesgue 可积函数序列，并设 $f_n(x)$ 在集 X 上逐点收敛到极限函数 $f(x)$，若 Lebesgue 可积函数 $\varphi(x)$ 满足在集 X 上（几乎处处）$(\forall n\in\mathbb{N}):|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$，则极限函数 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积且存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu=\int_X f(x)d\mu$$

证明 将条件取极限即得 $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$，则由 Weierstrass 强函数 Lebesgue 可积判别法 (3.26) 有 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积。又由 Lebesgue 积分绝对连续性 (3.32) 有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A) : \left[(\mu(A) < \delta) \Rightarrow \left(\int_A \varphi(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{4}\right)\right]$$

由 Egorov 定理 (3.18) 有可选择集 A 满足 $\{f_n(x)\}$ 在集 $C = X \backslash A$ 上一致收敛，则

$$(\exists N \in \mathbb{N}^*)(\forall n \geqslant N)(\forall x \in C) : |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}$$

显然有

$$\int_X f(x) d\mu - \int_X f_n(x) d\mu = \int_C (f(x) - f_n(x))\, d\mu + \int_A f(x) d\mu - \int_A f_n(x) d\mu$$

则由 $|f(x)| \leqslant \varphi(x), |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ 有

$$\left|\int_X f(x) d\mu - \int_X f_n(x) d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

定理即证

推论 3.16 (逐项 Lebesgue 积分充分条件)

若 $|f_n(x)|$ 有界，$\mu(X) < \infty$，并设 $f_n(x)$ 在集 X 上逐点收敛到极限函数 $f(x)$，则有

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$$

♡

定理 3.34 (Levy 单调性定理/теорема Леви о монотонной сходимости)

设在集 X 上 $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots,$，若 $f_n(x)$ 均 Lebesgue 可积，且其对应 Lebesgue 积分均有界，则在集 X 上几乎处处存在有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，另外 $f(x)$ 在 X 上 Lebesgue 可积且有

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$$

♡

证明 不妨设 $f_1(x) \geqslant 0$(一般情形只需取函数 $\bar{f}_n = f_n - f_1$ 则可化为该情形)。考虑集 $\Omega = \left\{x \in A : f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right\}$，易得 $\Omega = \bigcap\limits_r \bigcup\limits_n \Omega_n^{(r)}$，其中 $\Omega_n^{(r)} = \{x \in A | f_n(x) > r\}$，由 Lebesgue 积分 Chebyshev 不等式 (3.31) 有 $\mu\left(\Omega_n^{(r)}\right) \leqslant K/r$

由 $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \cdots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \cdots$，则 $\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant K/r$。但对于任意 r 都有 $\Omega \subset \bigcup\limits_n \Omega_n^{(r)}$ 则有 $\mu(\Omega) \leqslant K/r$。由于 r 的任意性，由此推出 $\mu(\Omega) = 0$，则就证明了单调递增序列 $\{f_n(x)\}$ 在 A 上几乎处处具有有限极限 $f(x)$

下记 $A_r = \{x \in A | r-1 \leqslant f(x) < r\}, r = 1, 2, \cdots$，在 A_r 上令 $\varphi(x) = r$，下证 $\varphi(x)$ 在 A 上 Lebesgue 可积性。令 $R_s = \bigcup\limits_{r=1}^{s} A_r$，由在 B_s 上函数 f_n 与 f 有界且有 $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$，则

$$\int_{B_s} \varphi(x) \mathrm{d}\mu \leqslant \int_{B_s} f(x) \mathrm{d}\mu + \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \int_{B_s} f_n(x) \mathrm{d}\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A)$$

但由

$$\int_{B_s} \varphi(x) \mathrm{d}\mu = \sum_{r=1}^{s} r\mu\left(A_r\right)$$

有界性，表明级数

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu\left(A_r\right) = \int_A \varphi(x) \mathrm{d}\mu$$

收敛。则函数 φ 在 A 上 Lebesgue 可积性得证

注 在定理证明中函数 $f_n(x)$ 的单调非减条件显然可以换为单调非增条件

推论 3.17 (非负函数逐项 Lebesgue 积分充分条件)

() 若 $\psi_n(x) \geqslant 0$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) \mathrm{d}\mu < \infty$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛，且

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) \mathrm{d}\mu$$

♡

定理 3.35 (Fatou 定理/теорема Фату)

若非负可测函数序列 $\{f_n\}$ 在 A 上几乎处处收敛到 f 且

$$\int_A f_n(x) \mathrm{d}\mu \leqslant K$$

则 f 在 A 上 Lebesgue 可积且

$$\int_A f(x) \mathrm{d}\mu \leqslant K$$

♡

证明 记 $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} f_k(x)$ ，则由对于 $\forall c \in \mathbb{R}$，集

$$\{x : \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x : f_k(x) < c\}$$

为 Lebesgue 可测集，有 φ_n 可测。其次由 $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$ 有 φ_n Lebesgue 可积，并且

$$\int_A \varphi_n(x) \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A f_n(x) \mathrm{d}\mu \leqslant K$$

最后 $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \cdots$ ，从而几乎处处都有 $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ ，则由 Levy 单调性定理 (3.34) 有 $f(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积且有

$$\int_A f(x) \mathrm{d}\mu \leqslant K$$

定理即证

定义 3.22 (σ 有限测度)

若给定了测度 μ 的集 X 可表示为可数个具有有限测度的集之和，则称 X 上的测度 μ 为 σ-有限测度 **(σ-конечная мера)**

♣

定义 3.23 (枚举序列)

称满足

$$X_k : X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k, \mu\left(X_k\right) < \infty$$

的 X 的 Lebesgue 可测子集族的单调递增序列（即满足 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : X_{n+1} \supset X_n$ 的集列）为枚举序列 **(исчерпывающая последовательность)**

♣

定义 3.24 (可和)

称给定 σ-有限测度 μ 的集 X 上的可测函数 f 为在 X 上可和 **(суммируемая)**。若函数在任意具有有限测度的 Lebesgue 可测子集 $A \subset X$ 上可和，且对于任意枚举序列 $\{X_n\}$ 都有极限

$$\lim_{n \to \infty} \int_{X_n} f(x) \mathrm{d}\mu$$

存在且与该枚举序列的选取无关，则称该极限为 f 在集 X 上的 Lebesgue 积分并记为

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu$$

♣

定理 3.36 (Lebesgue 积分对常义 Riemann 积分推广)

若 Riemann 积分

$$I = R\int_a^b f(x)dx$$

存在，则函数 $f(x)$ 在 $X = [a;b]$ 上 Lebesgue 可积，且有

$$L\int_{[a;b]} f(x)d\mu = I$$

♡

证明 将区间 $[a;b]$ 划分为 2^n 个区间段：$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$ ，该划分对应 Darboux 和 (суммы Дарбу)：

$$S_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}, \quad s_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk}, \quad M_{nk} = \sup_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x), \quad m_{nk} = \inf_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)$$

则由 Riemann 积分定义得 $I = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

考虑简单函数 $\bar{f}_n(x) = M_{nk}, \underline{f}_n(x) = m_{nk}, x \in [x_{k-1};x_k)$ 。函数 $(\bar{f}_n(x), \underline{f}_n(x))$ 在点 $x = b$ 处可以任意重新定义。这时有

$$L\int_{[a;b]} \bar{f}_n(x)d\mu = S_n, \quad L\int_{[a;b]} \underline{f}_n(x)d\mu = s_n$$

由序列 $\{\bar{f}_n(x)\}$ 不增，而序列 $\underline{f}_n(x)$ 不减，则几乎处处有

$$\bar{f}_n(x) \to \bar{f}(x) \geqslant f(x), \underline{f}_n(x) \to \underline{f}(x) \leqslant f(x), \int_{[a,b]} \bar{f}_n(x)d\mu = S_n \geqslant I, \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x)d\mu = s_n \leqslant I$$

则由 Levy 单调性定理 (3.34) 有

$$L\int_{[a;b]} \bar{f}(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n = I = \lim_{n\to\infty} s_n = L\int_{[a;b]} f(x)d\mu$$

$$\Rightarrow L\int_{[a;b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)|d\mu = L\int_{[a;b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x))d\mu = 0$$

则有几乎处处 $\bar{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$，亦即 $\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$，则有 $L\int_{[a;b]} f(x)d\mu = I$

例题 3.9 （Dirichlet 函数）观察 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

该函数非 Riemann 可积，但 Lebesgue 可积

注 $f(x)$Lebesgue 可积由则有 $|f(x)|$ Lebesgue 可积，则在反常积分情况下，Riemann 积分可能存在，但 Lebesgue 积分可能不存在，例如

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$$

在 Riemann 意义下（有条件地）存在，但在 Lebesgue 意义下不存在

3.2.3 可和函数空间

3.2.3.1 L_1 空间

注 （$L_1(X,\mu)$ 空间）设 X 为给定（有限或无穷）完备测度 μ 的空间，考虑所有在 X 上可和函数 f 全体。由可和函数线性组合可和，则该总体与函数加法运算及数乘运算构成一个线性空间，则记该空间为 $L_1(X,\mu)$

性质 （L_1 空间范数）

引入 $L_1(X,\mu)\to\mathbb{R}$ 算子

$$\|f\|=\int_X|f(x)|d\mu$$

则该算子在仅考虑可和函数等价类意义时为范数

证明 1) 由 Lebesgue 积分模性 (3.2.2.1) 即有

$$(\forall\alpha\in\mathbb{R})(\forall f\in L_1(X,\mu)):\|\alpha f\|=|\alpha|\cdot\|f\|$$

2) 由定义有

$$\|f_1+f_2\|=\int_X|f_1(x)+f_2(x)|d\mu$$

则由 Lebesgue 积分单调性 (3.2.2.1) 即有

$$\int_X|f_1(x)+f_2(x)|d\mu\leqslant\int_X(|f_1(x)|+|f_2(x)|)d\mu=\int_X|f_1(x)|d\mu+\int_X|f_2(x)|d\mu=\|f_1\|+\|f_2\|$$

3) 对于 X 上互相等价的函数不加区别，即认为它们为空间 $L_1(X,\mu)$ 的同一元素，则有 $\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$

注 特别地，$L_1(X,\mu)$ 中的零元素为所有几乎处处为零的函数的总体

定义 3.25 (L_1 空间)

称以可和函数等价类为元素的赋范向量空间为 L_1 空间，其中范数由公式

$$\|f\|=\int|f(x)|\mathrm{d}\mu$$

定义，同样引入距离

$$(\forall f,g\in L_1(X,\mu)):\rho(f,g)=\|f-g\|_{L_1}$$

♣

定义 3.26 (L_1 空间收敛)

在 L_1 空间上（平均）收敛定义为

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(x)\Leftrightarrow\int_X|f_n(x)-f(x)|\,d\mu\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

♣

定理 3.37 (L_1 空间完备性)

空间 $L_1(X,\mu)$ 为完备空间

♡

证明 设 $\{f_n\}$ 为 Cauchy 序列，即 $\|f_n-f_m\|\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}0$ ，则存在递增指标集 $\{n_k\}$ 满足

$$\left\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\right\|=\int_X\left|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)\right|d\mu<\frac{1}{2^k}$$

设 $g_m(x)=|f_{n_1}(x)|+|f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)|+|f_{n_3}(x)-f_{n_2}(x)|+\ldots+\left|f_{n_m}(x)-f_{n_{m-1}}(x)\right|$ 其中函数 $g_m(x)$ 在集 X 上 Lebesgue 可积且有 $g_{m+1}(x)\geqslant g_m(x)$，则

$$\int_X g_m(x)d\mu\leqslant\|f_{n_1}\|+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\leqslant\|f_{n_1}\|+1$$

则由 Levy 单调性定理 (3.34) 有级数

$$|f_{n_1}(x)|+|f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)|+|f_{n_3}(x)-f_{n_2}(x)|+\ldots$$

在 X 上几乎处处收敛，则级数

$$f_{n_1}(x)+(f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x))+(f_{n_3}(x)-f_{n_2}(x))+\ldots$$

几乎处处收敛到 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$

下证子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 平均收敛到相同函数 $f(x)$ ，由 $\{f_n\}$ 为 Cauchy 序列，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N}^*)(\forall k,l>N):\int_X|f_{n_k}(x)-f_{n_l}(x)|\,d\mu<\varepsilon$$

又由 Fatou 定理 (3.35)，并令 $l\to\infty$ 即有

$$(\forall k>N):\int_X|f(x)|d\mu-\int_X|f_{n_k}(x)|\,d\mu\leqslant\int_X|f_{n_k}(x)-f(x)|\,d\mu\leqslant\varepsilon$$

则函数 $f(x)$ 在 X 上 Lebesgue 可积，f_{n_k} 平均收敛到 f，若 Cauchy 序列包含一个收敛到某个极限的子序列，则该 Cauchy 序列也收敛到相同极限

注 （L_1 空间处处稠密集）

对任意在 X 上可和的函数 f，及 $\forall\varepsilon>0$，存在简单可和函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\int_X|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$$

定理 3.38 (连续 Lebesgue 可积函数逼近)

设 μ 为 $X=[0;1]$ 生成的测度，则有

$$(\forall f(x)\in L_1(X,\mu))(\forall\varepsilon>0)(\exists\varphi(x)\in\mathcal{C}[0;1]):\|f-\varphi\|_{L_1}<\varepsilon$$

♡

证明 对于 $(\forall\varepsilon>0)$ 存在取有限数量函数值简单函数 $g(x)$ 满足 $\|f-g\|_{L_1}<\varepsilon, g(x)=\sum\limits_{k=1}^n g_k\chi A_k(x)$，下用连续函数来逼近 Lebesgue 可测集 A 上指标函数 $\chi_A(x)$

由集合可测性定义有

$$\exists B=\bigcup_{k=1}^m[a_k,b_k):\mu^*(A\Delta B)<\varepsilon\Rightarrow\int_X|\chi_A(x)-\chi_B(x)|\,d\mu=\mu(A\Delta B)<\varepsilon$$

函数 $\chi_{[a_k,b_k)}(x)$ 可以近似为分段线性函数 $h_k(x)$

$$\int_X\left|\chi_{[a_k,b_k)}(x)-h_k(x)\right|d\mu<\frac{\varepsilon}{m},\quad\varphi_B(x)=\sum_{k=1}^m h_k(x),$$

$$\Rightarrow\int_X|\chi_B(x)-\varphi_B(x)|\,d\mu\leqslant\sum_{k=1}^m\int_X\left|\chi_{[a_k,b_k)}(x)-h_k(x)\right|d\mu<\varepsilon$$

因此可构造在 $L_1(X,\mu)$ 空间上按范数任意逼近 $f(x)$ 的连续函数 $\varphi(x)$

为逼近指标函数 $\chi_{[a_k;b_k)}(x),x\in[0;1]$，考虑以下分段线性连续函数 $h_k(x)$

$$h_k(x)=\begin{cases}0 & ,x\in[0,a_k]\cup[b_k,1]\\ \dfrac{x-a_k}{\delta}, & x\in[a_k,a_k+\delta]\\ \dfrac{b_k-x}{\delta} & ,x\in[b_k-\delta,b_k]\\ 1 & ,x\in[a_k+\delta,b_k-\delta]\end{cases}$$

其中 $\delta>0$ 且充分小，则

$$\int_X\left|\chi_{[a_k;b_k)}(x)-h_k(x)\right|d\mu=\int_{a_k}^{a_k+\delta}\left(1-\frac{x-a_k}{\delta}\right)dx+\int_{b_k-\delta}^{b_k}\left(1-\frac{b_k-x}{\delta}\right)dx=\delta<\frac{\varepsilon}{m}$$

定义 3.27 (可分空间)

若赋范空间 V 上存在可数处处稠密集，则称该空间为可分空间 (**сепарабельное пространство**)，即存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

$$(\forall x\in V)(\forall\varepsilon>0)(\exists x_n\in V):\|x_n-x\|<\varepsilon$$

♣

定理 3.39 ($L_1[0;1]$ 可分性)

空间 $L_1(X,\mu),X=[0;1]$ 为可分空间

♡

证明 由定理 (3.38) 有

$$(\forall f(x) \in L_1(X,\mu))(\forall \varepsilon > 0)(\exists \varphi(x) \in \mathcal{C}[0;1] : \|f(x)-\varphi(x)\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

显然

$$(\exists P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, a_i \in \mathbb{Q}) : \max_{x\in[0;1]} |\varphi(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

则有

$$\begin{aligned}\|f(x)-P_n(x)\|_{L_1} &= \int_X |f(x)-P_n(x)|\,dx \leqslant \int_X |f(x)-\varphi(x)|dx + \int_X |\varphi(x)-P_n(x)|\,dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

则具有有理系数的多项式 $P_n(x)$ 的集合为可数的

3.2.3.2 L_p 空间

注 （$L_p(X,\mu)$）设 X 为给定（有限或无穷）完备测度 μ 的空间，考虑所有在 X 上可和函数 f 的 p 次幂函数（绝对值函数或非绝对值函数）全体。记该空间为 $L_p(X,\mu)$

性质 （$L_p(X,\mu)$ 线性性）

若 $f_1, f_2 \in L_p(X,\mu)$，则 $f_1 + f_2 \in L_p(X,\mu)$

证明 设 $f_1, f_2 \in L_p(X,\mu)$，则由定义有

$$\|f_1+f_2\|_{L_p} = \left(\int_X |f_1(x)+f_2(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

注意到

$$|f_1+f_2|^p \leqslant (|f_1|+|f_2|)^p \leqslant (2\max\{|f_1|,|f_2|\})^p \leqslant 2^p\left(|f_2|^p + |f_2|^p\right)$$

则有 $|f+g|^p$ 为 Lebesgue 可积函数，且 $f_1+f_2 \in L_p(X,\mu)$

定义 3.28 (L_p 空间)

称以可和函数等价类为元素，且定义范数

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int |f(x)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

的赋范向量空间为 L_p 空间，同样引入距离

$$(\forall f_1, f_2 \in L_p(X,\mu)) : \rho(f_1,f_2) = \|f_1 - f_2\|_{L_p}$$

♣

定理 3.40 (L_p 空间上 Hilbert 不等式)

对于任意 $p,q > 1 : \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，任意 $f(x) \in L_p(X,\mu), g(x) \in L_q(X,\mu)$，则有 Hilbert 不等式

$$\left|\int_X f(x)g(x)d\mu\right| \leqslant \|f\|_{L_p}\cdot\|g\|_{L_q}$$

♡

证明 若 $\|f\|_{L_p} = 0$ 或 $\|g\|_{L_q} = 0$，不等式显然。下设范数不为零，记 $F = \dfrac{|f|}{\|f\|_{L_p}}, G = \dfrac{|g|}{\|g\|_{L_q}}$ ，则由 Hilbert 不等式 (4.21) 有

$$\int_X FGd\mu \leqslant \int_X \frac{F^p}{p}d\mu + \int_X \frac{G^q}{q}d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

进而有

$$\left|\int_X fgd\mu\right| \leqslant \int_X |fg|d\mu \leqslant \|f\|_{L_p}\cdot\|g\|_{L_q}$$

不等式即证

定理 3.41 (L_p 空间上 Minkowski 不等式)

若 $f,g \in L_p(X,\mu)$，则成立不等式

$$\|f_1+f_2\|_{L_p} \leqslant \|f_1\|_{L_p} + \|f_2\|_{L_p}$$

证明 由 $L_p(X,\mu)$ 线性性 (3.2.3.2) 有

$$\begin{aligned}\|f_1+f_2\|_{L_p}^p &= \int_X |f_1+f_2|^p d\mu \leqslant \int_X |f_1+f_2|^{p-1}(|f_1|+|f_2|)d\mu \\ &= \int_X |f_1|\cdot|f_1+f_2|^{p-1}d\mu + \int_X |f_2|\cdot|f_1+f_2|^{p-1}d\mu\end{aligned}$$

进而由 L_p 空间上 Hilbert 不等式 (4.21) 有

$$\|f_1+f_2\|_{L_p}^p \leqslant \|f\|_{L_p}\cdot\left(\int_X |f_1+f_2|^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_{L_p}\cdot\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

其中 $(p-1)q=p$，则

$$\|f_1+f_2\|_{L_p}^p \leqslant \|f_1\|_{L_p}\cdot\|f_1+f_2\|_{L_p}^{\frac{p}{q}} + \|g\|_{L_p}\cdot\|f_1+f_2\|_{L_p}^{\frac{p}{q}}$$

即有 $\|f_1+f_2\|_{L_p}^{p-\frac{p}{q}} \leqslant \|f\|_{L_p} + \|f_2\|_{L_p}$

命题 3.1 (L_p 空间范数定义正确性)

引入 $L_p(X,\mu)\to\mathbb{R}$ 算子

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

则该算子在仅考虑可和函数等价类意义时为范数

证明 1) 由 Lebesgue 积分模性 (3.2.2.1) 即有

$$(\forall\alpha\in\mathbb{R})(\forall f\in L_p(X,\mu)): \|\alpha f\|_{L_p} = |\alpha|\cdot\|f\|_{L_p}$$

2) 三角不等式由 L_p 空间上 Minkowski 不等式 (3.41) 即得

3) 对于 X 上互相等价的函数不加区别，即认为它们为空间 $L_p(X,\mu)$ 的同一元素，则有 $\|f\|=0 \Leftrightarrow f=0$

定理 3.42 (L_p 空间完备性)

$p>1$ 的 $L_p(X,\mu)$ 空间为完备空间

证明 设 Cauchy 序列

$$\|f_n-f_m\|_{L_p} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

下证存在一个函数 $f(x)\in L_p(X,\mu)$ 满足 $f_n(x)\to f(x)$ 在 $L_p(X,\mu)$ 的范数意义下收敛

设 $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k, \mu(X_k)<\infty$，且 $\{f_n\}$ 为 $L_p(X_k,\mu)$ 上 Cauchy 序列，则由 L_p 空间上 Minkowski 不等式 (3.41) 得

$$\int_{X_k} |f_n-f_m|\cdot 1 d\mu \leqslant \|f_n-f_m\|_{L_p(X_k)}\cdot(\mu(X_k))^{\frac{1}{q}}$$

则序列 $\{f_n\}$ 为 $L_1(X_k,\mu)$ 上 Cauchy 序列，由 L_1 空间完备性定理 (3.37) 有，对于 $k=1,2,3,\ldots$ 存在序列 $\{f_{nk}\}$ 在 X_k 上几乎处处收敛到 $f\in L_1(X_k,\mu)$，这时序列 $\{f_{n_n}\}$ 在 $X=\cup X_k$ 几乎处处收敛到 f，即

$$|f_{n_k}-f_{n_l}|^p \underset{n_l\to\infty}{\longrightarrow} |f_{n_k}-f|^p, \int_X |f_{n_k}-f_{n_l}|^p d\mu < \varepsilon$$

则由 Fatou 定理 (3.35) 有 $|f_{n_k}-f|^p$ 在 X 上 Lebesgue 可积，则由

$$(\forall n_k\geqslant N): \int_X |f_{n_k}-f|^p d\mu \leqslant \varepsilon$$

即有 f_{n_k} 在 $L_p(X,\mu)$ 上收敛到 f，又

$$|f| \leqslant |f_{n_k}| + |f - f_{n_k}| \Rightarrow |f|^p \leqslant 2^p \left(|f_{n_k}|^p + |f - f_{n_k}|^p\right)$$

则有 $f \in L_p(X,\mu)$，则原序列按 $L_p(X,\mu)$ 上范数意义收敛到 f

第 4 章 泛函分析与基本空间

4.1 拓扑空间

4.1.1 基本概念

4.1.1.1 开集与邻域

定义 4.1 (拓扑)

设 E 为集合，记 $\mathcal{O}$ 为由被称为开集 (**open set**) 的 E 的幂集且满足：

O_1：（可数并封闭性）有限或无限个开集的并为开集

O_2：（有限交封闭性）有限个开集的交为开集

O_3：（平凡元）集合 E 和空集 $\varnothing$ 为开集

则称二元组 $(E,\mathcal{O})$ 为拓扑空间 (**topological space**)，也称 E 的子集的集合 $\mathcal{O}$ 在 E 上定义了一个拓扑 (**topology**)。若 $\mathcal{O}$ 为 E 的所有子集的集合，则称拓扑为离散拓扑 (**discrete topology**)，若 $\mathcal{O}$ 只有两个元素：$\varnothing$ 和 E，则称拓扑为粗拓扑

设 A 为 E 的子集，若 A 在 E 中补集为开集，则称 A 为闭集 (**closed set**)。由性质 $\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_2,\mathrm{O}_3$ 通过对偶性即得与前者等价的与 E 的闭集有关的三条性质 $\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2,\mathrm{F}_3$：

F_1：（可数交封闭性）有限或无穷个闭集的交为闭集

F_2：（有限并封闭性）有限个闭集的并为闭集

F_3：（平凡元）空间 E 和空集 $\varnothing$ 为闭集

♣

注（开集与闭集）

对于 E 的离散拓扑，E 的所有子集都同时为开集和闭集；对于 E 的粗拓扑，仅有的闭集为 $\varnothing$ 和 E。若 E 为全序集，任意 E 的闭区间对于序拓扑为 E 的闭集

注（拓扑）

在任何集合 E 上都可定义多种拓扑，除非 E 至多只包含一个点。一般有意义的拓扑既不为离散拓扑，也不为粗拓扑

定义 4.2 (邻域)

设 E 为拓扑空间，称任意包含 x 的集 E 的开子集为集 E 的点 x 的邻域 (**neighbourhood**)，通常记 x 的邻域 V 的集合为 $\mathcal{V}(x)$

♣

注（邻域刻画开集特征）

由邻域定义可得开集的特征：开集为其每一点的邻域；反之，若集合 A 为其每一点的邻域，则其为开集。即若对于任意 $x\in A$ 存在含 x 的开集 ω_x，且其包含于 A 中，则有开集

$$A=\bigcup_{x\in A}\omega_x$$

注（邻域）

只要对所有 x 已知 x 的邻域，则空间的开集也就已知。换言之，在同一个集合上两种有相同邻域的拓扑恒同

性质（邻域性质）

下列邻域的基本性质有时被当作定义拓扑空间的出发点：

V_1：x 任意邻域包含 x，且任意 x 存在邻域

V_2：任意包含 x 的邻域的集合为 x 的邻域

V_3 : x 两个邻域的交为 x 的邻域

V_4 : 若 V 为 x 邻域，则存在 x 的子邻域 W 使得 V 为 W 每一点的邻域

注 前两条性质直接由定义得。第三条性质由两个开集的交为开集得。第四条性质表达了模糊的概念：与相当邻近于 x 的点相当邻近的所有点也在 x 邻近。由假设存在开集 ω 使得 $x \in \omega$ 且 $\omega \in V$，但 ω 为其每一个点的邻域，故 V 为 ω 每一个点的邻域，因此只需取 $W = \omega$

定义 4.3 (邻域基)

设 E 为拓扑空间，$x \in E$，若任意 $V \in \mathcal{V}(x)$ 包含一个元素 $W \in \mathcal{B}$，则称 $\mathcal{V}(x)$ 的子集 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{V}(x)$ 的（邻域）基 (basis)

♣

定义 4.4 (开集基)

称满足下列两个等价条件的 E 的开集类 (ω_i) 为拓扑空间 E 的开集基 **(open set basis)**：

1) 任意 $x \in E$ 有由 ω_i 的子族构成的邻域基

2) 任意 E 的开集是 ω_i 的子族的并

两条性质等价性由定义直接可得

♣

定义 4.5 (点集拓扑)

设 A 为拓扑空间 E 的子集，$x \in E$，则有若 x 的任意邻域包含 A 的不同于 x 的点，则称 x 为 A 的聚点 **(point of accumulation)**，称 A 的聚点的全体为 A 的导出集 **(induced set)** 或导集，经常记为 A'；若存在 x 的邻域，其中除 x 外不含 A 中其他点，则称 x 为 A 的孤立点 **(isolated point)**。亦即若 x 属于 A，但不为 A 的聚点，则 x 为 A 的孤立点

若 x 的任何邻域包含 A 的点，则称 x 为 A 的附着点，亦即 x 为 A 附着点等价于：x 为 A 的聚点或 x 为 A 的孤立点。称 E 中的 A 的附着点全体为 A 的附着集

♣

定义 4.6 (闭包)

称拓扑空间 E 中包含 A 的最小闭集为 A 的闭包 **(closure)**，记为 $\bar{A}$

♣

命题 4.1 (附着集与闭包等价性)

设 A 为拓扑空间 E 的子集，则 A 的附着集与闭包相等

♠

证明 若 A 为空间 E 的子集，x 表示 E 的任意点，则性质：$(x \notin \bar{A})$ 和 (x 不是 A 的附着点) 都能解释为存在 x 的开邻域 ω 不与 A 相交

推论 4.1 (闭集充要条件)

A 为闭集的充要条件为下列条件之一成立：

1)$A = \bar{A}$

2)A 含有其所有聚点

♡

证明 1) 若 A 为闭集，则它显然等于它的闭包，反之由 $A = \bar{A}$ 可得 A 为闭集，因为任意闭包由定义记即为闭集；2) 设 A' 为 A 的聚点集，由附着集定义有 $\bar{A} = A \cup A'$，因此 $A = \bar{A}$ 等价于 $A = A \cup A'$ 或 $A' \subset A$

定义 4.7 (内部)

闭包的“对偶”概念为内部的概念。称所有包含在 E 的子集 A 内的开集的并（可能为空集）为 A 的内部 **(interior)**，亦即包含在 A 内的最大开集，记为 $\mathring{A}$

♣

注 （内部刻画开集特征）

由定义可得关系式 $A=\overset{\circ}{A}$ 刻画了开集的特征

性质 (闭包与内部对偶性)

下列性质成立:

1)$\complement\overset{\circ}{A}=\overline{\complement A}$

2)$\complement\bar{A}=\overset{\circ}{\complement A}$

证明 1) 由定义有 $\overset{\circ}{A}=\bigcup\limits_{i\in I}\omega_i$,其中 $(\omega_i)_{i\in I}$ 表示所有包含在 A 内的开集的族。则有

$$\complement\overset{\circ}{A}=\bigcap_{i\in I}\complement\omega_i=\bigcap_{i\in I}\varphi_i$$

其中 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 表示包含 $\complement A$ 的闭集族,则 $\complement\overset{\circ}{A}$ 为 $\complement A$ 的闭包

2) 在 1) 公式内用 $\complement A$ 代替 A 即得

性质 (闭包性质)

下列性质成立:

1) $\bar{\varnothing}=\varnothing$

2) $A\subset\bar{A}$

3) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$

4) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

证明 1)2) 显然;3) 由任何闭集的闭包恒同于自己得;4) 注意到

$$(X\subset Y)\Rightarrow(X\subset\bar{Y})\Rightarrow(\bar{X}\subset\bar{Y})$$

则有 $\bar{A},\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$,则 $\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$。反之 $\bar{A}\cup\bar{B}$ 为包含 A 和 B 的闭集,则也为包含 $A\cup B$ 的闭集,则有 $\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$

注 4) 显然可以推广到任意有限并的情形,然而不能推广到可数并的情形,因为闭集的任意并,不总为闭集。对于交不再有类似的关系式,例如设 E 为直线 $\mathbb{R},A$ 和 B 分别表示有理数集和无理数集,则有 $\bar{A}\cap\bar{B}=\mathbb{R}$,而 $\overline{A\cap B}=\varnothing$。只能有包含关系 $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$。同样对于 E 的任何子集族 (A_i) 有包含关系:$\cup\bar{A}_i\subset\overline{(\cup A_i)}$ 和 $\overline{(\cap A_i)}\subset\cap\bar{A}_i$

性质 (内部性质)

下列性质成立

1) $\overset{\circ}{E}=E$

2) $\overset{\circ}{A}\subset A$

3) $\overset{\circ\circ}{A}=\overset{\circ}{A}$

4) $(A\overset{\circ}{\cap}B)=\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$

定义 4.8 (边界)

设 A 为拓扑空间 E 的子集,若 $x\in E$ 的任意邻域 V 至少含 A 中的一点和 $\complement A$ 中的一点,则称所有这样的点的集合为 A 的边界,形式化定义为

$$A^*=\{x\in E|(\forall V\in\mathcal{V}(x)):(\exists a\in A)(a\in V)\wedge(\exists b\in E\backslash A)(b\in V))\}$$

则由定义显然有关系

$$A^*=\bar{A}\cap\overline{\complement A}$$

且任意集合的边界为闭集,两个互补的集合有相同的边界 ♣

性质 (边界与闭包和内部关系式)

设 A 为拓扑空间 E 子集，则有

$$A^* = \bar{A} \backslash \mathring{A}$$

证明 由关系 $A^* = \bar{A} \cap \overline{\complement A}$ 和 $\overline{\complement A} = \complement \mathring{A}$ 则有 $A^* = \bar{A} \cap \complement \mathring{A}$

推论 4.2 (边界与自身恒同充要条件)

设 A 为拓扑空间 E 子集，则有

$$(A = A^*) \Leftrightarrow (\mathring{A} = \varnothing) \Leftrightarrow (\overline{\complement A = E})$$

♡

定义 4.9 (稠密)

设 A 为空间 E 的子集，若 $\bar{A} = E$，则称 A 在 E 中处处稠密 (**dense everywhere**)，若 $\bar{A}$ 有非空内部，则称 A 在 E 中稠密 (**dense**)，若 $\bar{A}$ 的内部为空集，则称 A 在 E 中无处稠密 (**nowhere dense**)

♣

性质 （稠密性性质）

下列命题成立

1) 若 A 在 E 上处处稠密且 $A \subset B \subset E$，则 B 在 E 上处处稠密

2) (A 处处稠密) $\Leftrightarrow$ (E 的任何非空开集与 A 相交)

3) (A 无处稠密) $\Leftrightarrow$ ($\bar{A}$ 无处稠密) $\Leftrightarrow$ ($\complement\bar{A}$ 处处稠密) $\Leftrightarrow$ (E 的任何非空开集包含与 A 不相交的非空子开集)

4 若 A 与 B 在 E 上无处稠密，则集 $A \cup B$ 在 E 上无处稠密

注 4) 可推广到任意有限并情形，但不能推广到无限并。若 A 无处稠密，则 $\complement A$ 处处稠密。但完全可能 A 和 $\complement A$ 都处处稠密；A 和 B 在其交 $A \cap B$ 为空集时，仍然可以均为 E 的处处稠密集

命题 4.2 (可数开集基存在必要条件)

任意存在可数开集基的拓扑空间包含可数处处稠密子集

♠

证明 设 E 为拓扑空间，(ω_n) 为给定可数开集基且对于任意 n 有 $\omega_n \neq \varnothing$。设 x_n 为 ω_n 的点，则 x_n 的集合 X 在 E 上处处稠密，因为若 ω 为 E 中任意非空开集，则 ω 为某些非空 ω_n 的并，从而含对应的 x_n；亦即 $(X \cap \omega)$ 不为空集

4.1.1.2 连续与同胚

定义 4.10 (点上连续性第一定义)

设拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f，若对于 $f(x_0)$ 的任意邻域 V，存在 x_0 的邻域 v，使得它通过 f 的像在 V 中，即 $f(v) \subset V$，则称映射 f 在 X 上点 x_0 上连续 (**continuous**)。该定义可形式化记为：

$$(f \text{ 在 } x_0 \text{ 上连续}) \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))(\exists v \in \mathcal{V}(x_0)) : (f(v) \subset V)$$

♣

注 （点上连续性第二定义）

可要求 V 和 v 分别在 $f(x_0)$ 和 x_0 的给定的邻域基内而得等价定义。给出 f 在 x_0 上连续的另一种定义：对于 $f(x_0)$ 的任意邻域 V，$f^{-1}(V)$ 为 x_0 的邻域

事实上，设 V 为 $f(x_0)$ 的邻域，若 v 为 x_0 的满足 $f(v) \subset V$ 的邻域，则有 $v \subset f^{-1}(V), f^{-1}(V)$ 包含 x_0 的一个邻域，从而也为 x_0 的邻域；反之，若 $f^{-1}(V)$ 为 x_0 的邻域，令 $v = f^{-1}(V)$，就有 $f(v) \subset V$。仍可要求 V 属于 $f(x_0)$ 的给定的邻域基

定义 4.11 (空间上连续性)

设拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f，若映射在 X 的所有点上都连续，则称映射在 X 上连续 (continuous)

♣

定理 4.1 (映射连续性充要条件)

设拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f，则有下列命题等价：

1)f 在 X 上连续

2) 对于 Y 的所有开集 $B, f^{-1}(B)$ 为 X 的开集

3) 对于 Y 的任意闭集 $B, f^{-1}(B)$ 为 X 的闭集

4) 对于任意集 $A \subset X$, 有 $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

♡

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 设 f 在 X 上连续，若 B 为 Y 中开集，由 B 为它每一点的邻域有 B 的逆像也为 B 的逆像的每一点的邻域，则也为开集

2) $\Rightarrow$ 1) 设 $f^{-1}(B)$ 对于任意 Y 中开集 B 为开集，则对于任意 x_0 和 $f(x_0)$ 的邻域 V，$f^{-1}(\overset{\circ}{V})$ 为包含 x_0 的开集，从而 $f^{-1}(V)$ 为 x_0 的邻域，因此 f 在 X 所有点上连续

1) $\Leftrightarrow$ 3) 由下列关系即得

$$f^{-1}(\complement B) = \complement f^{-1}(B)$$

1) $\Rightarrow$ 4) 若 f 连续，则由 $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ 有 $\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$，则 $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

4) $\Rightarrow$ 1) 若关系式对于任意 $A \subset X$ 成立，欲证集合 $A = f^{-1}(B)$ 对于 Y 的任意闭集 B 都为闭集，得 f 连续。显然有 $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B} = B$，则 $\bar{A} \subset f^{-1}(B) = A$，则有 $\bar{A} = A$，亦即 A 为闭集

推论 4.3

设拓扑空间 X 到拓扑空间 $\mathbb{R}$ 的映射 f，若 f 为 X 上连续映射，则 X 中使 $f(x) = 0$ 的集合为闭集，即 $\mathrm{Ker} f$ 为闭集

♡

注 特别地，若 f 为 n 个变量的实系数多项式，则推论指出 $f(x) = 0$ 的解所形成的实代数流形为 $\mathbb{R}^n$ 的闭集；对于 n 个复变量的多项式，在 $\mathbb{C}^n$ 中有同样的结果

命题 4.3 (映射连续性传递性)

设 X, Y, Z 为三个拓扑空间，f 为 X 到 Y 的映射，g 为 Y 到 Z 的映射，$h = g \circ f$。又设 $x_0 \in X$，令 $y_0 = f(x_0), z_0 = g(y_0) = g(f(x_0)) = h(x_0)$。若 f 在 x_0 上连续，g 在 y_0 上连续，则复合映射 $h = g \circ f$ 也在 x_0 上连续

♠

证明 设 V 为 z_0 的任意邻域. 由 g 在 y_0 上连续可推得 $g^{-1}(V)$ 是 y_0 的邻域; 于是由 f 在 x_0 上连续又可推得 $f^{-1}(g^{-1}(V)) = h^{-1}(V)$ 为 x_0 的邻域。特别地，若 f 在 X 上连续, g 在 Y 上连续，则 $h = g \circ f$ 也在 X 上连续

定义 4.12 (同胚)

若存在拓扑空间 X 到 Y 的双射 f，使得 X 和 Y 的开集互换，即对于 X 的任意开集 $A, f(A)$ 为 Y 的开集，而对于 Y 的任意开集 $B, f^{-1}(B)$ 为 X 的开集，则称映射为同胚映射（不引起歧义时，简称为同胚 (**homoeomorphism**)），称二拓扑空间同胚

♣

注 （同胚群）

显然一个同胚的逆仍为同胚，而两个同胚的积也为同胚，特别地，一个空间到其自身的所有同胚形成一个群

定理 4.2 (同胚充要条件)

拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的双射 f 为同胚的充要条件为映射双方连续（即 f 和 f^{-1} 都连续）

证明 f 和 f^{-1} 都连续等价于 Y 任意开集的逆像为开集且 X 任意开集的像也为开集

4.1.1.3 极限与分离性

定义 4.13 (极限点)

设 $(a_i)\,(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 为拓扑空间 E 的点列，若对于点 a 的任何邻域 V，存在整数 i_0，使得对于任何 $i \geqslant i_0$，有 $a_i \in V$，则称该序列收敛于 E 的点 a，称 a 为该序列的极限点 **(limit point)**，形式化记为

$$(\forall V \in \mathcal{V}(a))\,(\exists i_0 \in \mathbb{N})\,(\forall i \geqslant i_0):(a_i \in V)$$

注 （极限点）

若拓扑空间 E 为任意的，则一个序列可能具有多个极限点，例如当 E 的拓扑为粗拓扑时，E 的所有点都是任何点列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的极限

定义 4.14 (分离空间)

若拓扑空间任意两个不同的点都有两个不交邻域，则称空间为 **Hausdorff** 空间（ **Hausdorff space**）或分离空间

注 （分离空间）

在分离空间中，点 a 的闭邻域的交必退化为一个点。事实上，对于任何 $b \neq a$，存在两个分别包含 a 和 b 的不相交的开集 ω_a,ω_b，则 $\complement\omega_b$ 为 a 的不包含 b 的闭邻域；特别地，任何集合 $\{a\}$ 为闭集，因为它为它的所有闭邻域的交

定义 4.15 (滤子基)

设 E 为一任意集合，$\mathcal{B}$ 为 E 的子集的集合，若满足

1) （退化邻域性）对于任意 $B_1,B_2 \in \mathcal{B}$，存在 $B_3 \in \mathcal{B}$，使得 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$，即

$$(\forall B_1,B_2 \in \mathcal{B})(\exists B_3 \in \mathcal{B}):B_3 \subset (B_1 \wedge B_2)$$

2) （非空性）所有 $\mathcal{B}$ 的元素 B 都非空，即

$$(\forall B \in \mathcal{B}):B \neq \varnothing$$

则称 $\mathcal{B}$ 为 E 上的滤子基 **(filter basis)**

定义 4.16 (收敛)

设 f 为集合 X 到拓扑空间 Y 的映射，$\mathcal{B}$ 为 X 上的滤子基，b 为 Y 的点。若对于 b 的任何邻域 V，存在 $B \in \mathcal{B}$，使得 $f(B) \subset V$，则称 f 沿滤子基 $\mathcal{B}$ 收敛 **(converge)** 于 b（或有极限 **(limit)** b），记为

$$\lim_{\mathcal{B}} f = b$$

特别地，当 $X=Y$ 且 f 为 X 到 X 的恒等映射时，称滤子基 $\mathcal{B}$ 收敛于 b

定理 4.3 (分离空间极限唯一性)

若 Y 为分离空间，则 f 沿 $\mathcal{B}$ 至多存在一个极限

证明 设 b 和 b' 为 f 沿 $\mathcal{B}$ 的极限，对于 b,b' 的任何邻域 V,V'，存在 $B,B' \in \mathcal{B}$，使得

$$f(B) \subset V, \quad f\left(B'\right) \subset V'$$

又由 $B \cap B'$ 非空，则 $f(B) \cap f(B')$ 非空，则 $V \cap V'$ 非空。由 Y 为分离空间，则 $b = b'$

定义 4.17 (附着值)

设 $(a_i)\,(i = 1, 2, \cdots)$ 为空间 E 的序列，若对于 a 的任意邻域 V，存在一些任意大的指标 i，使得 $a_i \in V$，则称点 a 为该点列的附着值，形式化定义为

$$(\forall V \in \mathcal{V}(a))(\exists N \in \mathbb{N})(\forall i \leqslant N) : a_i \in V$$

♣

注（附着值）

若以 A_n 表示指标 $i \geqslant n$ 的点 a_i 的集合，定义可改述为，若任意 n 均有点 a 属于 A_n 的附着集，则称 a 为该点列的附着值

序列 $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 的附着值集即为

$$A = \bigcap_{1}^{\infty} \bar{A}_n$$

该集合为闭集，但可能为空集（例如在 $\mathbb{R}$ 中，序列 $(a_n = n)$ 没有附着值）

若序列的所有点 a_i 都属于 E 的闭子集 F，则有 $A \subset F$；事实上，$A_n \subset F$，则 $\bar{A}_n \subset F$，则有 $A \subset F$

在分离空间中，若序列 (a_i) 收敛于 a，该点即为序列唯一的附着值。事实上，设 $b \neq a, V_a, V_b$ 为这两个点的不相交的邻域，则存在 n 使得 $A_n \subset V_a$。由 $A_n \cap V_b = \varnothing$，则点 b 不为序列附着值

4.1.1.4 紧性

定义 4.18 (紧拓扑空间第一定义)

设拓扑空间 E，若 E 分离（条件 E 分离是为了避免一些用处不大的空间，例如有粗拓扑的空间）且 E 的任意开覆盖中都可选出有限子覆盖，则称拓扑空间 E 为紧拓扑空间 (**compact topology space**)

♣

定义 4.19 (紧拓扑空间第二定义)

设拓扑空间 E，若 E 分离且 E 由 E 的其交为空集的任一闭集族中可选出有同样性质的有限子族，则称拓扑空间 E 为紧拓扑空间

♣

注（紧拓扑空间第二定义与第一定义等价性）

第二定义的条件为第一定义的对偶。事实上，若 $(G_i)_{i \in I}$ 为 E 的开集族，则公式 $E = \bigcup_{i \in I} G_i$ 等价于

$$\varnothing = \bigcap_{i \in I} F_i, F_i = \complement G_i$$

定义 4.20 (紧拓扑空间第三定义)

若 E 的子集族 $\mathcal{F}$ 任意有限子族有非空交，则称族 $\mathcal{F}$ 具有有限交性质 (**finite intersection property**)

设 E 为拓扑空间，若 E 分离且 E 由 E 的任意有有限交性质的闭集族有非空交，则称拓扑空间 E 为紧拓扑空间

♣

定理 4.4 (紧拓扑空间附着值性质)

设 E 为紧拓扑空间，则下列命题成立：

1)（附着值存在性）任意序列存在附着值

2)（附着值唯一性必要条件）若序列有唯一附着值，则序列收敛于该附着值

♡

证明 1) 附着值集为非空闭集 $\bar{A}_n$（A_n 表示指标 $i \geqslant n$ 的点 a_i 的集合）的递减列的交

2) 设 a 为 $A=\bigcap_1^\infty \bar{A}_n$ 的唯一元素，对于 a 的任意邻域 V，闭集 $\bar{A}_n\cap\complement V$ 显然有交为空集。于是由它们构成递减列，其中之一必为空集，即从某个 n 起有 $\bar{A}_n\subset V$，特别地 $A_n\subset V$

更一般地可以验证，任意由被赋以滤子基 $\mathcal{B}$ 的集合 X 到紧空间 E 的映射 f 至少有一个关于 $\mathcal{B}$ 的附着值，且若 f 有唯一的附着值，f 就收敛于该值

注 在紧拓扑空间中，序列 $\{a_n\}$ 形成的点集 A 总有聚点；事实上，A 可能为有限集，甚至退化为一个点，只要所有 a_n 都恒等；换言之，当一点成为序列 (a_n) 的附着值时，它要么为 a_n 的集合 A 的聚点，要么与无限个 a_n 重合

4.2 度量空间

在拓扑空间中，邻域的概念用来明确在一点的周围一个集合有多么小，即所谓集合之小的阶，并由此得出收敛性与连续性的概念；在拓扑群中，一个集合有多么小可通过平移把它与单位元的邻域相比较，于是可谈论函数的一致连续性

下面将在距离空间中重新发现类似的可能性。在这类空间中，两点的靠近程度不再通过参考空间的一个特殊点的邻域确定，而通过依赖这两个点的一个数来确定。距离空间的一般定义由 M. Fréchet[a]给出

[a]弗雷歇 (René Maurice Fréchet,1878.9.2-1973.6.4) 法国数学家，对点集拓扑做出了重大贡献，定义并创立了抽象空间理论

4.2.1 基本概念

4.2.1.1 距离与拟距离

定义 4.21 (距离空间)

设 M 为任意集合，若映射 $d: M\times M\to\mathbb{R}^+, (x,y)\mapsto d(x,y)$ 满足下列性质：

M_1 :（非退化性）$(\forall x,y\in M):[(x=y)\Leftrightarrow(d(x,y)=0)]$

M_2 :（对称性）$(\forall x,y\in M):d(x,y)=d(y,x)$

M_3 :（三角不等式）$(\forall x,y,z\in M):d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

则称函数 d 为度量 (**measure/метрика**) 或距离 (**distance/расстояние**)，称 $d(x,y)$ 为点 x,y 间距离，称 (M,d) 为度量空间 (**metric space/метрическое пространство**) 或距离空间 ♣

定义 4.22 (拟距离)

设 Q 为任意集合，若映射 $q: Q\times Q\to\mathbb{R}^+, (x,y)\mapsto q(x,y)$ 满足下列性质：

$E_1:(\forall x,y\in Q):[(x=y)\Rightarrow(q(x,y)=0)]$

$E_2:(\forall x,y\in Q):q(x,y)=q(y,x)$(对称性)

$E_3:(\forall x,y\in Q):q(x,y)\leqslant q(x,z)+q(z,y)$(三角不等式)

则称函数 q 为拟度量或拟距离，称 $d(x,y)$ 为点 x,y 之间的拟距离 ♣

注 （拟距离与距离差异）

拟距离与距离概念仅有的差别在于 f 可取值 $+\infty$，以及两个不同点可以有零拟距离。因此，判断拟距离 f 是否为距离，只需验证任何 $f(x,y)$ 是否有限以及是否有

$$(x\neq y)\Rightarrow(f(x,y)\neq 0)$$

定义 4.23 (等距映射)

设 (M,d) 和 (M',d') 为两个距离空间，若双射 $f:M\to M', x\mapsto x'$ 满足

$$(\forall x,y\in M): d(x,y)=d'\left(x',y'\right)$$

则称该双射为等距映射 **(изометрическое отображение/equidistant mapping)**（不引起歧义时简称等距 **(изометрия/isometry)**，即距离同构

♣

定义 4.24 (开球，闭球，球面)

设 (M,d) 为距离空间，称满足 $d(a,x)<r$ 的 M 的点 x 的全体 $B(a,r)$ 为中心为 a 、半径为 r ($r\geqslant 0$ 或为 $+\infty$) 的开球 **(open ball)**；称满足 $d(a,x)\leqslant r$ 的 M 的点 x 的全体 $B(a,r)$ 为中心为 a 、半径为 r ($r\geqslant 0$ 或为 $+\infty$) 的闭球 **(closed ball)**；称满足 $d(a,x)=r$ 的 M 的点集 $S(a,r)$ 为中心为 a、半径为 $r\geqslant 0$ 的球面 **(sphere)**

有时也记 $B_r(a)=\{x\in M|\rho(x,a)<r\}$ 为中心为 a 、半径为 r 的开球 **(открытый шар с центром в точке a и радиусом $r>0$)**，记 $B_r^c(a)=\{x\in M|\rho(x,a)\leqslant r\}$ 为中心为 a 、半径为 r ($r\geqslant 0$) 的闭球 **(замкнутый шарс центром в точке a и радиусом $r>0$)**

当 M 为 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 时，经常称开球与闭球为开圆盘 **(open disk)** 与闭圆盘 **(closed disk)**，经常称球面为圆周 **(circle)**

♣

性质 (距离空间开闭对偶性)

设 M 为度量空间，则下列命题成立：

1) 若集 G 为开球，则 $M\backslash G$ 为闭球

2) 若集 F 为闭球，则 $M\backslash F$ 为开球

证明 1) 设 G 为开球，观察点 $x_0\in(M\backslash G)'$。假设 $x_0\notin M\backslash G$，则有

$$x_0\in G\Rightarrow(\exists B_r\left(x_0\right)\subset G): B_r\left(x_0\right)\cap(M\backslash G)=\varnothing$$

则 x_0 不为 $M\backslash G$ 上极限点，矛盾

2) 设 F 为闭球，观察点 $x_0\in M\backslash F$ 。假设 $\nexists B_r\left(x_0\right)\subset M\backslash F$，则有对于 $x_0\notin F$

$$(\forall r>0)(B_r\left(x_0\right)\cap F\neq\varnothing)\Rightarrow(\forall r>0)\left(B_r\left(x_0\right)\setminus\{x_0\}\right)\cap F\neq\varnothing$$

则有 $x_0\in F'\subset F$，矛盾

性质 (开球与闭球集运算)

设 M 为度量空间，则下列命题成立：

1) (开球可数并与有限交封闭性) 若 G_α 为开球，则集 $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ 和 $\bigcap\limits_{k=1}^n G_{\alpha_k}$ 也为开球

2) (闭球可数交与有限并封闭性) 若 F_α 为闭球，则集 $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ 和 $\bigcup\limits_{k=1}^n F_{\alpha_k}$ 也为闭球

证明 1) 设集合 G_α 为开球，则有

$$x\in\bigcup_\alpha G_\alpha\Rightarrow(\exists\alpha_0): x\in G_{\alpha_0}\Rightarrow(\exists B_r(x)\subset G_{\alpha_0}): B_r(x)\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$$

则有 $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ 为开球，又

$$x\in\bigcap_{k=1}^n G_{\alpha_k}\Rightarrow(\forall k\in\overline{1;n}): x\in G_{\alpha_k}$$

则有 $(\exists B_{r_k}(x)\subset G_{\alpha_k}): B_r(x)\subset B_{r_k}(x)\subset G_{\alpha_k}$，其中 $r=\min\{r_1,\ldots,r_n\}$，因此则由 $B_r(x)\subset\bigcap\limits_{k=1}^n G_{\alpha_k}$ 有 $\bigcap\limits_{k=1}^n G_{\alpha_k}$ 为开球

2) 设 F_α 为闭球，类似地

$$M\backslash\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)=\bigcup_\alpha(M\backslash F_\alpha)-\text{为开球}\Rightarrow\bigcap_\alpha F_\alpha-\ \text{为闭球}$$

$$M\backslash\left(\bigcup_{k=1}^n F_{\alpha_k}\right)=\bigcap_{k=1}^n(M\backslash F_{\alpha_k})-\ \text{为开球}\Rightarrow\bigcup_{k=1}^n F_{\alpha_k}-\ \text{为闭球}$$

性质即证

定义 4.25 (距离空间收敛)

类似拓扑空间定义，设 f 为集 X 到距离空间 Y 的映射，$\mathcal{B}$ 为 X 上滤子基，b 为 Y 的点。若对于 b 的任意邻域 V，存在 $B\in\mathcal{B}$ 使得 $f(B)\subset V$，形式化即

$$(\forall V\in\mathcal{V}(b))(\exists B\in\mathcal{B}):f(B)\subset V$$

则称 f 沿滤子基 $\mathcal{B}$ 收敛 **(converge)** 于 b（或有极限 **(limit)** b），记为

$$\lim_{\mathcal{B}}f=b$$

特别地，当 $X=Y$ 并且取 $\mathcal{B}$ 为自然数集的滤子基，定义一般写为：若存在序列 $\{x_n\in M\}$ 满足

$$(\exists x\in M):\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$$

则称序列（沿自然数集上滤子基）收敛 (converge) ♣

定义 4.26 (直径)

设 (M,d) 为距离空间，A 为 M 子集，称距离 $d(x,y),x,y\in A$ 的上确界 $\delta(A)$ 为子集 A 的直径 (diameter)，形式化记为

$$\delta(A):=\sup_{x,y\in A}\{d(x,y)\}$$

♣

定义 4.27 (有界集)

设 M 为距离空间，A 为 M 子集，若子集 A 的直径有限，即

$$(\exists R>0)(\exists a\in M):A\subset B_R(a)$$

则称 A 为 M 上有界集 **(bounded set)**，反之则称 A 为 M 上无界集 ♣

定义 4.28 (振幅)

设任意集合 X 到距离空间 M 的映射 f，称 $f(Y)$ 的直径为 f 在 X 的子集 Y 上的振幅 **(amplitude)** ♣

4.2.1.2 距离拓扑

定义 4.29 (距离拓扑)

在距离空间 M 中，若 E 的子集要么为空集，要么对于任何 $x\in A$，存在中心为 x 、半径非零的开球包含在 A 中，则称这些子集为 E 的开集

显然，这里定义的 M 的开集全体满足拓扑空间的公理 $\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_2,\mathrm{O}_3$（定义4.1），称用这些开集定义的 E 上的拓扑为距离空间 E 的拓扑，不引起歧义时简称距离拓扑 ♣

注（距离拓扑开集与开球定义等价性）

首先，任意开球 $B(a,r)$ 为开集。当 $r=0$ 时显然。当 $r>0$ 时，设 $x\in B(a,r)$，则开球 $B(x,(r-d(a,x)))$ 包含在 $B(a,r)$ 中，因为

$$d(x,y)<\rho-d(a,x)\Rightarrow d(a,y)\leqslant d(a,x)+d(x,y)<r$$

由此任意开球的并为开集；反之，开集的定义推出任意开集为开球的并。如此，M 的开集与开球的并等价

定理 4.5 (距离拓扑空间分离性)

任意距离拓扑空间均为分离空间

证明 若 x 和 y 为距离拓扑 M 的两个不同点，开球 $B(x,r)$ 和 $B(y,r)$（其中 $r \leqslant \dfrac{d(x,y)}{2}$）就构成 x 和 y 的两个不相交的邻域

推论 4.4 (距离空间沿自身滤子基极限点唯一性)

距离空间 M 沿 M 的滤子基至多存在一个极限点

证明 由分离空间极限唯一性 (4.3) 即得

命题 4.4 (距离拓扑同构充分条件)

设 d 和 d' 为集合 M 上的两个距离，若它们同时趋向于零，即

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0) : [(d(x,y) < \eta \Rightarrow d'(x,y) < \varepsilon]$$

则联系 d 和 d' 的拓扑同构

证明 由假设，被赋有与 d 相联系的拓扑的 M 到被赋有与 d' 相联系的拓扑的 M 上的映射 $x \to x$ 为双方连续的，则为同胚

注 滥用距离往往会使证明变繁琐，并且掩盖了现象的真正起因。该命题表明产生这种情况的部分原因在于集合 E 上的许多不同的距离可以联系同一个拓扑，这些距离并不是研究这一拓扑的内在工具

注 (距离拓扑)

当 $x \neq 0$ 固定时，$|x-y|$ 与 $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right|$ 中任意一个趋向于零时二者必定同时趋向于零，但当 x, y 都可变动时，例如取 $x = 2\varepsilon, y = \varepsilon, \varepsilon \to 0$，则有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\right| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$$

换言之，两个距离给出的拓扑结构相同，但给出的一致结构不相同。下文将专门讨论距离空间相关的一致连续性

4.2.1.3 连续与 Heine 归结原理

定义 4.30 (距离空间连续性)

设距离空间 $(E, d_E), (F, d_F)$，映射 $f(x) : E \to F$，若对于任意 X 上序列 $\{x_n\} : x_n \to x$，均有在 Y 上 $f(x_n) \to f(x)$，形式化即固定 $x \in E$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in E) : [(d_E(x,y) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon)]$$

则称映射 $f(x) : E \to F$ 在点 x 上连续 **(continuous)**

类似地，若

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in E) : [(d_E(x,y) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon)]$$

则称映射 $f(x) : E \to F$ 在 E 上连续 **(continuous)**。若

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in E) : [(d_E(x,y) < \delta) \Rightarrow (d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon)]$$

则称映射 $f(x) : E \to F$ 在 E 上一致连续 **(uniformly continuous)**

命题 4.5 (Heine 归结原理)

设 M 为距离空间，$A \subset M$，f 为 A 到拓扑空间 F 的映射，则对于任意 $a \in \bar{A}$ 和 $b \in F$，则下列命题等价：

1) Heine 序列语言：对于 A 的任意趋向于 a 的点列 (x_n) 有 $\lim f(x_n) = b$，形式化即为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

2) Cauchy 极限语言：

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

证明 1) $\Rightarrow$ 2)：若 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时不趋向于 b，则存在 b 的邻域 V，使得对于任意 a 在 A 中的邻域 v 有 $f(v) \not\subset V$；特别地，存在点 $x_n \in A \cap B(a, \dfrac{1}{n})$，使得 $f(x_n) \notin V$；点列 (x_n) 收敛于 a，而 $f(x_n)$ 不收敛于 b，矛盾

2) $\Rightarrow$ 1) 在拓扑空间中直接成立

推论 4.5 (距离空间到拓扑空间点上连续性充要条件)

距离空间 M 到拓扑空间 F 的映射 f 在点 a 上连续的充要条件为任意 M 的收敛于 a 的点列 (x_n) 均有点列 $(f(x_n))$ 收敛于 $f(a)$

4.2.1.4 完备空间与压缩映射原理

定义 4.31 (Cauchy 序列)

设距离空间 (M, d) 上有序列 $\{x_n\}$，若

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geqslant N) : d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

则称满足条件的序列为 **Cauchy 序列 (Cauchy sequence)** 或基本序列 **(fundamental sequence/фундаментальная последовательность)**

注 (Cauchy 序列)

事实上，也可定义若 $\lim \delta(A_n) = 0$，则 (x_n) 为 Cauchy 序列

定义 4.32 (完备空间)

若距离空间 M 上任意 Cauchy 序列均收敛（也称为，任意 Cauchy 序列均满足 Cauchy 准则），则称距离空间 M 为 完备度量空间 **(complete metric space/полное метрическое пространство)**（或 **Cauchy** 空间 **(Cauchy space)**），在不引起歧义时简称完备空间 **(complete space/полное пространство)**

例题 4.1 (完备空间)

设 $\{x_n(t)\} : x_n(t) \in \mathcal{C}[a;b], \forall n \in \mathbb{N}, t \in [a;b]$。假设序列 $\{x_n\}$ 在 $\mathcal{C}[a;b]$ 上为 Cauchy 序列，即

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geqslant N) : \max_{t\in[a;b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

则由函数序列一致收敛 Cauchy 准则 (??) 有 $x_n(t) \overset{[a;b]}{\longrightarrow} x(t)$ 对于某个函数 $x(t), t \in [a;b]$。由连续函数一致收敛为连续函数，则 $x(t) \in \mathcal{C}[a;b]$，则 $\mathcal{C}[a;b]$ 上一致收敛。因此，序列 $\{x_n(t)\}$ 收敛，空间 $\mathcal{C}[a;b]$ 为完备空间

定理 4.6 (Hausdorff 度量空间完备化定理/теорема Хаусдорфа о пополнении метрического пространства

设 M 为度量空间，则存在唯一（精确到等距意义）的度量空间 $\tilde{M}$ 为完备空间（亦即 $M \sim M_0 \subset \tilde{M}, \bar{M}_0 = \tilde{M}$）

证明 1) 考虑 M 上 Cauchy 序列 $\{x_n\}$。若二序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $d(x_n,y_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$，则称二序列等价。下设 $\tilde{M}$ 为 Cauchy 序列等价类的集合，则在 $\tilde{M}$ 上引入距离 $\tilde{d}$，即有

$$(\forall X,Y\in\tilde{M}):\tilde{d}(X,Y)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n),\{x_n\}\in X,\{y_n\}\in Y$$

首先指出 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$ 的存在性：

$$\begin{aligned}d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)&\leqslant d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)+d(y_m,y_n)-d(x_m,y_m)\\&=d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

同理有 $d(x_m,y_m)-d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}0$，因此数值序列 $\{d(x_n,y_n)\}$ 为 Cauchy 序列且收敛

设 $\{x_n\}\sim\{x'_n\},\{y_n\}\sim\{y'_n\}$，下证 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x'_n,y'_n)$：

$$\begin{aligned}d(x_n,y_n)-d(x'_n,y'_n)&\leqslant d(x_n,x'_n)+d(x'_n,y'_n)+d(y'_n,y_n)-d(x'_n,y'_n)\\&=d(x_n,x'_n)+d(y_n,y'_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

同理得证 $d(x'_n,y'_n)-d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x'_n)+d(y_n,y'_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$，则度量 $\tilde{d}(X,Y)$ 的定义正确

2) 下证空间 $\tilde{M}$ 为度量空间。显然 $(\forall X,Y):\tilde{d}(X,Y)\geqslant 0$ 且有

$$\tilde{d}(X,Y)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0\Leftrightarrow\{x_n\}\sim\{y_n\}\Leftrightarrow X=Y$$

而对称性 $\tilde{d}(X,Y)=\tilde{d}(Y,X)$ 显然；三角不等式，即 $\tilde{d}(X,Y)\leqslant\tilde{d}(X,Z)+\tilde{d}(Z,Y)$ 由

$$d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,z_n)+d(z_n,y_n)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}d(x_n,z_n)+\lim_{n\to\infty}d(z_n,y_n)$$

即证，则空间 $\tilde{M}$ 为度量空间

3) 设 M_0 为包含固定值序列 $\{c,c,c,\ldots\}$ 的 X 的元素的集合，其中 $c\in M$。则由

$$x\in M\Rightarrow\{x,x,x,\ldots\}\in X,X\in M_0$$

有 $M\sim M_0$。此外，当 $x\neq y$ 时，$x,y\in M,x\sim X,y\sim Y,X\neq Y$，这时 $d(x,y)=\tilde{d}(X,Y)>0$

下证 $\bar{M}_0=\tilde{M}$。对于 $\forall X\in\tilde{M}$，考虑序列 $\{x_n\}\in X$。对于某个 $n=1,2,\ldots$ 有 $\exists X_n\in M_0:\{x_n,x_n,x_n,\ldots\}\in X_n,\tilde{d}(X,X_n)=\lim\limits_{m\to\infty}d(x_m,x_n)$，则

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,m\geqslant N):d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

则有 $(\forall n\geqslant N):\lim\limits_{m\to\infty}d(x_m,x_n)\leqslant\varepsilon\Rightarrow(\forall n\geqslant N):\tilde{d}(X,X_n)\leqslant\varepsilon$ 因此 $X_n\to X_{\text{и}}$ 且 $\bar{M}_0=\tilde{M}$

4) 下证 $\tilde{M}$ 为完备空间。设 $\{X_n\}$ 为 Cauchy 序列

$$(\forall X_n\in\tilde{M})(\exists Y_n\in M_0):\tilde{d}(X_n,Y_n)\leqslant\frac{1}{n},\{y_n,y_n,y_n,\ldots\}\in Y_n$$

设 $\{y_1,y_2,y_3,\ldots\}\in X$。下证 $\{Y_n\}$ 为 Cauchy 序列：

$$\tilde{d}(Y_n,Y_m)\leqslant\tilde{d}(Y_n,X_n)+\tilde{d}(X_n,X_m)+\tilde{d}(X_m,Y_m)\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}0$$

则 $\{Y_n\}$ 为 Cauchy 序列且 $X\in\tilde{M}$，又由

$$\tilde{d}(X,X_n)\leqslant\tilde{d}(X,Y_n)+\tilde{d}(Y_n,X_n)\leqslant\lim_{m\to\infty}d(y_m,y_n)+\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

则有 $X_n\to X$，则序列 $\{X_n\}$ 收敛，则空间 $\tilde{M}$ 为完备空间

5) 下证 $\tilde{M}$ 精确到等距唯一。设存在另一个 M 的完备空间 M^*，则

$$M\sim M_0\subset\tilde{M},\bar{M}_0=\tilde{M}$$

$$M\sim M_1\subset M^*,\bar{M}_1=M^*$$

则有 $M_0\sim M_1$

设 $X, Y \in \tilde{M}, X, Y \notin M_0$，则

$$\exists X_n, Y_n \in M_0 : X_n \to X, Y_n \to Y,$$

$$X_n \leftrightarrow X_n^* \in M_1, Y_n \leftrightarrow Y_n^* \in M_1, \lim_{n\to\infty} X_n^* = X^* \in M^*, \lim_{n\to\infty} Y_n^* = Y^* \in M^*.$$

这些关系允许在 $\tilde{M}$ 与 M^* 间构造双射 $X \leftrightarrow X^*, Y \leftrightarrow Y^*$，这时

$$\tilde{d}(X,Y) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}\left(X_n, Y_n\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}\left(X_n^*, Y_n^*\right) = \tilde{d}\left(X^*, Y^*\right)$$

即 $\tilde{M}$ 与 M^* 等距

定理 4.7 (嵌套球定理/Теорема о вложенных шарах)

设 M 为距离空间，若 M 为完备空间，则对于 M 的任意满足 $\lim \delta\left(X_n\right) = 0$ 的非空闭集递减列 $\left(X_n\right)$，所有 X_n 的交 X 恰好包含一个点。形式化记为

$$\left(\exists \lim_{n\to\infty} r_n = 0\right)(\forall n \in \mathbb{N}) : B_{r_{n+1}}\left(a_{n+1}\right) \subset B_{r_n}\left(a_n\right) \Rightarrow (\forall n)\left(\exists x^* \in B_{r_n}\left(a_n\right)\right)$$

♡

证明 在每个 X_n 中选取一个任意点 x_n，若 $p \geqslant n$，则有 $X_p \subset X_n$，因而也有 $x_p \in X_n$。于是满足 $p \geqslant n$ 的点 x_p 的集合 A_n 包含在 X_n 中，由此得 $\lim \delta\left(A_n\right) = 0$，则序列 $\left(x_n\right)$ 为 Cauchy 列。由 M 完备，则 x_n 收敛于点 x。由对于固定的 n，x 为属于 X_n 的点 x_{n+p} 的极限，而 X_n 为闭集，则有 $x \in X_n$ 对于任何 n 成立，从而 $x \in X$

最后由 $\delta(X) \leqslant \delta\left(X_n\right)$ 对于任何 n 成立，则有 $\delta(X) = 0$。因此 X 只可能包含一个点

定义 4.33 (Lipschitz 映射)

设 M 为距离空间，$k > 0$，映射 $f : M \to M$，若

$$(\forall x, y \in M) : d(f(x), f(y)) \leqslant k d(x, y)$$

则称映射 f 为比为 k 的 **Lipschitz** 映射 (**Lipschitz mapping**)。特别地，当 $k < 1$ 时，称 f 为压缩映射 (**contractive mapping/сжимающее отображение**)，不引起歧义时简称压缩 (**contraction/сжатие**)

♣

定理 4.8 (Banach 不动点定理/压缩映射原理/contractive mapping principle/принцип сжимающих отображ

任意完备空间的压缩映射有且仅有一个不动点 (неподвижсная точка)$x : f(x) = x$

♡

证明

存在性：设完备空间 (M, d)，固定任意点 $x_0 \in M$，构造点列 $\left\{x_n\right\} : x_{n+1} = f\left(x_n\right), n = 0, 1, 2, \ldots$，则由压缩映射定义即有

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) = d\left(f\left(x_n\right), f\left(x_{n-1}\right)\right) \leqslant \alpha d\left(x_n, x_{n-1}\right) \leqslant \alpha^2 d\left(x_{n-1}, x_{n-2}\right) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n d\left(x_1, x_0\right)$$

由此即得对于 $(\forall m \geqslant 1)(\forall n \geqslant 1)$ 满足

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+m}, x_n\right) &\leqslant d\left(x_{n+m}, x_{n+m-1}\right) + \ldots + d\left(x_{n+1}, x_n\right) \\ &\leqslant d\left(x_1, x_0\right) \cdot \left(\alpha^{n+m-1} + \ldots + \alpha^n\right) \leqslant d\left(x_1, x_0\right) \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, \end{aligned}$$

因此序列 $\left\{x_n\right\}$ 为 M 上基本序列。由 M 的完备性有存在 $x \in M : x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

注意到

$$d\left(x_{n+m}, x_n\right) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(x_1, x_0\right) \Rightarrow d\left(x, x_n\right) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(x_1, x_0\right)$$

则 f 为连续映射，因此等式 $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$ 当 $n \to \infty$ 时即有 $x = f(x)$

唯一性：设存在另一个点 $\tilde{x} : f(\tilde{x}) = \tilde{x}, x \neq \tilde{x}$，则由 $d(\tilde{x}, x) > 0$ 即有

$$d(x, \tilde{x}) = d(f(x), f(\tilde{x})) \leqslant \alpha d(x, \tilde{x})$$

这表明 $1 \leqslant \alpha$，与压缩映射定义矛盾，定理得证

注 该定理由 Banach 在 1992 年证明，因此也称为 Banach 不动点定理

推论 4.6 (叠置压缩映射原理)

设 M 为完备空间，映射 $f: M \to M$，而 f^n，即 $f^n(x) = f(f(\ldots(f(x))\ldots))$ 为压缩映射，则有且仅有一个不动点 $x = f(x)$

证明 存在性：由压缩映射原理 (4.8) 有，有且仅有一个点 $x \in M$ 满足 $f^n(x) = x$，则有

$$d(x, f(x)) = d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) \leqslant \alpha d(x, f(x))$$

若 $d(x, f(x)) \neq 0$，则导出矛盾。因此 $d(x, f(x)) = 0$ 且 x 为映射 f 的不动点

唯一性：设 $x = f(x), \tilde{x} = f(\tilde{x})$，则 $x = f^n(x), \tilde{x} = f^n(\tilde{x})$，但由映射 f^n 不动点的唯一性即有 $x = \tilde{x}$

定理 4.9 (压缩映射原理局部形式/локальная форма принципа сжимающих отображений)

设 M 为完备空间，$f: B_r^c(x_0) \to M$ 为 $B_r^c(x_0)$ 上压缩映射，即

$$(\forall x_1, x_2 \in B_r^c(x_0)): d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha d(x_1, x_2)$$

并设 $d(f(x_0), x_0) \leqslant r(1-\alpha)$，则在 $B_r^c(x_0)$ 上有且仅有一个不动点

证明 由条件对于 $(\forall x \in B_r^c(x_0))$ 有

$$d(f(x), x_0) \leqslant d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \leqslant \alpha d(x, x_0) + r(1-\alpha) \leqslant r$$

则事实上有 $f: B_r^c(x_0) \to B_r^c(x_0)$

设 $\tilde{M} = B_r^c(x_0)$，这时 $\tilde{M}$ 为完备空间，而 f 为 $\tilde{M}$ 上压缩映射，则由压缩映射原理 (4.8) 有且仅有一个不动点 $x \in \tilde{M}$

4.2.2 紧距离空间

4.2.2.1 紧距离空间与准紧距离空间

定义 4.34 (紧距离空间)

设 X 为距离空间，若任意无穷序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in X$ 都包含收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$ 且 $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$，则称该距离空间为紧距离空间 (**compact metric space/компактное метрическое пространство**)

定义 4.35 (准紧距离空间)

设 X 为距离空间，若任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in X$ 都包含基本子序列 $\{x_{n_k}\}$，则称该距离空间为准紧距离空间 (**предкомпактное метрическое пространство**)

定理 4.10 (距离空间紧性充要条件)

距离空间 X 为紧距离空间的充要条件为 X 同时为准紧距离空间与完备空间

定理 4.11 (紧距离空间完备性)

任意紧距离空间均为完备空间

证明 对于紧距离空间 E 的任意序列 (x_n)，该序列附着值集为 $A = \cap \bar{A}_n$。若序列为 Cauchy 序列，则 $\lim \delta(A_n) = 0$，则 $\delta(A) = 0$。此外，由紧拓扑空间附着值性质 (4.4) 有 A 非空，因此，它退化为一点；又由紧拓扑空间附着值性质 (4.4)，序列收敛于该点

定理 4.12 (紧距离空间不动点存在唯一性)

设 M 为完备空间，$f: M \to M$ 且

$$(\forall x_1 \neq x_2): d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$$

则若设 M 为准紧距离空间，则有且仅有一个不动点

证明

存在性：考虑量 $\inf_{x \in M} d(x, f(x)) = d_0 \geqslant 0$

若 $d_0 = 0$, 则存在 $\{x_n\}: x_n \in M, d(x_n, f(x_n)) \to 0$。由 M 为紧距离空间，则存在 $\{x_{n_k}\}: x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in M$。但由于 $d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$，则 $d(x, f(x)) = 0$

若 $d_0 > 0$，即有 $(\forall x \in M): d(x, f(x)) \geqslant d_0 > 0$。选取序列 $\{x_n\}$ 满足 $d(x_n, f(x_n)) \to d_0$。由 M 为紧距离空间，再次选择一个收敛子序列 $\{x_{n_k}\}: x_{n_k} \to x, d(x, f(x)) = d_0$，但 $d_0 \leqslant d\left(f(x), f^2(x)\right) < d(x, f(x)) = d_0$，导出矛盾

唯一性：设 $x = f(x), \tilde{x} = f(\tilde{x})$，则 $d(x, \tilde{x}) = d(f(x), f(\tilde{x})) < d(x, \tilde{x})$，当 $x \neq \tilde{x}$ 时矛盾

4.2.2.2 有界性与完全有界性

定理 4.13 (距离空间有界充分条件)

设距离空间 X，若 X 为准紧距离空间，则 X 有界

证明 反证：设 $\sup_{x,y \in X} d(x, y) = +\infty$，则有 $(\exists x_n, y_n \in X): d(x_n, y_n) \to +\infty$。从序列 $\{x_n\}$ 中选出一个基本子序列 $\{x_{n_k}\}$，然后从 $\{y_{n_k}\}$ 中选出一个基本子序列 $\{\tilde{y}_{n_k}\}$，则这两个序列 $\{\tilde{x}_{n_k}\}$ 和 $\{\tilde{y}_{n_k}\}$ 为基本序列。则由 Hausdorff 度量空间完备化定理 (4.6) 有，当 $d(\tilde{x}_{n_k}, \tilde{y}_{n_k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$，则与 $d(x_n, y_n) \to +\infty$ 矛盾

例题 4.2 (距离空间有界充分条件不必要性)

设 $p \geqslant 1$，并设

$$X = l_p = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}, \quad d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p}$$

观察向量 $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ (1 位于第 k 位)，则

$$(\forall k): \|e_k\|_{l_p} = 1, \quad (\forall k \neq m): d(e_k, e_m) = \sqrt[p]{2}$$

则 $d(e_k, e_m) \nrightarrow 0$ 且从序列 $\{e_k\}$ 中无法选出基本序列

注 该例表明距离空间有界性不一定能推出准紧性，则表明距离空间有界充分条件 (4.13) 实际为距离空间有界充分不必要条件

定义 4.36 (ε-网)

设 X 为距离空间，$M \subset X, \varepsilon > 0$，若 $M \subset \bigcup_{x \in S} B_\varepsilon(x)$，则称 S 为集 M 的 ε-网 (**ε-сеть**)

定义 4.37 (完全有界)

设 X 为距离空间，若 $\forall \varepsilon > 0$ 都存在集 X 的有限 ε-网，则称 X 完全有界 (**вполне ограниченное**)

命题 4.6 (完全有界距离空间有界性)

若距离空间 X 完全有界，则 X 有界

证明 由完全有界定义有 $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k)$，即得

$$(\forall y_1 \in X)(y_1 \in B_\varepsilon(x_m))(\forall y_2 \in X)(y_2 \in B_\varepsilon(x_r)):$$
$$d(y_1, y_2) \leqslant d(y_1, x_m) + d(x_m, x_r) + d(x_r, y_2) \leqslant 2\varepsilon + \max_{m,r} d(x_m, x_r) < \infty$$

命题即证

定理 4.14 (Hausdorff 定理/теорема Хаусдорфа)

距离空间 X 为准紧距离空间的充要条件为 X 完全有界

证明

必要性：设 X 为准紧距离空间，取任意 $\varepsilon > 0$ 与 $x_1 \in X$。若 $X \subset B_\varepsilon(x_1)$，则命题已证。在相反的情况 $\exists x_2 \in X \backslash B_\varepsilon(x_1)$，若 $X \backslash B_\varepsilon(x_1) \subset B_\varepsilon(x_2)$，则命题已证。在相反的情况 $\exists x_3 \in X \backslash (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$，以此类推。若该过程在某步骤结束，则构造了一个有限 ε-网，完全有界性得证。

考虑上述过程不结束的情况，则构造了一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \ldots : d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon, \forall n \neq m$$

但不可能从中选出一个基本子序列，矛盾

充分性：设 X 完全有界，则考虑任意序列 $\{x_n\}$ 与数值序列 $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$ 满足

$$\{x_n\} \subset X \subset \bigcup_{k=1}^{n_1} B_{\varepsilon_1}(y_{1,k})$$

则存在球 $B_{\varepsilon_1}(y_{1,k})$ 包含无穷个点 x_n。此外，仅考虑 $B_{\varepsilon_1}(y_{1,k})$ 内的点 $x_{1,n}$。设 x_{n_1} 为第一个点，则

$$B_{\varepsilon_1}(y_{1,k}) \subset \bigcup_{k=1}^{n_2} B_{\varepsilon_2}(y_{2,k})$$

存在球 $B_{\varepsilon_2}(y_{2,k})$ 包含无穷个点 $x_{1,n}$。设 $\{x_{2,n}\}$ 为包含在 $B_{\varepsilon_2}(y_{2,k})$ 内的对应子序列。设 x_{n_2} 为满足 $n_2 > n_1$ 的第一个点

对 $\varepsilon_m, m = 3, 4, \ldots$ 继续该过程，得序列 $\{x_{n_k}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$，其中

$$d(x_{n_k}, x_{n_m}) < 2\varepsilon_s, s = \min\{n_k, n_m\} \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_m}) \to 0, n_k, n_m \to \infty$$

则得一个基本子序列，则 X 为准紧距离空间

定理 4.15 (开覆盖定理/Теорема об открытых покрытиях)

距离空间 X 为紧距离空间的充要条件为则从任意开覆盖 $X \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ 可选出有限子覆盖

$$G_{\alpha_k}, k = 1, \ldots, N : X \subset \bigcup_{k=1}^{N} G_{\alpha_k}$$

其中 G_α 均为开球

证明

充分性：考虑任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$，设 $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$，另外 $\bar{X}_n$ 为集 X_n 闭集。下证 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n \neq \varnothing$。反证：假设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n = \varnothing$，则有

$$X = X \backslash \varnothing = X \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash \bar{X}_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

而集 $G_n=X\backslash\bar{X}_n$ 为开集，因此由条件有 $\exists N\in\mathbb{N}:X\subset\bigcup\limits_{n=1}^{N}G_n$，则

$$\varnothing=X\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{N}G_n\right)=\bigcap_{n=1}^{N}(X\backslash G_n)=\bigcap_{n=1}^{N}\bar{X}_n$$

但由构造 $x_N\in\bigcap\limits_{n=1}^{N}\bar{X}_n$，矛盾。因此 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bar{X}_n\neq\varnothing$，则

$$(\exists x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{X}_n)(\forall n\in\mathbb{N}):x\in\bar{X}_n$$

观察数值序列 $\varepsilon_m=\dfrac{1}{m}$ 则有

$$(\forall m,n\in\mathbb{N}):(B_{\varepsilon_m}(x)\backslash\{x\})\cap X_n\neq\varnothing$$

则 $\exists x_{n_1}\in(B_{\varepsilon_1}(x)\backslash x)\cap X_1,\exists x_{n_2}\in(B_{\varepsilon_2}(x)\backslash x)\cap X_{n_1+1},\exists x_{n_3}\in(B_{\varepsilon_3}(x)\backslash x)\cap X_{n_2+1},\ldots$，以此类推，得收敛到 $x\in X$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$。因此距离空间 X 为紧距离空间

必要性：若 X 为紧距离空间，则为准紧距离空间，则由 Haudorff 定理 (4.14) 有 X 完全有界，则对于 $\varepsilon_k=\dfrac{1}{2^k},k=1,2,\ldots$ 有

$$X\subset\bigcup_{s=1}^{n_k}B_{\varepsilon_k}(x_{k,s})$$

反证：设存在开覆盖 $X\subset\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$ 不能选出有限子覆盖，下令

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2},\quad X\subset\bigcup_{j=1}^{n_1}B_{\varepsilon_1}(y_{1j})$$

则存在球 $B_{\varepsilon_1}(y_{1j_1})$ 其不能被有限数量的 G_α 的集合覆盖。又令

$$\varepsilon_2=\frac{1}{2^2},\quad B_{\varepsilon_1}(y_{1j_1})\subset\bigcup_{j=1}^{n_2}B_{\varepsilon_2}(y_{2j})$$

(仅考虑与 $B_{\varepsilon_1}(y_{1j_1})$ 相交的球 $B_{\varepsilon_2}(y_{2j})$) 则存在球 $B_{\varepsilon_2}(y_{2j_2})$ 不能被有限数量集合 G_α 覆盖。进行无穷次上述过程，则得序列 $y_{1j_1},y_{2j_2},y_{3j_3},\ldots$，下证其为基本序列。则对于 $\forall m,n$ 有

$$\begin{aligned}
d\left(y_{nj_n},y_{(n+m)j_{n+m}}\right)\leqslant& d\left(y_{nj_n},y_{(n+1)j_{n+1}}\right)+d\left(y_{(n+1)j_{n+1}},y_{(n+2)j_{n+2}}\right)\\
&+\ldots+d\left(y_{(n+m-1)j_{n+m-1}},y_{(n+m)j_{n+m}}\right)\\
\leqslant&(\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1})+(\varepsilon_{n+1}+\varepsilon_{n+2})+\ldots+(\varepsilon_{n+m-1}+\varepsilon_{n+m})\\
=&\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n+m-1}}+\frac{1}{2^{n+m}}\right)\\
\leqslant&2\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots\right)=\frac{1}{2^{n-2}},
\end{aligned}$$

由 X 为紧距离空间，则 $\exists y\in X:y_{nj_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}y$，进而由 $y\in X\subset\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$ 得 $(\exists G_\alpha):y\in G_\alpha$，则有

$$(\exists\delta>0)(\forall n\geqslant N(\delta)):[(B_\delta(y)\subset G_\alpha)\Rightarrow(B_{\varepsilon_n}(y_{nj_n})\subset B_\delta(y)\subset G_\alpha)]$$

但球 $B_{\varepsilon_n}(y_{nj_n})$ 由定义不存在有限数量集合 G_α 覆盖，矛盾

定义 4.38 (可分空间)

设距离空间 X，若其中存在可数处处稠密集，亦即

$$(\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty})(\forall x\in X)(\forall\varepsilon>0):d(x_n,x)<\varepsilon$$

则称距离空间可分 (сепарабельное)

定理 4.16 (准紧距离空间可分性)
准紧距离空间为可分空间

证明 若 X 为准紧距离空间，由 Hausdorff 定理 (4.14) 有 X 完全有界，设 $(n \in \mathbb{N}) : \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{m_n} B_{\varepsilon_n}(x_{n,j}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

因此 $\{x_{n,j}\}$ 为可数处处稠密集，亦即

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X) : \left[(\varepsilon_n < \varepsilon) \Rightarrow \left(n > \frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

$$\left(x \in X \subset \bigcup_{j=1}^{m_n} B_{\varepsilon_n}(x_{n,j})\right) \Rightarrow \exists B_{\varepsilon_n}(x_{n,j}) : x \in B_{\varepsilon_n}(x_{n,j}) \Rightarrow d(x, x_{n,j}) < \varepsilon_n < \varepsilon$$

定理得证

4.2.2.3 特殊空间准紧性准则

注 （紧集上连续函数线性赋范空间）

设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 上紧集，记 $C(K)$ 为 K 上连续函数的线性赋范空间，则在其上定义

$$(\forall f(x) \in C(K))(\forall x \in K) : \|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

$$(\forall f, g \in C(K)) : d(f, g) = \|f - g\|$$

定义 4.39 (紧集上连续函数线性赋范空间一致有界)
设 $E \subset C(K)$，若

$$(\exists M > 0)(\forall x \in K)(\forall f \in E) : |f(x)| \leqslant M$$

则称 E 一致有界 (равномерно ограниченное)

定义 4.40 (紧集上连续函数线性赋范空间等度连续)
设 $E \subset C(K)$，若

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_1, x_2 \in K)(\forall f \in E) : [(d(x_1, x_2) < \delta) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)]$$

则称 E 等度连续 (равностепенно непрерывное)

定理 4.17 (Arzelà–Ascoli 定理/теорема Арцела-Асколи)
集合 $E \subset C(K)$ 为准紧距离空间的充要条件为集合 E 一致有界与等度连续

证明

必要性：设 E 为 $C(K)$ 上准紧距离空间，则由 Hausdorff 定理 (4.14)，该集合完全有界，则对于 $\forall \varepsilon > 0$ 存在有限 ε-网 $f_1, f_2, \ldots, f_k \in C(K)$。其中每个函数由 Weierstrass 定理有界，即 $(\forall x \in K) : |f_i(x)| \leqslant M_i$，现设 $M = \max\limits_{i=1,\ldots,k} M_i + \dfrac{\varepsilon}{3}$，则

$$(\forall f \in E)(\exists f_i) : d(f, f_i) = \max_{x \in K} |f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(x)| \leqslant |f_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant M_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant M$$

每一个函数 $f_i(x)$ 由 Cantor 定理在 K 上一致连续，则

$$(\exists \delta_i > 0)(\forall x_1, x_2 \in K) : \left[(|x_1 - x_2| < \delta_i) \Rightarrow \left(|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)\right]$$

下设 $\delta=\min_i\delta_i$，则有 $(\forall x_1,x_2\in E)$ 满足当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f_i(x_1)|+|f_i(x_1)-f_i(x_2)|+|f_i(x_2)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

等度连续性得证

充分性：当 $X=\mathbb{R},K=[a;b]$，命题显然。设 E 一致有界且等度连续，下证该集合完全有界。设 $(\forall x\in K)(\forall f\in E):|f(x)|\leqslant M$，固定 $\delta>0$ 可有

$$(\forall x_1,x_2\in K)(\forall f\in E):\left[(|x_1-x_2|<\delta)\Rightarrow\left(|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{5}\right)\right]$$

将闭区间 $[a;b]$ 通过点 $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ 划分为长度小于 δ 的区间且通过这些点绘制垂线 (вертикальная прямая)。从 y 轴的 $[-M;M]$ 选取 $y_0=-M<y_1<y_2<\ldots<y_m=M$ 划分为长度小于 $\frac{\varepsilon}{5}$ 的区间。因此，矩形 $[a;b]\times[-M;M]$ 将被划分为水平边 (горизонтальная сторона) 小于 δ 和垂直边小于 $\frac{\varepsilon}{5}$ 的矩形。现将每个函数 $f(x)\in E$ 与折线 (ломаная) $g(x)$ 在点 (x_k,y_l) 的顶点比较，在每个点 x_k 处与 $f(x)$ 的值最多相差 $\frac{\varepsilon}{5}$，亦即

$$|f(x_k)-g(x_k)|<\frac{\varepsilon}{5},|f(x_{k+1})-g(x_{k+1})|<\frac{\varepsilon}{5},|f(x_k)-f(x_{k+1})|<\frac{\varepsilon}{5}$$

进而 $|g(x_k)-g(x_{k+1})|<\frac{3\varepsilon}{5}$。又由在 x_k 与 x_{k+1} 之间函数 $g(x)$ 线性，则有

$$(\forall x\in[x_k,x_{k+1}]):|g(x_k)-g(x)|<\frac{3\varepsilon}{5}$$

对于任意点 $x\in[a;b]$ ，设 x_k 为从构造的划分到 x 的最左边的点，则有

$$|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f(x_k)|+|f(x_k)-g(x_k)|+|g(x_k)-g(x)|<\varepsilon$$

因此，构造的折线形成了集合 E 的 ε-网，又这样的折线数量有限，则 E 完全有界，则由 Hausdorff 定理 (4.14)，E 为 $C(K)$ 上准紧距离空间

例题 4.3 （Arzelà–Ascoli 定理）

观察分段线性函数 $f_n(x)$：

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & ,x\in[0;n]\\ x-n & ,x\in[n;n+1]\\ 1 & ,x\geqslant n+1\end{cases}$$

则 $f_n(x)$ 在 $[0;+\infty)$ 上连续，且 $f_n(x)\in[0;1]$。另外 $(\forall x):\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0\Rightarrow f(x)\equiv0$ ，但

$$\max_{x\in[0;+\infty)}|f_n(x)-0|=1$$

则 $f_n(x)$ 在 $[0;\infty)$ 上非一致收敛

由集 $K=[0;+\infty)$ 不为紧集，则从序列 $f_n(x)$ 无法选出基本子序列

注 该例表明 Arzelà–Ascoli 定理的紧性要求是本质的

定义 4.41 (L_p 空间平均连续)

设 $f(x)\in L_p[0;1]$，其中 $p\geqslant1$，若

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\left[(|h|<\delta)\Rightarrow\left(\int_0^1|f(t+h)-f(t)|^pdt<\varepsilon^p\right)\right]$$

其中 $(\forall t\notin[0;1]):f(t)=0$，则称该函数平均连续 **(непрерьвной в среднем)**

♣

引理 4.1 (L_p 空间平均连续性)

设 $f(x)\in L_p[0;1]$，其中 $p\geqslant1$，则函数 $f(x)$ 平均连续

♡

证明 类似 $L_1[0;1]$ 可分性 (3.39) 证明，对于 $L_p[a;b], p \geqslant 1$ 有对于 $\forall \varepsilon > 0$ 都存在多项式 $P_n(t)$ 满足

$$\int_{-1}^{2} |f(t) - P_n(t)|^p \, dt < \frac{\varepsilon^p}{4^p}$$

则 $P_n(x)$ 在 $x \in [0;1]$ 上一致连续，则

$$(\exists \delta > 0)(\delta < 1) : \left[(|h| < \delta) \Rightarrow \left(|P_n(t+h) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

由估计与 L_p 空间上 Minkowski 不等式 (3.41) 有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant & \left(\int_0^1 |f(t+h) - P_n(t+h)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left(\int_0^1 |P_n(t+h) - P_n(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \\ & + \int_0^{\frac{1}{p}} + (P_n(t) - f(t)|^p \, dt)^1 < \varepsilon\end{aligned}$$

引理即证

注 （$L_p[0;1]$ 约定）

在本节约定，对于度量空间 $L_p[0;1]$，定义距离

$$(\forall f, g \in L_p[0;1]) : d(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

且令 $x(t) \in L_p[0;1]$ 满足 $(\forall t \notin [0;1]) : x(t) \equiv 0$

定理 4.18 ($L_p[0;1]$ 空间 Riesz 准紧性判别法/признак предкомпактности М. Рисса)

函数族 $K \subset L_p[0;1]$ 为准紧距离空间的充要条件为该函数族函数满足

1) 沿范数一致有界

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in K) : \int_0^1 |x(t)|^p dt \leqslant c^p$$

2) 等度平均连续

$$(\forall x \in K)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) : \left[(h \in (0, \delta(\varepsilon)) \Rightarrow \left(\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p\right)\right]$$

♡

证明

必要性：设 K 为准紧距离空间，则由距离空间有界充分条件 (4.13) 有准紧距离空间 K 有界，下证其等度平均连续

由 Hausdorff 定理 (4.14) 有准紧距离空间 K 完全有界，则有 $(\forall \varepsilon > 0)$ 都存在 $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ 的 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 网，则由 L_p 空间平均连续性引理 (4.1) 有

$$(\forall i \in \overline{1;n})(\exists \delta_i > 0) : \left[(h \in (0;\delta_i)) \Rightarrow \left(\int_0^1 |x_i(t+h) - x_i(t)|^p \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p\right)\right]$$

设 $\delta = \min\limits_i \delta_i > 0$，则

$$(\forall i \in \overline{1;n}) : \left[(h \in (0;\delta)) \Rightarrow \left(\int_0^1 |x_i(t+h) - x_i(t)|^p \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p\right)\right]$$

对于任意 $x(t) \in K$ 都可找到 $x_i(t)$ 满足

$$\int_0^1 |x(t) - x_i(t)|^p \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

这时当 $h \in (0;\delta)$ 有

$$\left(\int_0^1 |x(t+h)-x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^1 |x(t+h)-x_i(t+h)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |x_i(t+h)-x_i(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\left(\int_0^1 |x_i(t)-x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$< \left(\int_0^1 |x(t+h)-x_i(t+h)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\left(\int_0^1 |x(t+h)-x(t)|^p dt\right) = \int_h^1 |x(s)-x_i(s)|^p\, ds \leqslant \int_0^1 |x(s)-x_i(s)|^p\, ds < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

则有

$$(\forall h \in (0;\delta): \left(\int_0^1 |x(t+h)-x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

等度平均收敛得证

2) 充分性：考虑 Steklov 函数平均值 (средние функция Стеклова)

$$x_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau$$

则有

$$|x_h(t)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right| \leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_{t-h}^{t+h} d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{1}{(2h)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$|x_h(t+u)-x_h(t)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t+u-h}^{t+u+h} x(\tau)d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right|$$
$$= \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} x(\tau+u)d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right| \leqslant \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u)-x(\tau)|d\tau$$
$$\leqslant \frac{1}{(2h)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u)-x(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \frac{1}{(2h)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 |x(\tau+u)-x(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

因此若 $x(t)$ 满足定理条件，则对于任意固定的 h，函数 $x_h(t)$ 在 $C[0;1]$ 上一致有界且等度连续。则函数族 $x_h(t)$ 在 $C[0;1]$ 上为准紧距离空间，则显然在 $L_p[0;1]$ 上也为准紧距离空间。另一方面

$$|x(t)-x_h(t)| \leqslant \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |x(t)-x(\tau)|d\tau = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |x(t)-x(t+\tau)|d\tau$$
$$\leqslant \frac{1}{(2h)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{-h}^{h} |x(t)-x(t+\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\int_0^1 |x(t)-x_h(t)|^p\, dt \leqslant \frac{1}{2h}\int_0^1 \left(\int_{-h}^{h} |x(t)-x(t+\tau)|^p d\tau\right) dt$$
$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_0^1 |x(t)-x(t+\tau)|^p d\tau\right) d\tau < \frac{1}{2h}\varepsilon^p \int_{-h}^{h} d\tau = \varepsilon^p$$

则由定理条件有

$$(\forall \tau : |\tau| < \delta) : \int_0^1 |x(t)-x(t+\tau)|^p d\tau < \varepsilon^p$$

则函数 $x_h(t)$ 为 K 的 ε 网。由该 ε 网为准紧距离空间，则由 Hausdorff 定理 (4.14) 有 K 也为准紧距离空间

注 (l_p 约定)

记以所有满足

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p<\infty,\quad p\geqslant 1$$

的序列 $x_1,x_2,x_3,\ldots$ 为元素的集合为 l_p

在该空间上引入范数和距离

$$\|x\|_{l_p}=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad d(x,y)=\|x-y\|_{l_p}$$

定理 4.19 (l_p 空间 Riesz 准紧性判别法)

距离空间 $E\subset l_p$ 为准紧距离空间的充要条件为满足下列条件

1)E 沿范数一致有界

$$(\exists c>0)(\forall x\in E):\|x\|_{l_p}<c$$

2)E 等度平均连续

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall x\in E):\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

♡

证明

必要性：若 E 准紧距离空间，则由 Hausdorff 定理 (4.14) 有 E 完全有界，则由距离空间有界性 (4.13) 有 E 有界

对于任意 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\in E$，设

$$x^n=(x_1,\ldots,x_n,0,0\ldots),\quad \tilde{x}^n=(0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},\ldots).$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists x_1,\ldots,x_m\in l_p):E\subset\bigcup_{k=1}^{m}B_{\varepsilon}(x_k)$$

而由 $(\forall k\in\overline{1;m})(\forall n\geqslant n_k):\|\tilde{x}_k^n\|_{l_p}<\varepsilon$，设 $N=\max(n_1,\ldots,n_m)$ 即有

$$(\forall k\in\overline{1;m})(\forall n\geqslant N):\|\tilde{x}_k^n\|_{l_p}<\varepsilon$$

进而有

$$(\forall x\in E)(\exists B_{\varepsilon}(x_k))(\forall n\geqslant N):\Big[(x\in B_{\varepsilon}(x_k))\Rightarrow\Big(\|\tilde{x}^n\|_{l_p}\leqslant\|\tilde{x}^n-\tilde{x}_k^n\|_{l_p}+\|\tilde{x}_k^n\|_{l_p}\leqslant 2\varepsilon\Big)\Big]$$

充分性：由条件设

$$(\exists c>0):\|x\|_{l_p}<c$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N):\|\tilde{x}^n\|_{l_p}<\varepsilon$$

$$(\forall x\in E)(\forall n\geqslant N):\|x-x^n\|_{l_p}=\|\tilde{x}^n\|_{l_p}<\varepsilon$$

固定某个 $n\geqslant N$，则集合 $\{x^n=(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)\}$ 沿范数有界，即 $\|x^n\|<c$，以及为有限维的。下证完全有界性

设 $y^1,\ldots,y^m$ 为对应的 ε 网

$$(\forall x^n)(\exists y^j):\sum_{k=1}^{n}\left|x_k^n-y_k^j\right|^p<\varepsilon^p$$

则向量 $y^1,\ldots,y^m$ 构成了 ε 网

$$(\forall x\in E):\left\|x-y^j\right\|_{l_p}\leqslant\|x-x^n\|_{l_p}+\left\|x^n-y^j\right\|_{l_p}<2\varepsilon$$

则由完全有界性与 Hausdorff 定理 4.14 有 E 为准紧距离空间

4.3 一致空间

4.3.1 一致连续

4.4 赋范空间

4.4.1 基本概念

4.4.1.1 半范数与范数

定义 4.42 (半范数与范数)

设 E 为数域 $\mathbb{K}$ 上向量空间，称从 E 到 $\mathbb{R}$ 所有满足下列条件的映射 p 为半范数 **(seminorm)**

$S_1 : (\forall x \in E) : p(x) \geqslant 0$

$S_2 : (\forall x \in E)(\forall \lambda \in \mathbb{K}) : p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ （齐次化条件/условие однородности нормы）

$S_3 : (\forall x, y \in E) : p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ （三角不等式/неравенство треугольника）

此外，若 $(\forall x) : [x \neq \mathrm{O} \Rightarrow p(x) \neq 0]$，则称 p 为范数 (norm/норма)

称赋以了一个范数的任一向量空间 E 为赋范空间 **(normed linear space/нормированное пространство)**（或称 (E,p) 为赋范空间）。类似地，称赋以了一个半范数的任一向量空间 E 为赋半范空间（或称 (E,p) 为赋半范空间）

赋范空间 E 上的与一个范数 p 关联的距离由下式定义:

$$d(x,y) = p(x-y)$$

称与该距离关联的拓扑为赋范空间 E 的拓扑 ♣

定义 4.43 (p 范数)

设 $V = \mathbb{C}^n$ 或 $V = \mathbb{R}^n$，且 $p \geqslant 1 (p \in \mathbb{R})$。对于向量 $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in V$，称

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

为向量 x 的 p 范数

若 $p = 1$，即称范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

由 **Manhattan**[a]距离 **(Manhattan distance)** 定义

若在无穷情况，则称范数

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$$

由 **Chebyshev**[b]距离 **(Chebyshv distance/расстояние Чебышёва)** 定义

[a] Manhattan 距离名字由从规划为方型建筑区块的城市（如美国 Manhattan）间最短的行车路径而来，为 Minkowski 所创

[b] 帕夫努季·利沃维奇·切比雪夫 (Пафну́тий Льво́вич Чебышёв,1821.5.26-1894.12.8) 俄罗斯数学家，力学家，证明了素数分布定理，大数定律一般公式及中心极限定理。本硕毕业于莫斯科大学，博士毕业于圣彼得堡大学，为彼得堡数学学派的奠基人与领袖 ♣

4.4.1.2 Hölder 不等式及其推论

性质 （p 范数性质）

函数 $f(p)=\|x\|_p$ 满足下面的性质

$$\forall x\in V,p_1,p_2>0:\|x\|_{p_1}=1\Rightarrow\begin{cases}\|x\|_{p_2}\leqslant 1,p_2>p_1\\ \|x\|_{p_2}\geqslant 1,p_2<p_1\end{cases}$$

定理 4.20 (Hölder 不等式/Hölder inequality)

(**Hölder**[a]不等式/**Hölder inequality**) 设 $p,q>1:\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则对于任意 $a,b\geqslant 0$ 有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

[a]奥图 · 赫尔德 (Ludwig Otto Hölder,1859.12.22-1937.8.29) 德国数学家，Otto Hölder 致力于 Fourier 级数的收敛，并于 1884 年发现了以他的名字命名的不等式。在 Kronecker 和 Klein 的影响下对群论产生了兴趣，并在一个组合序列中证明了因子群的唯一性

♡

证明 当 $a=0$ 或 $b=0$ 时不等式显然。设 $a,b>0$，$\lambda=\dfrac{1}{p},1-\lambda=\dfrac{1}{q},x=a^p,y=b^q$，则有函数 $f(x)=\ln(x)$，由 $f''(x)<0$ 得

$$(\forall\lambda\in[0;1]):\lambda\ln(x)+(1-\lambda)\ln(y)\leqslant\ln(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

即函数在 $x>0$ 上凸，即有

$$\lambda\ln(x)+(1-\lambda)\ln(y)=\ln(ab)\leqslant\ln(\lambda x+(1-\lambda)y)=\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)$$

不等式即证

注 称满足条件的 p,q 为**共轭指数**

定理 4.21 (Hilbert 不等式/Hilbert inequality/неравенство Гёльдера)

对于任意 $p,q>1:\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，任意 $x,y\in V=\mathbb{C}^n\,(\mathbb{R}^n)$，则有 Hilbert 不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leqslant\|x\|_p\cdot\|y\|_q$$

♡

证明 当 $x=0$ 或 $y=0$ 时不等式显然。下设 $x,y\neq 0$，$\tilde{x}=\dfrac{x}{\|x\|_p},\tilde{y}=\dfrac{y}{\|y\|_q}$，则 $\|\tilde{x}\|_p=\|\tilde{y}\|_q=1$。利用 Holder 不等式 (4.20) 在 $a=\tilde{x}_i$, $b=\tilde{y}_i,i=1,\dots,n$ 时：

$$|\tilde{x}_i|\cdot|\tilde{y}_i|\leqslant\frac{|\tilde{x}_i|^p}{p}+\frac{|\tilde{y}_i|^q}{q}$$

对 $i=1,\dots,n$ 累加则得

$$\frac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^n|\tilde{x}_i|\cdot|\tilde{y}_i|\leqslant\sum_{i=1}^n\left(\frac{|\tilde{x}_i|^p}{p}+\frac{|\tilde{y}_i|^q}{q}\right)=\frac{\|\tilde{x}_i\|_p^p}{p}+\frac{\|\tilde{y}_i\|_q^q}{q}=1$$

不等式即证

注 在 $\mathbb{R}^n$ 上 Hilbert 不等式退化为等式，即若 $\exists\alpha>0$ 有

$$|x_i|^p=\alpha\,|y_i|^q\,,x_iy_i\geqslant 0,\forall i=1,\dots,n$$

定理 4.22 (Minkowski 不等式/Minkowski inequality/неравенство Минковского)

(**Minkowski**[a]不等式/**Minkowski inequality/неравенство Минковского**) 对于任意 $p>1$，任意 $x,y\in V=\mathbb{C}^n\,(\mathbb{R}^n)$，有不等式

$$\|x+y\|_p\leqslant\|x\|_p+\|y\|_p$$

[a]赫尔曼 · 闵可夫斯基 (德语：Hermann Minkowski,1864.6.22-1909.1.12) 俄裔德国犹太数学家，于 1905 年建立了被称为 “Minkowski 约化理论” 的实系数正定二次型的约化理论。1907 年，Minkowski 认识到可以用非欧空间来描述 Lorentz 和 Einstein 的工作，建立了 Minkowski 时空，为广义相对论的建立提供了框架。另外，Minkowski 是 Einstein 的导师

♡

证明 使用两次 Hilbert 不等式 (4.21)，其中令 $(p-1)q=p$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}\leqslant||x||_p\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=||x||_p\cdot(|x+y|_p)^{\frac{p}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}\leqslant||y||_p\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}=||y||_p\cdot(|x+y|_p)^{\frac{p}{q}}$$

则有

$$\|x+y\|_p^p=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\leqslant\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)\,|x_i+y_i|^{p-1}\leqslant(\|x+y\|_p)^{\frac{p}{q}}\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)$$

将不等式除以 $(\|x+y\|_p)^{\frac{p}{q}}$ 即得

注 其中令 $p=2$ 即为著名的 Cauchy-Schwarz 不等式，俄罗斯一般称之为 неравенство Коши-Буняковского

4.4.1.3 子空间与严格赋范空间

定义 4.44 (赋范空间线性流形)

设赋范空间 E，若 $L\subset E$ 满足

$$(\forall\lambda_1,\lambda_2\in L)(\forall x,y\in L):\lambda_1x+\lambda_2y\in L$$

则称 L 为赋范空间 E 上线性流形 (**linear manifold/линейное многообразие**)。若赋范空间 E 上线性流形包含其所有极限点，则称该线性流形为赋范空间 E 上闭线性流形 (**closed linear manifold/замкнутое линейное многообразие**) ♣

定义 4.45 (赋范空间闭线性流形/赋范空间子空间)

称赋范空间 E 上闭线性流形为 E 的子空间 (**subspace/подпространство**) ♣

定理 4.23 (有限维赋范空间线性流形闭性)

有限维赋范空间上任意线性流形均为闭线性流形 ♡

注 设 E 为赋范空间，约定点 x 与线性流形 L 的距离为 $d(x,L)=\inf\limits_{u\in L}\|x-u\|$

引理 4.2 (闭集点到集合距离)

设 E 为赋范空间，$L\subset E$，则下列命题成立：

1) 若 $x\in L$，则有 $d(x,L)=0$

2) 若 $x\notin L$，且 L 为闭集，则有 $d(x,L)>0$ ♡

证明 1) 设 $x\in L$，则当 $u=x$ 时有 $\|x-u\|=0$，则 $d(x,L)=0$

2) 设 $x\notin L$。反证：假设 $d(x,L)=0$，则

$$(\forall n\in N)(\exists u_n\in L):\|u_n-x\|<\frac{1}{n}$$

因此，当 $n\to\infty$ 时有 $u_n\to x$，因为 L 为闭集，则 $x\in L$，导出矛盾，则 $d(x,L)>0$

定理 4.24 (赋范空间元素有限维子空间上最佳逼近存在性)

设 L 赋范空间 E 的有限维子空间，则对于任意 $x\in E$ 都存在 x 的最佳逼近 (best approximation/наилучиее приблиэсение)$u^*\in L$ 满足 $d(x,L)=\|x-u^*\|$，形式化即

$$(\forall x\in E)(\exists u^*\in L):d(x,L)=\|x-u^*\|$$ ♡

证明 若 $x \in L$，则显然存在 $u^* = x$。若 $x \notin L$，则由闭集点到集合距离引理 (4.2) 有 $d(x, L) = d > 0$。设 $e_1, \ldots, e_m$ 为闭线性流形 L 的基，且 $u = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k$。在 L 上引入第二个范数

$$\|x\|_c = \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则由 L 为有限维，则两个范数等价，即有

$$(\exists \alpha, \beta > 0) : \alpha\|u\|_c \leqslant \|u\| \leqslant \beta\|u\|_c$$

观察函数 $f(u) = \|x - u\|$，由

$$|\|x - u'\| - \|x - u''\|| \leqslant \|u' - u''\| \leqslant \beta \|u' - u''\|_c$$

则有该函数相对于范数 $\|\cdot\|_c$ 连续

下证 $\inf\limits_{u \in L} \|x - u\| = d$ 仅能在球内到达。注意到 $\|u\|_c \leqslant r, r = \alpha^{-1}(d + 1 + \|x\|)$ ，则若 $\|u\|_c > r$，则

$$\|x - u\| \geqslant \|u\| - \|x\| \geqslant \alpha\|u\|_c - \|x\| > \alpha r - \|x\| = d + 1$$

表明球外 $\|u\|_c \leqslant r$ 不能达到函数 $\|x - u\|$ 的下确界

由球 $\|u\|_c \leqslant r$ 为有限维空间中的闭有界集，因此该集为紧集，则函数 $\|x - u\|$ 在紧集上连续，这意味着它在某个点 $u^* \in L$ 上达到其最小值

定义 4.46 (严格赋范空间)

设 $(E, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，若 $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ 当且仅当 $y = \lambda x$，其中 $\lambda > 0$，则称 $(E, \|\cdot\|)$ 为严格赋范空间 **(строгое нормированное пространство)** ♣

定理 4.25 (严格赋范空间元素有限维子空间上最佳逼近唯一性)

设 E 为严格赋范空间，则对于任意 $x \in E$ 与任意子空间 L，至多存在一个 L 中的 x 的最佳逼近 ♡

证明 设 $x \in E$，L 为 E 的线性子空间，并设元素 $u_1^*, u_2^* \in L$ 满足

$$\|x - u_1^*\| = \|x - u_2^*\| = d = \inf_{u \in L} \|x - u\|$$

若 $d = 0$，则显然 $u_1^* = u_2^* = x$。进一步假设 $d > 0$，则有

$$d \leqslant \left\|x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2}\right\| = \left\|\frac{x - u_1^*}{2} + \frac{x - u_2^*}{2}\right\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - u_1^*\| + \frac{1}{2}\|x - u_2^*\| = d$$

$$\Rightarrow \|(x - u_1^*) + (x - u_2^*)\| = \|x - u_1^*\| + \|x - u_2^*\| > 0$$

由 E 为严格赋范空间，则有 $(\exists \lambda > 0) : x - u_2^* = \lambda(x - u_1^*)$。若 $\lambda \neq 1$，则 $x = (1 - \lambda)^{-1}(u_2^* - \lambda u_1^*) \in L$，与 $d > 0$ 矛盾。因此 $\lambda = 1$ 且 $u_1^* = u_2^*$

引理 4.3 (Riesz 几乎垂直引理/лемма Рисса о почти перпендикуляре)

设 X 为赋范空间，若 M 为 X 的子空间且 $M \neq X$，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in X)(x_\varepsilon \notin M) : (\|x_\varepsilon\| = 1) \wedge \left(\inf_{y \in M} \|x_\varepsilon - y\| \geqslant 1 - \varepsilon\right)$$

♡

证明 考虑任意向量 $x \notin M$，下证 $\inf\limits_{y \in M} \|x - y\| = d > 0$。反证：假设 $\inf\limits_{y \in M} \|x - y\| = 0$，则存在向量序列 $\{y_n\} : y_n \in M, y_n \to x$，但有 M 的封闭性有 $x \in M$，矛盾

$$(\exists y_\varepsilon \in M) : d \leqslant \|x - y_\varepsilon\| \leqslant \frac{d}{1 - \varepsilon}, x_\varepsilon = \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|}, \|x_\varepsilon\| = 1, x_\varepsilon \notin M$$

$$(\forall y \in M) : \|x_\varepsilon - y\| = \left\|\frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|} - y\right\| = \frac{\|x - (y_\varepsilon + y\|x - y_\varepsilon\|)\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \geqslant \frac{d}{\frac{d}{1 - \varepsilon}} = 1 - \varepsilon$$

因此 $\inf\limits_{y \in M} \|x_\varepsilon - y\| \geqslant 1 - \varepsilon$ ，引理得证

4.4.1.4 Banach 空间

定义 4.47 (Banach 空间)

若一个赋范空间对于与其范数关联的距离是完备的，则称该赋范空间为 **Banach**[a]空间 (**Banach space/Банаховое порстранство**)

[a]巴拿赫 (Stefan Banach,1892.3.30⊠1945.8.31) 波兰数学家，与波兰数学家 Steinhaus 同为波兰利沃夫大学派的开创人，他引进了线性赋范空间的概念，建立了其上的线性算子理论，对泛函分析的发展做出了突出贡献并证明了作为泛函分析基础的三个定理：Hahn-Banach 延拓定理、Banach-Steinhaus 定理及闭图像定理

定理 4.26 (赋范空间 Cauchy 收敛准则)

设 X 为赋范空间，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛必要条件为

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}) : \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon$$

注 若 X 为 Banach 空间，则定理逆命题成立（即条件充分性也成立）

定理 4.27 (赋范空间完备性充要条件)

设 X 为一个赋范空间，则以下命题等价：
1) X 为完备空间，亦即 X 为 Banach 空间
2) 在 X 上绝对收敛的级数在 X 上收敛
3) 设 $0 < k < 1$，则在 X 上满足 $\|a_n\| \leqslant k^n$ 的序列 (a_n) 的级数收敛

证明 1) ⇒ 2)：由估计

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$$

与赋范空间 Cauchy 收敛准则 (4.26) 即证

2) ⇒ 1)：设 $\{x_n\}$ 为 X 上基本序列，下证它收敛到某个 $x \in X$。由基本性条件，可从 $\{x_n\}$ 中选择一个子序列满足

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \frac{1}{2^k}$$

构造级数

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \ldots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \ldots$$

则由估计

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

有构造的的级数绝对收敛，则有级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ 收敛。但这时存在一个部分和序列 $\{s_{n_k}\}$ 收敛到 $x \in X$，由 $s_{n_k} = x_{n_k}$ 则有 $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$，则基本子序列收敛到 x，则序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x

2) ⇒ 3)：注意到 3) 为 2) 的特殊情形

3) ⇒ 1)：设 $\{x_n\}$ 为 X 上基本序列，下用数学归纳法找到序列 (x_n) 的子序列 (x_{i_n})，满足 $(\forall p \geqslant i_n) : \|x_p - x_{i_n}\| \leqslant k^n$。令 $a_0 = a_{i_0}$，而对于所有 $n > 0, a_n = (x_{i_{n+1}} - x_{i_n})$。由该定义显然有 $\|a_n\| \leqslant k^n$，故部分和序列 $s_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1})$ 收敛，而 s_n 即为 x_{i_n}，故 (x_n) 的子序列 (x_{i_n}) 收敛。由 (x_n) 为 Cauchy 序列，则它收敛到同一个极限，则 X 为完备空间

4.4.1.5 线性赋范空间

定理 4.28 (有限维线性赋范空间等价性)

任意有限维线性赋范空间 E 的范数等价，且对于任意范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 存在 $C_1, C_2 > 0$，满足

$$(\forall x \in E) : C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$$

定理 4.29 (完备线性赋范空间维数有限充要条件)

设完备线性赋范空间 X，则下列命题等价：

1)X 为有限维空间

2)X 中任意有界集 M 为准紧距离空间

证明 1) 若 X 为有限维空间，则由 Bolazano-Weierstrass 定理有任意有界集 M 为准紧距离空间

2) 设任意有界集 M 为准紧距离空间。考虑任意向量 $y_1 \in X, \|y_1\| = 1$，则设 $L_1 = \{\alpha y_1 | \alpha \in \mathbb{R}\}$。若 $L_1 = X$，则 X 为一维空间，定理得证

下设 $L_1 \neq X$。L_1 为 X 的子空间。由 Riesz 几乎垂直引理 (4.3)，

$$(\exists y_2 \notin L_1)(\forall y \in L_1) : (\|y_2\| = 1) \wedge \left(\|y_2 - y\| \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

设 $L_2 = \{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$。若 $L_2 = X$，则 X 为二维空间，定理得证

若 $L_2 \neq X$，则由 Riesz 几乎垂直引理 (4.3) 并找到向量

$$(\exists y_3 \notin L_2)(\forall y \in L_1) : (\|y_3\| = 1) \wedge \left(\|y_3 - y\| \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

以此类推。若该过程在某个步骤终止，则证明该断言。否则，则得序列 $y_1, y_2, y_3, \ldots$，其中 $\|y_n\| = 1, (\forall n, k) : \|y_n - y_k\| \geqslant \frac{1}{2}$。该序列有界，但不可能选出一个基本子序列，矛盾

4.4.2 线性算子

4.4.2.1 线性算子有界性与连续性

定理 4.30 (线性算子线性性)

设 $\mathcal{A}$ 为线性算子，$R(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的值域，则有

$$(\forall y_1, y_2 \in R(\mathcal{A}))(\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}) : \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in R(\mathcal{A})$$

证明 设 $\mathcal{A}$ 为线性算子，$R(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的值域，$D(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的定义域，则有

$$(\forall y_1, y_2 \in R(\mathcal{A}))(\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})(\exists x_1, x_2 \in D(\mathcal{A})) : (y_1 = \mathcal{A}(x_1)) \wedge (y_2 = \mathcal{A}(x_2))$$

这时有

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 \mathcal{A}(x_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(x_2) = \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in D(\mathcal{A}) \Rightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in R(\mathcal{A})$$

定理得证

定理 4.31 (线性算子连续充要条件)

设线性算子 $\mathcal{A} : X \to Y$，则下列命题等价：

1)$\mathcal{A}$ 在 X 上连续

2)$\mathcal{A}$ 在某一点 $x_0 \in X$ 处连续

3)X 中存在零的邻域 W 且满足 $\mathcal{A}(W)$ 有界

证明 1)⇒2) 显然

2)⇒1) 设 $y \in X$，$\varepsilon > 0$，则由条件可选择点 x_0 的邻域 $V \in \mathcal{V}(x_0)$ 满足

$$(\forall x \in V) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

则 $U = V + (y - x_0)$ 为点 y 的邻域，因此若 $z \in U$，则 $z + x_0 - y \in V$，则有

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y + x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

即在点 y 处连续，由 y 任意性即得线性算子在 X 上连续

1)⇒3) 由 1)⇒2) 有线性算子 $\mathcal{A} : X \to Y$ 在 X 上连续时有线性算子 $\mathcal{A}$ 在点 0 处连续，则对任意 $\varepsilon > 0$ 存在零的邻域 W，在该邻域上 $|f(x)| < \varepsilon$ ，即 $\mathcal{A}(W)$ 有界

3)⇒1) 设 W 为零的邻域且有

$$(\exists C > 0)(\forall x \in W) : |f(x)| < C$$

这时设 $\varepsilon > 0$，则 $\dfrac{\varepsilon}{C}W$ 也为零的邻域且其上 $|f(x)| < \varepsilon$，则线性算子 $\mathcal{A}$ 在点 0 处连续，则由 2)⇒1) 有线性算子 $\mathcal{A} : X \to Y$ 在 X 上连续

注 设所考虑的空间 X 为赋范空间，该定理表明，任意线性连续算子 $\mathcal{A}$ 在某一个零邻域中的值域有界。注意到，在赋范空间中任意零邻域都含有一个球，这意味着 $\mathcal{A}$ 在某一个球上有界。又由线性算子值域线性性，这等价于它在任意一个球上的有界性。特别地，等价于在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 上的有界性。由此在赋范空间中线性算子连续当且仅当其在单位球的值域有界，由此导出下面的定义

定理 4.32 (线性算子有界充要条件)

设线性算子 $\mathcal{A} : X \to Y$，则 $\mathcal{A}$ 有界的充要条件为

$$(\exists c > 0)(\forall x \in X) : \|\mathcal{A}(x)\| \leqslant c \cdot \|x\|$$

♡

证明

必要性：当 $x = 0$ 时不等式显然。当 $x \neq 0$ 时，设 $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$，$\|x'\| = 1$，则有

$$\|\mathcal{A}(x')\| \leqslant c \Rightarrow \left\|\mathcal{A}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant c$$

又由线性算子线性性 (4.30) 有

$$\mathcal{A}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}\mathcal{A}(x)$$

则有

$$\left\|\frac{1}{\|x\|}\mathcal{A}(x)\right\| = \frac{\|\mathcal{A}(x)\|}{\|x\|} \leqslant c$$

充分性：取 $x : \|x\| \leqslant 1$ 即得 $\|\mathcal{A}(x)\| \leqslant c\|x\| \leqslant c$

定理 4.33 (线性算子局部有界充要条件)

设线性算子 $\mathcal{A} : X \to Y$，$M \subset X$，若 M 为有界集，则 $\{\|\mathcal{A}(x)\| : x \in M\}$ 有界

♡

证明 若 M 有界，则 $(\exists R > 0) : M \subset B_R^c(0)$，则

$$(\forall x \in B_R^c(0)) : \|\mathcal{A}(x)\| \leqslant c\|x\| \leqslant cR$$

则线性算子 $\mathcal{A}$ 在 $B_R^c(0)$ 上有界，进而在 M 上有界

推论 4.7

若 $\mathcal{A}$ 为有界线性算子，则其在任意球 $B_R(x_0), x_0 \in X, R > 0$ 上有界

♡

定理 4.34 (Banach 空间上线性算子连续性与有界性等价性)

设 $\mathcal{A}: X \to Y$ 为线性算子，X, Y 为 Banach 空间，则 $\mathcal{A}$ 在 X 上连续的充要条件为 $\mathcal{A}$ 在 X 上有界 ♡

证明 必要性：设 $\mathcal{A}$ 在 X 上连续。反证：假设 $\mathcal{A}$ 在 X 上无界，则 $\mathcal{A}(B_1^c(0))$ 无界，则

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in X): (\|x_n\| \leqslant 1) \wedge (\|\mathcal{A}(x_n)\| \geqslant n)$$

设 $x_n' = \dfrac{x_n}{n}$，则有

$$\|x_n'\| = \frac{\|x_n\|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

则由线性算子在 X 上连续得 $\mathcal{A}(x_n') \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$。但另一方面有

$$\|\mathcal{A}(x_n')\| = \frac{1}{n}\|\mathcal{A}(x_n)\| \geqslant 1$$

导出矛盾，则 $\mathcal{A}$ 在 X 上有界

充分性：设 $\mathcal{A}$ 在 X 上有界，则由线性算子有界充要条件 (4.32) 有 $(\forall x \in X): \|\mathcal{A}(x)\| \leqslant c\|x\|$。则若 $x \to 0$，就有 $\mathcal{A}(x) \to 0$，则 $\mathcal{A}$ 在 0 处连续，则由线性算子连续充要条件 (4.31) 有 $\mathcal{A}$ 在 X 上连续

例题 4.4 (线性有界算子)

观察函数空间上某一积分算子 $\mathcal{K}, v = \mathcal{K}u$：

$$v(x) = \int_a^b K(x,s)u(s)ds$$

其中 $K(x,s)$ 在 $[a;b] \times [a;b]$ 上连续，则下列命题成立

1) 若 $\mathcal{K}: \mathcal{C}[a;b] \to \mathcal{C}[a;b]$，则若 $K(x,s) \in \mathcal{C}([a;b] \times [a;b])$，算子 $\mathcal{K}$ 为线性有界算子

2) 若 $\mathcal{K}: L_p[a;b] \to L_p[a;b]$，则若 $K(x,s) \in L_p([a;b] \times [a;b])$，算子 $\mathcal{K}$ 为线性有界算子

证明 1) 考虑算子 $\mathcal{K}: \mathcal{C}[a;b] \to \mathcal{C}[a;b]$，则有估计

$$\|v\|_{\mathcal{C}[a;b]} \leqslant \max_{x\in[a;b]} \int_a^b |K(x,s)|ds \cdot \|u\|_{\mathcal{C}[a;b]}$$

则若 $K(x,s) \in \mathcal{C}([a;b] \times [a;b])$，算子 $\mathcal{K}$ 有界

2) 考虑算子 $\mathcal{K}: L_p[a;b] \to L_p[a;b]$，其中 $p, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则由 L_p 空间上 Hilbert 不等式 (4.21) 有

$$|v(x)| \leqslant \left|\int_a^b K(x,s)u(s)ds\right| \leqslant \left(\int_a^b |K(x,s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|u\|_{L_p[a;b]}$$

由此则有

$$|v(x)|^q \leqslant \int_a^b |K(x,s)|^q ds \cdot \|u\|_{L_p[a;b]}^q$$

$$\|v\|_{L_q[a;b]} \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^q dsdx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|u\|_{L_p[a;b]}.$$

则若 $K(x,s) \in L_q([a;b] \times [a;b])$，算子 $\mathcal{K}$ 有界

例题 4.5 (线性有界算子)

设线性算子 $\mathcal{A}: C^l(\bar{G}) \to C(\bar{G})$：

$$\mathcal{A}(u) = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} f_\alpha(x) D^\alpha u, u = u(x)$$

其中函数 $f_\alpha(x)$ 在有界闭区域 $\bar{G} \subset \mathbb{R}^n$ 上连续，$D^\alpha u$ 为微分算子：

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u(x), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

在 $C^l(\bar{G})$ 空间上定义范数

$$\|u\|_{C^l(\bar{G})} = \sum_{|\alpha|\leqslant l} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{G})} = \sum_{|\alpha|\leqslant l} \max_{x\in\bar{G}} |D^\alpha u(x)|$$

则有估计

$$\|\mathcal{A}(u)\|_{C(\bar{G})} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant l} \max_{x\in\bar{G}} |f_\alpha(x)| \cdot |D^\alpha u| \leqslant \max_{|\alpha|\leqslant l} \|f_\alpha(x)\|_{C(\bar{G})} \cdot \sum_{|\alpha|\leqslant l} \max_{x\in\bar{G}} |D^\alpha u| \leqslant k \cdot \|u\|_{C^l(\bar{G})}$$

则若 $k = \max\limits_{|\alpha|\leqslant l} \|f_\alpha(x)\|_{C(\bar{G})} < \infty$ ，有算子 $\mathcal{A}: C^l(\bar{G}) \to C(\bar{G})$ 有界

4.4.2.2 线性连续算子范数

定义 4.48 (线性连续算子空间)

记全体线性连续算子 $\mathcal{A}: X \to Y$ 为 $\mathcal{L}(X,Y)$，其中 X, Y 为赋范空间，显然 $\mathcal{L}(X,Y)$ 为线性空间，则称 $\mathcal{L}(X,Y)$ 为线性连续算子空间

♣

定义 4.49 (线性连续算子空间算子范数)

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，称数

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\mathcal{A}(x)\|_Y$$

为线性算子 $\mathcal{A}$ 的范数，不引起歧义时称算子范数 (**норма оператора**)

♣

性质 （线性连续算子空间算子范数等价定义）

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，则有

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\mathcal{A}(x)\|_Y}{\|x\|}$$

证明 对任意 $x \neq 0$ 显然有

$$\frac{\|\mathcal{A}(x)\|_Y}{\|x\|} = \left\| \mathcal{A}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_Y$$

性质即证

性质 （线性连续算子空间算子范数基本不等式）

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，则有

$$(\forall x \in X): \|\mathcal{A}(x)\|_Y \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|_X$$

证明 若 $x \neq 0$，则元素 $\dfrac{x}{\|x\|_X}$ 属于单位球，则由线性算子范数的定义有

$$\left\| \mathcal{A}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_Y = \frac{\|\mathcal{A}(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \|\mathcal{A}\|$$

则推出所需不等式

若 $x = 0$，则在所需不等式中左边与右边均为零，所需不等式得证

定理 4.35 (线性连续算子范数定义正确性)

线性连续算子空间 $\mathcal{L}(X,Y)$ 为赋范空间

♡

证明

正定性：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，则由 $(\forall x \in X): \|\mathcal{A}(x)\|_Y \geqslant 0$ 有 $\|\mathcal{A}\| \geqslant 0$。若 $\|\mathcal{A}\| = 0$，则 $(\forall x \in X): \|\mathcal{A}(x)\|_Y = 0$，则有 $\mathcal{A}(x) \equiv 0$, $\mathcal{A} = \mathcal{O}$

齐次性条件：$\|\lambda\mathcal{A}\| = \sup \|\lambda\mathcal{A}(x)\|_Y = |\lambda| \cdot \sup \|\mathcal{A}(x)\|_Y = |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}\|$

三角不等式：设 $\|x\|_X \leqslant 1$，则有

$$\|\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)\|_Y \leqslant \|\mathcal{A}(x)\|_Y + \|\mathcal{B}(x)\|_Y \leqslant \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|$$

则有

$$(\forall x \in B_1^c(0)) : \|(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x)\|_Y \leqslant \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|$$

则由 $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x)\|_Y$，则有三角不等式 $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| \leqslant \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|$

例题 4.6 （线性连续算子范数）

设 $y_0(t) \in \mathcal{C}[a;b]$，对任意函数 $x(t) \in \mathcal{C}[a;b]$，令

$$F(x) = \int_a^b x(t) y_0(t) \mathrm{d}t$$

该函数显然为线性算子，而由

$$|F(x)| = \left| \int_a^b x(t) y_0(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \|x\| \int_a^b |y_0(t)| \, \mathrm{d}t$$

则由 Banach 空间上线性算子连续性与有界性等价性 (4.34) 有该函数在 $\mathcal{C}[a;b]$ 上连续，且推出其范数的估计：

$$\|F\| \leqslant \int_a^b |y_0(t)| \, \mathrm{d}t$$

例题 4.7 （线性连续算子范数）

考虑算子 $\mathcal{A} : \mathcal{C}^1[0;1] \to \mathcal{C}[0;1], (\mathcal{A}(x))(t) = x'(t)$，对于 $x \in \mathcal{C}^1[0;1]$ 定义

$$\|\mathcal{A}(x)\|_{\mathcal{C}[0;1]} = \max_{t \in [0;1]} |x'(t)| \leqslant \max_{t \in [0;1]} |x(t)| + \max_{t \in [0;1]} |x'(t)| = \|x\|_{\mathcal{C}^1[0;1]}$$

则算子 $\|\mathcal{A}\| \leqslant 1$。构造序列 $x_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{1+n}, n \geqslant 2$，则

$$\|x_n\|_{\mathcal{C}^1[0;1]} = \frac{1}{1+n} \left(\max_{t \in [0;1]} |\sin(nt)| + \max_{t \in [0;1]} |n \cos(nt)| \right) = 1$$

$$\|\mathcal{A}(x_n)\|_{\mathcal{C}[0;1]} = \frac{1}{1+n} \max_{t \in [0;1]} |n \cos(nt)| = \frac{n}{1+n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

这时 $\|\mathcal{A}\| = 1$

定理 4.36 (线性连续算子收敛充要条件)

设 $\mathcal{A}_n, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，则 $\mathcal{A}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{A}$ 的充要条件为 $\mathcal{A}_n(x)$ 在 $\{x : \|x\|_X \leqslant 1\}$ 上一致收敛到 $\mathcal{A}(x)$

♡

证明 必要性：对 $\forall x : \|x\|_X \leqslant 1$ 有

$$\|\mathcal{A}_n(x) - \mathcal{A}(x)\|_Y = \|(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})(x)\|_Y \leqslant \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \cdot \|x\|_X \leqslant \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|$$

则若 $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$，就有 $\|\mathcal{A}_n(x) - \mathcal{A}(x)\|_Y \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$，则 $\mathcal{A}_n(x)$ 在 $\{x : \|x\|_X \leqslant 1\}$ 上一致收敛到 $\mathcal{A}(x)$

充分性：由一致收敛性可设

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall x \in B_1^c(0)) : \|\mathcal{A}_n(x) - \mathcal{A}(x)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$$

则有

$$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})(x)\|_Y \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

则有 $\mathcal{A}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{A}$

推论 4.8 (线性连续算子收敛必要条件)

设 $\mathcal{A}_n, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，$\mathcal{A}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{A}$，若 $M \subset X$ 为有界集，则 $\mathcal{A}_n(x)$ 在 M 上一致收敛到 $\mathcal{A}(x)$

♡

证明 由 $M \subset X$ 为有界集，则 $(\exists R > 0) : M \subset B_R(0)$，则对于 $\forall x \in M$ 有

$$\|\mathcal{A}_n(x) - \mathcal{A}(x)\|_Y \leqslant \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \cdot \|x\|_X \leqslant R \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

推论即证

定理 4.37 (线性连续算子空间为 Banach 空间充分条件)

设线性连续算子空间 $\mathcal{L}(X,Y)$ ，若 Y 为 Banach 空间，则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 为 Banach 空间

证明 设 $\mathcal{A}_n$ 为 $\mathcal{L}(X,Y)$ 上基本序列，则

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(\forall p\in\mathbb{N}):\|\mathcal{A}_{n+p}-\mathcal{A}_n\|<\varepsilon$$

设 $x\in X$，观察向量序列 $\mathcal{A}_n(x)$，由

$$\|\mathcal{A}_{n+p}(x)-\mathcal{A}_n(x)\|_Y=\|(\mathcal{A}_{n+p}-\mathcal{A}_n)(x)\|\leqslant\|\mathcal{A}_{n+p}-\mathcal{A}_n\|\cdot\|x\|_X$$

即有 $\mathcal{A}_n(x)$ 也为基本序列

由 Y 为 Banach 空间，则序列 $\mathcal{A}_n(x)$ 收敛，即 $(\exists y\in\mathbb{R}):y=\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{A}_n(x)$。则由极限过程，每个 $x\in X$ 都与唯一的一个 $y\in Y$ 相关联。记生成的映射为 $\mathcal{A}:y=\mathcal{A}(x)$

由算子 $\mathcal{A}_n$ 线性性与极限性质有 $\mathcal{A}$ 为线性算子。下证 $\mathcal{A}$ 有界。由

$$|\|\mathcal{A}_{n+p}\|-\|\mathcal{A}_n\||\leqslant\|\mathcal{A}_{n+p}-\mathcal{A}_n\|$$

则有序列 $\{\|\mathcal{A}_n\|\}$ 为基本序列，则有界，即有 $(\exists C>0)(\forall n\in\mathbb{N}):\|\mathcal{A}_n\|\leqslant Cz$，因此 $\|\mathcal{A}_n(x)\|_Y\leqslant C\|x\|_X$。对不等式取极限即得 $\|\mathcal{A}(x)\|_Y\leqslant C\|x\|_X$，则由线性算子有界充要条件 (4.32) 有 $\mathcal{A}$ 有界，且 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(X,Y)$

定理 4.38 (线性连续算子序列到 Banach 空间上级数一致收敛充分条件)

设线性连续算子空间 $\mathcal{L}(X,Y)$，$\mathcal{A}_k\in\mathcal{L}(X,Y)$，$Y$ 为 Banach 空间，若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathcal{A}_k$ 绝对收敛，则该级数一致收敛

证明 由赋范空间完备性充要条件 (4.27) 与线性连续算子空间为 Banach 空间充分条件 (4.37) 即证

注 ($\mathcal{L}(X)$ 空间)

记线性连续算子空间 $\mathcal{L}(X,X)$ 为 $\mathcal{L}(X)$，在其上定义

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(x)=\mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$$

并约定 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}\mathcal{A},\mathcal{A}^3=\mathcal{A}^2\mathcal{A}$ 等等。显然 $\mathcal{L}(X)$ 中线性算子满足

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}=\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}),\quad(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C}=\mathcal{A}\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{C},\quad\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\mathcal{C}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{B},\quad\mathcal{I}\mathcal{A}=\mathcal{A}\mathcal{I}=\mathcal{A},$$

其中 $\mathcal{I}$ 为恒等算子 (тождественный оператор)，即 $(\forall x\in X):\mathcal{I}(x)=x$

实际上 $\mathcal{L}(X)$ 为非交换含幺环 (некоммутативное кольцо с единицей)

引理 4.4 ($\mathcal{L}(X)$ 空间算子范数基本不等式)

设线性连续算子空间 $\mathcal{L}(X)$，则有

$$(\forall\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(X)):\|\mathcal{A}\mathcal{B}\|\leqslant\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\|$$

证明 由线性连续算子空间算子范数基本不等式 (4.4.2.2) 有

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}(x)\|=\|\mathcal{A}(\mathcal{B}(x))\|\leqslant\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}(x)\|\leqslant\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\|\cdot\|x\|$$

则由算子范数定义即有 $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\|\leqslant\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\|$

引理 4.5

设 $\mathcal{A}_n,\mathcal{B}_n,\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(X)$，若 $\mathcal{A}_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathcal{A},\mathcal{B}_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathcal{B}$，则有 $\mathcal{A}_n\mathcal{B}_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathcal{A}\mathcal{B}$

证明 则 $\mathcal{L}(X)$ 空间算子范数基本不等式 (4.4) 有

$$\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}_n-\mathcal{A}\mathcal{B}\|=\|(\mathcal{A}_n-\mathcal{A})\,\mathcal{B}_n+\mathcal{A}\,(\mathcal{B}_n-\mathcal{B})\|\leqslant\|\mathcal{A}_n-\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}_n\|+\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}_n-\mathcal{B}\|$$

又由 $\|\mathcal{B}_n\|$ 有界性与条件即得 $\mathcal{A}_n\mathcal{B}_n-\mathcal{A}\mathcal{B}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

4.4.2.3 强收敛与 Banach-Steinhaus 共鸣定理

定义 4.50 (线性连续算子空间强收敛)

设 $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(X,Y)$，若

$$(\forall x \in X) : \|\mathcal{A}_n(x) - \mathcal{A}(x)\|_Y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

则称该线性连续算子序列强收敛 (**сильно сходится**)（或逐点收敛 (**сходится поточечно**)）向算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$

♣

命题 4.7 (线性连续算子序列强收敛充分条件)

设 $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(X,Y)$，若 $\mathcal{A}_n$ 沿范数一致收敛到 $\mathcal{A}$，则强收敛到 $\mathcal{A}$

♠

证明 由线性算子定义与线性连续算子空间算子范数基本不等式 (4.4.2.2) 有

$$\|\mathcal{A}_n(x) - \mathcal{A}(x)\| \leqslant \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \cdot \|x\|$$

命题即证

例题 4.8 （强收敛非一致收敛）

考虑 l_2 空间上算子 $\mathcal{A}_n$：

$$y = \mathcal{A}_n(x), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots), y = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

则

$$\|\mathcal{A}_n(x) - x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{+\infty} |x_i|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

则 $\mathcal{A}_n$ 强收敛到 $\mathcal{I}$

另一方面，对于任意 n 存在向量 $x \in l_2 : \|x\| = 1, \mathcal{A}_n(x) = 0$，则 $\|(\mathcal{A}_n - \mathcal{I})(x)\| = 1$，则

$$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{I}\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(\mathcal{A}_n - \mathcal{I})(x)\| \geqslant 1,$$

即得 $\mathcal{A}_n$ 非一致收敛到 $\mathcal{I}$

引理 4.6

设 $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(X,Y)$，若存在 $c > 0$ 与闭球 $B_r^c(x_0)$ 满足

$$(\forall x \in B_r^c(x_0)) : \|\mathcal{A}_n(x)\| \leqslant c$$

则序列 $\{\|\mathcal{A}_n\|\}$ 有界

♡

证明 由 $(\forall x \in X)(x \neq 0) : x_0 + \frac{x}{\|x\|} r \in B_r^c(x_0)$，则有

$$c \geqslant \left\|\mathcal{A}_n\left(\frac{xr}{\|x\|} + x_0\right)\right\| = \left\|\frac{r}{\|x\|}\mathcal{A}_n(x) + \mathcal{A}_n(x_0)\right\| \geqslant \frac{r}{\|x\|}\|\mathcal{A}_n(x)\| - c$$

由此即得 $\|\mathcal{A}_n(x)\| \leqslant \frac{2c}{r}\|x\|$，而 $\|\mathcal{A}_n\| \leqslant \frac{2c}{r}$

定理 4.39 (一致有界性原理/принцип равномерной ограниченности)

设 $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(X,Y)$，$X$ 为 Banach 空间，若序列 $\{\mathcal{A}_n(x)\}$ 在任意 $x \in X$ 上有界，则序列 $\{\|\mathcal{A}_n\|\}$ 有界

♡

证明 反证：设 $\{\|\mathcal{A}_n\|\}$ 无界，则由引理 (4.6) 有序列 $\{\|\mathcal{A}_n(x)\|\}$ 在闭球上无界

固定闭球 $\bar{B}_0$，则序列 $\{\|\mathcal{A}_n(x)\|\}$ 在其中不为一致有界的，则存在点 $x_1 \in B_0$ 与序号 n_1 满足 $\|\mathcal{A}_{n_1}(x_1)\|_{\bar{B}} > 1$。由 $\mathcal{A}_{n_1}$ 的连续性有存在球 $B_1 = B_{r_1}(x_1)$ 满足 $(\forall x \in \bar{B}_1) : \|\mathcal{A}_{n_1}(x)\| > 1$。在 B_1 中，序列 $\{\|\mathcal{A}_n(x)\|\}$ 也为

非一致有界的，因此能找到 $x_2\in B_1$ 与 $n_2>n_1$ 满足 $\|\mathcal{A}_{n_2}(x_2)\|>2$。以此类推，得点列 $\{x_k\}$ 和球 $\{B_k\}$，且有

$$x_k\in B_k,\quad \bar{B}_0\supset\bar{B}_1\supset\ldots\supset\bar{B}_n\supset\ldots,\quad (\forall x\in\bar{B}_k):\|\mathcal{A}_{n_k}(x)\|\geqslant k$$

由嵌套球定理 (4.7)，有一个公共点 $x^*\in\bar{B}_k$，则 $\|\mathcal{A}_{n_k}(x^*)\|\geqslant k$，则有向量序列 $\{\mathcal{A}_n(x^*)\}$ 无界，与条件矛盾

定理 4.40 (Banach-Steinhaus 共鸣定理/теорема Банаха-Штейнгауза)

设 X 为 Banach 空间，$\mathcal{A}_n\in\mathcal{L}(X,Y)$ ，则线性连续算子族 $\mathcal{A}_n$ 强收敛到 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(X,Y)$ 的充要条件为满足下列条件：

1) 序列 $\{\|\mathcal{A}_n\|\}$ 有界

2) $\mathcal{A}_n$ 在某个在 X 上稠密的线性流形 X' 上强收敛到 $\mathcal{A}$

♡

证明

必要性：由强收敛性有 $(\forall x\in X):\mathcal{A}_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathcal{A}(x)$，则 $\|\mathcal{A}_n(x)\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\|\mathcal{A}(x)\|$，则序列 $\{\|\mathcal{A}_n(x)\|\}$ 有界。由一致有界性原理 (4.39) 有序列 $\{\|\mathcal{A}_n\|\}$ 有界。取 X 为 X' 即可

充分性：设 $x\in X$，但 $x\notin X'$，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists x'\in X'):\|x-x'\|<\varepsilon$$

设 $c=\max\{\|\mathcal{A}\|,\sup_n\|\mathcal{A}_n\|\}$ 下证线性连续算子族 $\mathcal{A}_n$ 强收敛到 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(X,Y)$。显然

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_n(x)-\mathcal{A}(x)\|&=\|\mathcal{A}_n(x-x')+(\mathcal{A}_n(x')-\mathcal{A}(x'))+\mathcal{A}(x'-x)\|\\&\leqslant\|\mathcal{A}_n\|\cdot\|x-x'\|+\|\mathcal{A}_n(x')-\mathcal{A}(x')\|+\|\mathcal{A}\|\cdot\|x'-x\|\\&\leqslant 2c\varepsilon+\|\mathcal{A}_n(x')-\mathcal{A}(x')\|\end{aligned}$$

则由 $\mathcal{A}_n(x')$ 收敛到 $\mathcal{A}(x')$ 有

$$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N):\|\mathcal{A}_n(x')-\mathcal{A}(x')\|<\varepsilon$$

则有 $(\forall n\geqslant N):\|\mathcal{A}_n(x)-\mathcal{A}(x)\|<(2c+1)\varepsilon$

4.4.2.4 逆算子与连续可逆

定理 4.41 (线性算子双射性充要条件)

设线性算子 $\mathcal{A}$ 将 $D(\mathcal{A})$ 映到 $R(\mathcal{A})$，则线性算子 $\mathcal{A}$ 为双射的充要条件为 $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})=\{0\}$

♡

证明

充分性：设 $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})=\{0\}$。假设

$$(\exists y\in R(\mathcal{A}))(\exists x_1,x_2\in D(\mathcal{A}))(x_1\neq x_2):\mathcal{A}(x_1)=\mathcal{A}(x_2)=y$$

则 $\mathcal{A}(x_1-x_2)=0$，则 $x_1-x_2\in\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$，则 $x_1=x_2$，导出矛盾

必要性：设 $\mathcal{A}$ 为双射，假设 $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})\neq\{0\}$，则存在 $(\exists z\in\operatorname{Ker}(\mathcal{A}))(z\neq 0)$。设 $y\in R(\mathcal{A})$，则方程 $\mathcal{A}(x)=y$ 有一个解 x^*，但这时 $\mathcal{A}(x^*+z)=y$ 且 $x^*+z\neq x^*$，则任意 $y\in R(\mathcal{A})$ 至少有两个不同原像 x^* 与 x^*+z，导出矛盾

命题 4.8 (线性算子逆算子存在充分条件)

设线性算子 $\mathcal{A}$ 将 $D(\mathcal{A})$ 映到 $R(\mathcal{A})$，若线性算子 $\mathcal{A}$ 为双射，则存在逆算子 $\mathcal{A}^{-1}$ 将 $R(\mathcal{A})$ 一一映到 $D(\mathcal{A})$

♠

命题 4.9 (线性算子逆算子线性性)

设线性算子 $\mathcal{A}$ 将 $D(\mathcal{A})$ 映到 $R(\mathcal{A})$，若其存在逆算子 $\mathcal{A}^{-1}$，则 $\mathcal{A}^{-1}$ 为线性算子

♠

证明 设 $y_1, y_2 \in R(\mathcal{A}), x_1 = \mathcal{A}^{-1}(y_1), x_2 = \mathcal{A}^{-1}(y_2)$，则

$$(\forall \lambda_1, \lambda_2) : \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

这时

$$\lambda_1 \mathcal{A}^{-1}(y_1) + \lambda_2 \mathcal{A}^{-1}(y_2) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2 = \mathcal{A}^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$

则 $\mathcal{A}^{-1}$ 为线性算子

定理 4.42 (线性算子有界逆算子存在充要条件)

设线性算子 $\mathcal{A}$ 将 $D(\mathcal{A})$ 映到 $R(\mathcal{A})$，则逆算子 $\mathcal{A}^{-1}$ 存在且同时在 $R(\mathcal{A})$ 上有界的充要条件为

$$(\exists m > 0)(\forall x \in D(\mathcal{A})) : \|\mathcal{A}(x)\| \geqslant m\|x\|$$

♡

证明

必要性：设逆算子 $\mathcal{A}^{-1}$ 存在且在 $D(\mathcal{A}^{-1}) = R(\mathcal{A})$ 上有界，则

$$(\exists c > 0)(\forall y \in R(\mathcal{A})) : \left\|\mathcal{A}^{-1}(y)\right\| \leqslant c\|y\|$$

再假设 $y = \mathcal{A}(x)$，则 $\|\mathcal{A}(x)\| \geqslant c^{-1}\|x\|$，令 $m = c^{-1}$ 即证

充分性：设满足不等式 $\|\mathcal{A}(x)\| \geqslant m\|x\|$，则若 $\mathcal{A}(x) = 0$，即有 $\|x\| = 0$ 且 $x = 0$。因此 $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0$，则由线性算子双射性充要条件 (4.41)，存在 $\mathcal{A}^{-1}$ 将 $R(\mathcal{A})$ 一一映到 $D(\mathcal{A})$。若取 $x = \mathcal{A}^{-1}(y)$，则有 $(\forall y \in R) : (\mathcal{A})\left\|\mathcal{A}^{-1}(y)\right\| \leqslant m^{-1}\|y\|$，则 $\mathcal{A}^{-1}$ 在 $R(\mathcal{A})$ 上有界

定理 4.43 (Banach 开映射定理/теорема Банаха об обратном операторе)

设 $\mathcal{A}$ 为有界线性算子，将 Banach 空间 X 一一映到 Banach 空间 Y 上，则其逆算子 $\mathcal{A}^{-1}$ 有界

♡

定义 4.51 (连续可逆线性算子)

设连续可逆线性算子 $\mathcal{A} : X \to Y$，若 $R(\mathcal{A}) = Y$，$\mathcal{A}$ 可逆且 $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$，则称该线性算子连续可逆 **(непрерывно обратим)**

♣

注 (连续可逆线性算子)

连续可逆线性算子的概念与 $\mathcal{A}(x) = y$ 形式的线性方程组的解的性质有关。若 $\mathcal{A}$ 为连续可逆算子，则该方程对于任意 y 都有一个唯一解 $x = \mathcal{A}^{-1}(y)$。此外，若 $\tilde{x} = \mathcal{A}^{-1}(\tilde{y})$ 为同一方程的另一个解，，则有 $\|x - \tilde{x}\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \cdot \|y - \tilde{y}\|$。亦即右端 y 的微小变化会导致解的微小变化。这时称问题可解 (задача корректно разрешима)

例题 4.9 (连续可逆线性算子)

考虑 $C[0;1]$ 上积分方程

$$(\mathcal{A}(x))(t) = x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds = y(t), \quad y(t) \in C[0;1]$$

注意到 $x(t) = y(t) + ct$，其中 $c = \int_0^1 sx(s)ds$。在 $[0;1]$ 上积分等式 $tx(t) = ty(t) + ct^2$ 即得

$$c = \int_0^1 tx(t)dt = \int_0^1 ty(t)dt + c\int_0^1 t^2 dt \Rightarrow c = \frac{3}{2}\int_0^1 sy(s)ds$$

则对于任意 $y(t) \in C[0;1]$ 都存在解

$$x(t) = y(t) + \frac{3}{2}\int_0^1 sty(s)ds = \left(\mathcal{A}^{-1}(y)\right)(t)$$

则显然 $\mathcal{A}^{-1}$ 有界，因此则有 $\mathcal{A}$ 连续可逆性

定义 4.52 (左逆和右逆)

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y), \mathcal{U} \in \mathcal{L}(Y, X)$，若 $\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{I}_Y$，，其中 $\mathcal{I}_Y$ 为 Y 上恒等算子则称算子 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{A}$ 的右逆 **(правый обратный)**，记 $\mathcal{U} = \mathcal{A}_r^{-1}$，

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y), \mathcal{V} \in \mathcal{L}(Y,X)$，若 $\mathcal{V}\mathcal{A} = \mathcal{I}_X$，其中 $\mathcal{I}_X$ 为 X 上恒等算子，则称算子 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{A}$ 的左逆 (**левый обратный**)，记 $\mathcal{V} = \mathcal{A}_l^{-1}$

定理 4.44 (一阶线性方程解结构)

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，方程 $\mathcal{A}(x) = y, x \in X, y \in Y$，则下列命题成立：

1) (解唯一性充分条件) 若存在左逆 $\mathcal{A}_l^{-1}$，则方程有至多一个解 $x = \mathcal{A}_l^{-1}(y)$
2) (解存在性充分条件) 若存在右逆 $\mathcal{A}_r^{-1}$，则方程有至少一个解 $x = \mathcal{A}_r^{-1}(y)$

证明 1) 设存在 $\mathcal{A}_l^{-1}$。另设 $x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$，则 $\mathcal{A}(x) = 0$。由左逆定义即得 $\left(\mathcal{A}_l^{-1}\mathcal{A}\right)(x) = x$，亦即 $\mathcal{A}_l^{-1}(\mathcal{A}(x)) = x$，得 $x = 0$，则 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{0\}$，则由线性算子双射性充要条件 (4.41) 有算子 $\mathcal{A}$ 为双射，则若方程解存在，其为唯一的

2) 若存在 $\mathcal{A}_r^{-1}$，则有

$$\mathcal{A}\left(\mathcal{A}_r^{-1}(y)\right) = \left(\mathcal{A}\mathcal{A}_r^{-1}\right)(y) = y$$

则 $x = \mathcal{A}_r^{-1}(y)$ 即为方程解

推论 4.9 (线性算子结构)

设算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，则下列命题成立：

1) (单射性充分条件) 若存在左逆 $\mathcal{A}_l^{-1}$，则算子为单射
2) (满射性充分条件) 若存在右逆 $\mathcal{A}_r^{-1}$，则算子为满射

定理 4.45 (线性算子左逆和右逆结构)

设算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$，若线性算子 $\mathcal{A}$ 同时存在左逆 $\mathcal{A}_l^{-1}$ 和右逆 $\mathcal{A}_r^{-1}$，则下列命题成立：

1) (逆算子结构) $D\left(\mathcal{A}^{-1}\right) = Y, R\left(\mathcal{A}^{-1}\right) = X$
2) (左逆和右逆等价性) $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_r^{-1} = \mathcal{A}_l^{-1}$
3) (左逆和右逆唯一性) 左逆 $\mathcal{A}_l^{-1}$ 和右逆 $\mathcal{A}_r^{-1}$ 唯一

证明 1) 由 $\mathcal{A}_l^{-1}$ 和 $\mathcal{A}_r^{-1}$ 存在性有 $\mathcal{A}$ 为双射，则 $\mathcal{A}$ 可逆，则可设 $\mathcal{A}^{-1}$ 为 $\mathcal{A}$ 逆算子，则显然有 $D\left(\mathcal{A}^{-1}\right) = Y, R\left(\mathcal{A}^{-1}\right) = X$

2) 由定义即有

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}_l^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}_X \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_l^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}_X\mathcal{A}^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}_X\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_l^{-1}\mathcal{I}_Y \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{I}_Y^{-1} = \mathcal{I}_X\mathcal{A}_l^{-1} \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{I}_Y = \mathcal{I}_X^{-1}\mathcal{A}_l^{-1} \Rightarrow \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_l^{-1}$$

同理有 $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_r^{-1}$

3) 设 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{A}$ 另一个左逆，而 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{A}$ 另一个右逆，则有

$$\mathcal{V}\mathcal{A} = \mathcal{I}_X, \mathcal{A}_l^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}_X \Rightarrow \left(\mathcal{V} - \mathcal{A}_l^{-1}\right)\mathcal{A} = 0$$

则有 $\mathcal{V} = \mathcal{A}_l^{-1}$，同理 $\mathcal{U} = \mathcal{A}_r^{-1}$

推论 4.10 (线性算子逆算子唯一性)

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且存在 $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(Y,X)$ 满足

$$\mathcal{U}\mathcal{A} = \mathcal{I}_x, \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{I}_Y$$

则 $\mathcal{A}$ 可逆且 $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{U}$

4.4.2.5 闭算子

定义 4.53 (闭算子)

设线性算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$，若算子的图在 $X \times Y$ 上为闭集，则称线性算子 $\mathcal{A}$ 为闭算子 (**замкнуный оператор**) ♣

定理 4.46 (线性连续算子闭性充分条件)

设线性算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$，若 $D(\mathcal{A}) = X$ 且线性算子 $\mathcal{A}$ 有界，则 $\mathcal{A}$ 为闭算子 ♡

证明 设 $x_n \to x$ 且 $\mathcal{A}(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$，则由算子 $\mathcal{A}$ 连续性有 $\mathcal{A}(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{A}(x)$，由序列极限的唯一性，则 $y = \mathcal{A}(x)$

定理 4.47 (逆算子闭性充分条件)

若算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ 为闭算子且存在逆算子 $\mathcal{A}^{-1}$，则 $\mathcal{A}^{-1}$ 也闭算子 ♡

证明 由 $\mathcal{A}$ 定义有 $(\forall x \in D(\mathcal{A})) : (x, \mathcal{A}(x))$，由 $\mathcal{A}^{-1}$ 定义有 $(\forall y \in R(\mathcal{A})) : (y, \mathcal{A}^{-1}(y))$，由算子 $\mathcal{A}^{-1}$ 的图能记为 $(\mathcal{A}(x), x), x \in D(\mathcal{A})$，则由 $\mathcal{A}$ 的图通过交换 x 与 $\mathcal{A}(x)$，而也为 $Y \times X$ 的闭集，由此即得 $\mathcal{A}^{-1}$ 的闭性

引理 4.7 (Banach 空间上闭算子有界充分条件)

设 $\mathcal{A}$ 为闭算子，在 Banach 空间 X 上处处定义，且值处处在 Banach 空间上 Y 上，若存在在 X 完备的集 M 且满足

$$(\exists c > 0)(\forall x \in M) : \|\mathcal{A}(x)\| \leqslant c\|x\|$$

则算子 $\mathcal{A}$ 有界 ♡

证明 设 $x_0 \in X$ 为任意向量，由完备性 M 在 X 推出 $(\forall \varepsilon \in (0;1))(\exists x_\varepsilon) : x_\varepsilon = (1-\varepsilon)x_0$，则存在 $x_1 \in M$ 满足 $\|x_\varepsilon - x_1\| \leqslant \varepsilon \|x_0\|$

$$\|x_1\| \leqslant \|x_1 - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon \|x_0\| + (1-\varepsilon)\|x_0\| = \|x_0\|$$

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \|x_1 - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x_0\| \leqslant \varepsilon \|x_0\| + \varepsilon \|x_0\| = 2\varepsilon \|x_0\|$$

因此若取 $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$，则 $x_1 \in M$ 满足 $\|x_1\| \leqslant \|x_0\|, \|x_1 - x_0\| \leqslant \dfrac{1}{2}\|x_0\|$，同样对于向量 $x_0 - x_1$ 存在 $x_2 \in M$ 满足

$$\|x_0 - x_1 - x_2\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_0 - x_1\| \leqslant \frac{1}{2^2}\|x_0\|, \quad \|x_2\| \leqslant \|x_0 - x_1\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_0\|$$

以此类推，可得对于任意自然数 n 有 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$

$$\|x_0 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\| \leqslant \frac{1}{2^n}\|x_0\|, \quad \|x_n\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\|x_0\|$$

由此则有 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} s_n, s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

由 $\|\mathcal{A}(x_k)\| \leqslant c\|x_k\| \leqslant \dfrac{c}{2^{k-1}}\|x_0\|$，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}(x_k)$ 绝对收敛。设 y 为级数和，由于 $\mathcal{A}(s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y, s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$，则由算子 $\mathcal{A}$ 的闭性有 $\mathcal{A}(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}(x_k)$，因此

$$\|\mathcal{A}(x_0)\| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \|\mathcal{A}(x_k)\| \leqslant c \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| \leqslant 2c\|x_0\|$$

则算子 $\mathcal{A}$ 有界

定理 4.48 (Banach 闭算子定理/теорема Банаха о замкнутом операторе)

设 $\mathcal{A}$ 为闭算子，在 Banach 空间 X 上处处定义，且值处处在 Banach 空间上 Y 上，则算子 $\mathcal{A}$ 有界 ♡

证明 对于任意 n 考虑集 $X_n=\{x\in X:\|\mathcal{A}(x)\|\leqslant n\|x\|\}$，则由 Baire[1]-Hausdorff 空间分类定理 (теорема Бэра-Хаусдорфа о категориях пространство)，$X=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}X_n$，由 X 为 II 类，则存在在某个球 $S\subset X$ 中稠密的 X_{n_0} 中。因此 $\overline{S\cap X_{n_0}}=\bar{S}$

设 $x_0\in S\cap X_{n_0}$，而 S_0 为以 x_0 为中心，半径为 r_0 的球，小到 $S_0\subset S$，则 $\overline{S_0\cap X_{n_0}}=\bar{S}_0$。下选择元素 $u_0\in X,\|u_0\|=r_0$，并注意到 $y_0=x_0+u_0$。由 $\|y_0-x_0\|=\|u_0\|=r_0$，则 $y_0\in\bar{S}_0$。则存在序列 $\{y_n\}\subset S_0\cap X_{n_0}$ 满足 $y_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}y_0=x_0+u_0$

现考虑序列 $\{u_n=y_n-x_0\}$，对于某个 $\|u_n\|=\|y_n-x_0\|\leqslant r_0$，利用定义 X_n 且利用 $y_n\in X_{n_0},x_0\in X_{n_0}$，则有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(u_n)\|&=\|\mathcal{A}(y_n-x_0)\|\leqslant\|\mathcal{A}(y_n)\|+\|\mathcal{A}(x_0)\|\leqslant n_0(\|y_n\|+\|x_0\|)\\&=n_0(\|u_n+x_0\|+\|x_0\|)\leqslant n_0(\|u_n\|+2\|x_0\|)\leqslant n_0(r_0+2\|x_0\|)\end{aligned}$$

当 $\|u_n\|=\|y_n-x_0\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}r_0$，则有

$$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N):\|u_n\|>\frac{1}{2}r_0$$

进而有

$$1<\frac{2}{r_0}\|u_n\|\Rightarrow\|\mathcal{A}(u_n)\|\leqslant\frac{2n_0}{r_0}\|u_n\|(r_0+2\|x_0\|)$$

则 $(\forall n>N):u_n\in X_{n_1}$，其中 $n_1=2n_0+\dfrac{4n_0\|x_0\|}{r_0}$。结果表明，对于任意满足 $\|u_0\|=r_0$ 的 u_0，存在序列 $u_n\in X_{n_1}$ 满足 $u_n\to u_0$。除此以外，若 $z\in X_{n_1}$，则 $(\forall\lambda):\lambda z\in X_{n_1}$。因此 X_{n_1} 在 X 中稠密，则 X_{n_1} 上满足

$$\|\mathcal{A}(x)\|\leqslant n_1\|x\|$$

因此算子 $\mathcal{A}$ 在 X_{n_1} 上稠密，应用 Banach 空间上闭算子有界充分条件引理 (4.7) 即得算子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{X}$ 上有界

定理 4.49 (Banach 空间上双闭算子有界性)

若闭算子 $\mathcal{A}$ 定义在 Banach 空间 X 上且一一映到整个 Banach 空间 Y 上，则逆算子 $\mathcal{A}^{-1}$ 有界

证明 由条件 $D(\mathcal{A})=X$ 且 $\mathcal{A}$ 为闭算子。则由闭图像定理有 $\mathcal{A}$ 有界。因此 Banach 开映射定理 (4.43) 有 $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$

定理 4.50 (等价范数定理/теорема об эквивалентных нормах)

设在 Banach 空间 E 上给定两个范数 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$，若一个范数属于另一个范数，则这些范数等价

证明 设 X_1 在 E 上有范数 $\|x\|_1$，而 X_2 在 E 上有范数 $\|x\|_2$，设范数 $\|\cdot\|_1$ 属于范数 $\|\cdot\|_2$，则有

$$(\exists c>0)(\forall x\in E):\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2$$

定义算子 $\mathcal{A}$，将 X_2 映上 X_1，即 $\mathcal{A}(x)=x,D(\mathcal{A})=X_2,\mathcal{A}$ 为线性的，并将 X_2 映到 $R(\mathcal{A})=X_1$。由范数属于条件，$\|\mathcal{A}\|\leqslant c$，算子 $\mathcal{A}$ 有界且为闭算子。则由 Banach 空间上双闭算子有界性 (4.49) 有 $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(X_1,X_2)$，则

$$\|x\|_2\leqslant\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\cdot\|x\|_1\Rightarrow c_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2$$

其中 $c_1=\left(\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\right)^{-1}$，定理即证

[1]贝尔 (Baire,René-Louis,1874-1932) 法国数学家。他的关于无理数的研究成果以及将连续的概念区分为上半连续性和下半连续性对法国数学学派有很大影响。1895 年毕业于巴黎高等师范学校，其关于实变函数论的博士论文解决了有界连续函数的特征性质问题，有助于实变函数论的建立

4.4.2.6 连续性延拓与 Hahn-Banach 延拓定理

定理 4.51 (线性算子连续性延拓定理/теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности)

设 X 为赋范空间, Y 为 Banach 空间, 设线性算子 $\mathcal{A}$ 定义域 $D(\mathcal{A}) \subset X$, 值域 $R(\mathcal{A}) \subset Y$, 且 $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ 并在 $D(\mathcal{A})$ 上线性算子 $\mathcal{A}$ 有界, 则存在线性有界算子 $\mathcal{B}$ 满足

1) $(\forall x \in D(\mathcal{A})) : \mathcal{B}(x) = \mathcal{A}(x)$

2) $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\|$

证明 若 $x \in D(\mathcal{A})$, 则令 $\mathcal{B}(x) = \mathcal{A}(x)$。设 $x \in X, x \notin D(\mathcal{A})$。由 $D(\mathcal{A})$ 在 X 中稠密性存在一个序列 $\{x_n \in D(\mathcal{A})\}, x_n \to x$。则定义

$$\mathcal{B}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}(x_n)$$

下证该定义正确, 即该极限存在并且不依赖于序列 $\{x_n\}$ 的选择

由 $\|\mathcal{A}(x_n) - \mathcal{A}(x_m)\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|x_n - x_m\|$, 则序列 $\{\mathcal{A}(x_n)\}$ 为基本序列, 且由 Y 空间完备性该基本序列收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}(x_n)$ 存在

设 $x'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, x'_n \in D(\mathcal{A})$, 令 $a = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}(x_n), b = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}(x'_n)$, 则有

$$\|a - b\| \leqslant \|a - \mathcal{A}(x_n)\| + \|\mathcal{A}(x_n) - \mathcal{A}(x'_n)\| + \|\mathcal{A}(x'_n) - b\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

又由 $\|\mathcal{A}(x_n) - \mathcal{A}(x'_n)\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|x_n - x'_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, 因此 $a = b$

在不等式中令 $n \to \infty$, 则有 $\|\mathcal{A}(x_n)\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|x_n\|$ 且有 $\|\mathcal{B}(x)\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|$。则 $\|\mathcal{B}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|$, 设

$$\|\mathcal{B}\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\mathcal{B}(x)\| \geqslant \sup_{x\in D(\mathcal{A}), \|x\|\leqslant 1} \|\mathcal{B}(x)\| = \|\mathcal{A}\|$$

因此 $\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{B}\|$, 算子 $\mathcal{B}$ 的线性性推出 $\mathcal{A}$ 的线性性, 则由极限过程算子的线性性

引理 4.8 (基本延拓引理/лемма об элементарном продолжении)

设 X 为实赋范空间, L 为 X 上线性流形, 在 L 上给定线性有界算子 f, $x_0 \notin L$, 而 L_1 为所有可能的线性流形, 其元素形如 $y + tx_0$, 其中 $y \in L$, $t \in \mathbb{R}$, 则存在 L_1 上线性有界算子 f_1 满足 $\|f_1\| = \|f\|$

证明 注意到, 任意 $x \in L_1$ 可被唯一地表示为形式 $x = y + tx_0, y \in L, t \in \mathbb{R}$ 。(若 $y + tx_0 = y' + t'x_0$, 则 $y - y' = (t' - t)x_0$; 若 $t = t'$, 则 $y = y'$ 且 x 的表示唯一, 若 $t \neq t'$, 则 $x_0 \in L$ 导出矛盾)

考虑 $y_1, y_2 \in L$, 由 f 在 L 上有界有

$$f(y_1) - f(y_2) = f(y_1 - y_2) \leqslant \|f\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leqslant \|f\| \cdot \|y_1 + x_0\| + \|f\| \cdot \|y_2 + x_0\|$$

该不等式可改为形式 $f(y_1) - \|f\| \cdot \|y_1 + x_0\| \leqslant f(y_2) + \|f\| \cdot \|y_2 + x_0\|$

若固定 y_2 并改变 y_1, 则不等式左部上有界。若固定 y_1 并改变 y_2, 则不等式右部上有界, 令

$$\alpha = \sup_{y_1\in L} \{f(y_1) - \|f\| \cdot \|y_1 + x_0\|\}, \quad \beta = \inf_{y_2\in L} \{f(y_2) + \|f\| \cdot \|y_2 + x_0\|\}$$

由此即得不等式估计

$$(\forall y_1, y_2 \in L) : f(y_1) - \|f\| \cdot \|y_1 + x_0\| \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant f(y_2) + \|f\| \cdot \|y_2 + x_0\|$$

下设 $\gamma \in [\alpha; \beta]$, 则有

$$(y_1, y_2 \in L) : f(y_1) - \|f\| \cdot \|y_1 + x_0\| \leqslant \gamma \leqslant f(y_2) + \|f\| \cdot \|y_2 + x_0\|$$

再定义在 L_1 上的线性泛函 f_1 满足 $f_1(x) = f_1(y + tx_0) = f(y) - \gamma t$ 。若 $x \in L$, 则 $t = 0$ 且 $f_1(x) = f(x)$, 则在 L 上 $f_1 = f$。下证 $\|f_1\| = \|f\|$

注意到

$$\|f_1\| = \sup_{x\in L_1, \|x\|\leqslant 1} |f_1(x)| \geqslant \sup_{x\in L, \|x\|\leqslant 1} |f_1(x)| = \sup_{x\in L, \|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\|$$

下证不等式

$$|f_1(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|, x = y + tx_0, y \in L, t \in \mathbb{R}$$

当 $t = 0$ 时，该不等式显然成立。此外，任意 $y_1 \in L$ 满足 $f(y_1) - \gamma \leqslant \|f\| \cdot \|y_1 + x_0\|$ 。若记 $y_1 = \frac{y}{t}$，则有

$$f\left(\frac{y}{t}\right) - \gamma \leqslant \|f\| \cdot \left\|\frac{y}{t} + x_0\right\|$$

$$\Rightarrow |f_1(x)| = |f(y) - \gamma t| = |t| \cdot |f\left(\frac{y}{t}\right) - \gamma| \leqslant |t| \cdot \|f\| \cdot \left\|\frac{y}{t} + x_0\right\|$$

若 $t > 0$，则 $|t| = t$ 且

$$|f_1(x)| \leqslant t\|f\| \cdot \left\|\frac{y}{t} + x_0\right\| = \|f\| \cdot \|y + tx_0\| = \|f\| \cdot \|x\|$$

若 $t < 0$，则 $|t| = -t$ 且

$$|f_1(x)| \leqslant \|f\| \cdot \left\|y\frac{|t|}{t} + |t|x_0\right\| = \|f\| \cdot \|-y - tx_0\| = \|f\| \cdot \|x\|$$

因此 $\|f_1\| \leqslant \|f\|$，则有 $\|f_1\| = \|f\|$

定理 4.52 (Hahn-Banach 延拓定理/теорема Хана-Банаха)

设实赋范空间 X 上定义了线性有界算子 f，则存在 X 上线性有界算子 $\tilde{f}$，满足

1)$(\forall x \in D(f)) : \tilde{f}(x) = f(x)$

2)$\|\tilde{f}\| = \|f\|$

♡

证明 （仅在可分空间下证明）设 X' 为在 X 稠密的可数集，给其元素编号不在 $D(f)$，$x_0, x_1, x_2, \ldots$，则使用基本延拓引理 (4.8)，依次将 f 延拓到 $X_1 = D(f) + \mathcal{L}(x_0)$，接着 $X_2 = X_1 + \mathcal{L}(x_1)$ 等等。则得到了在 X 中完备的线性流形 $\tilde{X} = \cup X_k$ 上的线性有界泛函 $\tilde{f}$，再由线性算子连续性延拓定理 (4.51) 即证

定理 4.53 (Hahn-Banach 延拓定理—般形式/общая формулировка теоремы Хана-Банаха)

设 X 为实线性空间，$Y \subset X$，Y 为 X 线性子空间，在 X 上给定凸正齐次泛函 (x)，而在 Y 上给定实线性泛函 $f(x)$ 满足 $(\forall x \in Y) : f(x) \leqslant p(x)$，则在整个 X 上存在一个实线性泛函 $\tilde{f}(x)$ 满足 $(\forall x \in Y) : \tilde{f}(x) = f(x)$ 且 $(\forall x \in X) : \tilde{f}(x) \leqslant p(x)$

♡

推论 4.11

设 X 为赋范空间，固定向量 $x \in X, x \neq 0$，则存在在整个 X 上给定的线性有界算子 f 满足 $\|f\| = 1, f(x) = \|x\|$

♡

证明 考虑线性流形 $L = \{tx : t \in \mathbb{R}\}$。在 L 给定泛函 f 满足 $f(tx) = t\|x\|$ ，则 $f(x) = \|x\|$ 对于 $y = tx$

$$|f(y)| = |t| \cdot \|x\| = \|tx\| = \|y\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

则由 Hahn-Banach 延拓定理 (4.52) 将函数 f 延拓到整个空间 X，同时保范

推论 4.12

设在赋范空间 X 上给定线性流形 L 和与 L 距离 $d > 0$ 的元素 $x_0 \notin L$。则存在在整个 X 上定义的线性泛函 f 满足

1)$(\forall x \in L) : f(x) = 0$

2)$f(x_0) = 1$

3)$\|f\| = \frac{1}{d}$

♡

证明 设 $L_1 = L + \mathcal{L}(x_0)$，任意元素 $y \in L_1$ 可以唯一表示为 $y = x + tx_0$，其中 $x \in L, t \in \mathbb{R}$。在 L_1 上定义 f 满足 $f(y) = t$，若 $y \in L$，则 $t = 0, f(y) = 0$，则满足条件 1)；若 $y = x_0$，则 $t = 1$，这意味着 $f(x_0) = 1$，则满足条件 2)

又由

$$\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\|=\left\|x_0-\left(-\frac{x}{t}\right)\right\|\geqslant d$$

有

$$|f(y)|=|t|=\frac{|t|\cdot\|y\|}{\|y\|}=\frac{\|y\|}{\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\|}\leqslant\frac{\|y\|}{d}$$

则有 $\|f\|\leqslant\frac{1}{d}$，下证不等式 $\|f\|\geqslant\frac{1}{d}$

由下确界定义存在序列 $x_n\in L$ 满足 $d=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_0-x_n\|$

$$1=f\left(x_0-x_n\right)\leqslant\|x_0-x_n\|\cdot\|f\|$$

令 $n\to\infty$ 即得 $1\leqslant d\|f\|$，因此 $\|f\|=\frac{1}{d}$，由 Hahn-Banach 延拓定理 (4.52) 将泛函 f 从 L_1 延拓到 X，同时保范，推论即证

推论 4.13

线性流形 L 在 Banach 空间 X 上不完备的充要条件为存在非零线性泛函 f 满足 $(\forall x\in L): f(x)=0$

证明

必要性：设 $\bar{L}\neq X$，则存在 $x_0\in X$ 满足 $\rho(x_0,L)=d>0$。则由推论 (4.12) 存在一个线性泛函 f，满足 $f\left(x_0\right)=1$，即泛函非零且 $(\forall x\in L): f(x)=0$

充分性：设 $\bar{L}=X$，则对于任意 $x\in X$ 存在序列 $\{x_n\in L\}$，$x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$，则由条件存在线性泛函 $f\neq 0$，满足 $(\forall x\in L): f(x)=0$,。但这时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=0$，由 x 的任意性即得 $f\equiv 0$，因此 $\bar{L}\neq X$，导出矛盾

推论 4.14

设 $x_1,\ldots,x_n$ 为赋范空间 X 一个线性无关组，则存在一个线性组，在 X 上处处定义有界泛函 $f_1,\ldots,f_n$ 满足 $(\forall i,k=1,\ldots,n): f_i\left(x_k\right)=\delta_{ki}$

证明 取点 x_1 并用 L_1 表示向量 $x_2,\ldots,x_n$ 的线性包 (линейная оболочка)。由向量组 $x_1,\ldots,x_n$ 的线性无关性有 $\rho\left(x_1,L_1\right)>0$。由推论 (4.12) 可得存在线性有界泛函 f_1 满足 $(\forall x\in L_1): f_1\left(x_1\right)=1, f_1(x)=0$。特别地，$(\forall k=2,\ldots,n): f_1\left(x_k\right)=0$，同理取 x_2，且泛函 f_2 满足：$f_2\left(x_2\right)=1$，$(\forall k\neq 2): f_2\left(x_k\right)=0$，以此类推

定义 4.54 (双正交)

元素组 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 与泛函系 $\{f_i\}_{i=1}^n$，若

$$(\forall k,i=\overline{1;n}): f_i\left(x_k\right)=\delta_{ki},$$

为双正交的 (биортогональные)

定理 4.54 (双正交充分条件)

给定一个线性无关组，在赋范空间 X 上处处定义且有有界泛函 $\{f_i\}_{i=1}^n$。则在 X 上存在元素组 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 与组 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 双正交

证明 归纳：当 $n=1$ 时，定理显然。若 $f_1\neq 0$，则存在 $y_1\in X$ 满足 $f_1\left(y_1\right)\neq 0$。则可取 $x_1=\frac{y_1}{f\left(y_1\right)}$；设 $n-1$ 时定理为真，下对 n 证明。取一个线性无关组 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 且设系 $\{f_i\}_{i=1}^{n-1}$ 与 $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ 双正交。对于任意 $x\in X$ 考虑元素 $y=x-\sum\limits_{i=1}^{n-1}f_i(x)x_i$，则 $(\forall i\in\overline{1;n-1}): f_i(y)=0$。(但等式 $f_n(y)=0$ 不能对任意 $x\in X$ 成立，否则有

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{n-1}f_i(x)f_n\left(x_i\right)\Rightarrow f_n=\sum_{i=1}^{n-1}f_n\left(x_i\right)f_i$$

将与 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 的线性无关性矛盾）因此存在 y_n 满足 $f_n(y_n) \neq 0$，则设 $x_n = \dfrac{y_n}{f_n(y_n)}$，即得系 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 与 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 双正交

4.4.2.7 共轭空间

定义 4.55 (共轭空间)
设 X 为 Banach 空间，则称线性有界算子空间 $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ 为 X 的共轭空间 (**conjugate space/сопряжённое пространство**)，记为 X^*
另外 $f \in X^*$ 的范数定义为

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

♣

注 注意，对于 $f \in X^*$，有 $(\forall x \in X): f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$，若 $f(x) = 0$ для фиксированного x и любого $f \in X^*$, то $x = 0$. Это следствие из теоремы ХанаБанаха. Если допустить, что $x \neq 0$, то (по теореме 23.4) найдётся такой $f \in X^*$, что $f \neq 0, f(x) = \|x\| \neq 0-$ прот иворечие.

定义 4.56 (共轭空间沿范数收敛性)
设 Banach 空间 X 的共轭空间 X^*，若

$$\|f_n - f\|_{X^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

则称 f_n 在 X^* 上沿范数收敛 (сходимость по норме) 到 f

♣

定义 4.57 (共轭空间 $*-$ 弱收敛性)
设 Banach 空间 X 的共轭空间 X^*，若

$$(\forall x \in X): f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

则称 f_n 在 X^* 上 * 弱收敛 (*-слабая сходимость) 到 f

♣

例题 4.10 （弱收敛但非沿范数收敛）

$L_p^* = L_q$，其中 $p, q > 1, p^{-1} + q^{-1} = 1$，则有线性泛函 $\int f(x)g(x)dx$，其中 $g(x) \in L_p, f(x) \in L_q$
设函数序列 $f_n = \{\cos nx\}$，$L_2[0;\pi]$，$[\alpha;\beta] \subset [0;\pi]$，由定义对 $g(x) = \chi_{[\alpha;\beta]}(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \cos nx \cdot \chi_{[\alpha,\beta]}(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n\beta) - \sin(n\alpha)}{n} = 0$$

则有 f_n 弱收敛到 0，但这时

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^\pi \left(\cos nx \cdot \chi_{[\alpha;\beta]}(x) \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\alpha^\beta \cos^2 nx \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \cos 2nx \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4n}(\sin 2n\alpha - \sin 2n\beta) + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{2\pi} \left(\cos nx \cdot \chi_{[\alpha;\beta]}(x) \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}(\beta - \alpha) \right)^{\frac{1}{2}}$$

即 f_n 非沿范数收敛到 0

例题 4.11 （弱收敛非强收敛）

设 H 为具有正交基 $\{e_k\}$ 的 Hilbert 空间。对于任意向量 $x \in H$，满足 $\langle e_k, x \rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$（其为向量 x 的 Fourier

系数)，因此 e_k 弱收敛到 0

但另一方面，当 $n\neq m$ 时有

$$\|e_n-e_m\|^2=\langle e_n-e_m,e_n-e_m\rangle=2$$

即序列 $\{e_k\}$ 不为强基本序列，则其显然不在 H 上强收敛

定理 4.55 (Hilbert 空间上一般形式线性泛函 Riesz 定理/теорема Рисса об общем виде линейного функци

设 H 为 Hilbert 空间，则对于任意在 H 处处定义的线性有界算子 f，存在唯一的元素 $y\in H$ ，满足对于任意 $x\in H$

$$f(x)=\langle x,y\rangle$$

其中 $\|f\|=\|y\|$

证明 考虑 L 为所有满足 $f(z)=0$ 的 $z\in H$ 的集合，则 L 为 H 的子集。若 $L=H$，则有 $f=0$ 且 $y=0$，显然定理成立

设 $L\neq H$，则 $(\exists z_0\perp L)(z_0\neq 0)$，不妨设 $f(z_0)=1$。设 $x\in H$，则由 $f(x-f(x)z_0)=f(x)-f(x)f(z_0)=0$ 有 $x-f(x)z_0\in L$。因此 $x-f(x)z_0\perp z_0$，由此

$$0=\langle x-f(x)z_0,z_0\rangle=\langle x,z_0\rangle-f(x)\|z_0\|^2\Rightarrow f(x)=\left\langle x,\frac{z_0}{\|z_0\|^2}\right\rangle$$

取 $y=\dfrac{z_0}{\|z_0\|^2}$。下证 $\|f\|=\|y\|$，由 Cauchy-Schiwarz 不等式即得

$$|f(x)|=|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|\Rightarrow\|f\|\leqslant\|y\|$$
$$f(y)=\langle y,y\rangle\leqslant\|f\|\cdot\|y\|\Rightarrow\|y\|\leqslant\|f\|$$

则有 $\|f\|=\|y\|$，下证 y 唯一性

若 $f(x)=\langle x,y\rangle=\langle x,\tilde{y}\rangle$，则 $\langle x,y-\tilde{y}\rangle=0,\forall x\in H$。取 $x=y-\tilde{y}$，则有 $y=\tilde{y}$

4.5 内积空间

4.5.1 基本概念

4.5.1.1 半双线性型与 Hermite 型

定义 4.58 (半双线性型)

设 E,F 为复向量空间. 称满足下列条件 A1-A4 的映射 $f:E\times F\to\mathbb{C}$:

$\mathrm{A}_1:(\forall x_1,x_2\in E)(\forall y\in F):f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)$

$\mathrm{A}_2:(\forall x\in E)(\forall y\in F)(\forall\lambda\in\mathbb{C}):f(\lambda x,y)=\lambda f(x,y)$

$\mathrm{A}_3:(\forall x\in E)(\forall y_1,y_2\in F):f(x,y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2)$

$\mathrm{A}_4:(\forall x\in E)(\forall y\in F)(\forall\mu\in\mathbb{C}):f(x,\mu y)=\bar{\mu}f(x,y)$

为 $E\times F$ 上半双线性型

性质 (半双线性型组合)

设 E,F 为复向量空间，f 为 $E\times F$ 上半双线性型，则有

$$(\forall x_1,\cdots,x_n\in E)(\forall y_1,\cdots,y_p\in F)(\forall\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\mu_1,\cdots,\mu_p\in\mathbb{C}):$$
$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i,\sum_{j=1}^p\mu_jy_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p\lambda_i\overline{\mu_j}f(x_i,y_j)$$

性质 （半双线性型极化恒等式）

设 E 为一个复线性空间，f 为 $E\times E$ 上一个半双线性型，则有恒等式：

$$f(x,y)=f(x+y,x+y)-f(x-y,x-y)+\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y,x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}f(x-\mathrm{i}y,x-\mathrm{i}y) \tag{4.1}$$

证明 显然由定义有

$$\begin{aligned}
f(x+y,x+y)&=f(x,x)+f(x,y)+f(y,x)+f(y,y)\\
-f(x-y,x-y)&=-f(x,x)+f(x,y)+f(y,x)-f(y,y)\\
\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y,x+\mathrm{i}y)&=\mathrm{i}f(x,x)+f(x,y)-f(y,x)+\mathrm{i}f(y,y)\\
-\mathrm{i}f(x-\mathrm{i}y,x-\mathrm{i}y)&=-\mathrm{i}f(x,x)+f(x,y)-f(y,x)-\mathrm{i}f(y,y)
\end{aligned}$$

逐项相加即得恒等式 (4.1)

性质 （半双线性型对角线恒等式/равенство параллелограмма）

设 E 为一个复线性空间，f 为 $E\times E$ 上一个半双线性型，则有恒等式：

$$f(x+y,x+y)+f(x-y,x-y)=2f(x,x)+2f(y,y)$$

证明 由性质 (4.5.1.1) 计算过程即得

定义 4.59

Hermite 型 [] 设 E 为一个复线性空间，若 $E\times E$ 上半双线性型 f 满足

$\mathrm{A}_5:(\forall x,y\in E):f(y,x)=\overline{f(x,y)}$ （共轭对称性）

则称半双线性型 f 为 **Hermite** 型

♣

定义 4.60 (Hermite 矩阵)

若复矩阵 (α_{ij}) 满足

$$(\forall i,j):\alpha_{ij}=\overline{\alpha_{ji}}$$

则称矩阵为 **Hermite** 矩阵

♣

定理 4.56 (有限维复向量空间上半双线性型 Hermite 性充要条件)

设 E 为一个有限维复线性空间，$(e_1,\cdots,e_n)$ 为 E 的一组基，f 为 $E\times E$ 上半双线性型，(α_{ij}) 为它在基 (e_i) 下的矩阵。则 f 为 Hermite 型当且仅当 (α_{ij}) 为 Hermite 矩阵

♡

证明 必要性显然，充分性由性质 (4.5.1.1) 即证

定理 4.57 (复向量空间上半双线性型为 Hermite 型充要条件)

设 E 为一个复向量空间，f 为 $E\times E$ 上的一个半双线性型，则下列命题等价：

1) f 为 Hermite 型

2) $(\forall x\in E):f(x,x)\in\mathbb{R}$

♡

证明 1)⇒2). 若 f 为 Hermite 型，则有 $x\in E,f(x,x)=\overline{f(x,x)}$，即 $f(x,x)\in\mathbb{R}$；2)⇒1). 对于 $x,y\in E$ 定义 $g(x,y)=\overline{f(y,x)}$，则显然 g 为 $E\times E$ 上的一个半双线性型。由假设，$(\forall x\in E):g(x,x)=f(x,x)$，又由极化恒等式 (4.1) 有 $f=g$，则 f 为 Hermite 型

定义 4.61 (正交)

设 f 为 E 上 Hermite 型，$x,y\in E$，$M,N\subset E$，若 x,y 满足 $f(x,y)=0$，则称 x,y （关于 f）正交 **(ортогональны)**；若 E 的子集 M 中任意元素和 E 的子集 N 中任意元素都正交，则称集 M,N （关于 f）正交

若 M 中和 M 正交的全体元素构成的集合为 E 的一个线性子空间，则（不太恰当地）称该子空间为 E 中和 M 正交的子空间，即 M 的正交子空间，记为 $M^{\perp}$

定义 4.62 (核与退化性)

$E^{\perp}$ 为 E 的一个线性子空间，称线性子空间

$$\mathrm{Ker} f=\{x\in E|(\forall y\in E):f(x,y)=0\}$$

为 f 的核

若 $E^{\perp}\neq\{0\}$，则称 f 退化；若 $E^{\perp}=\{0\}$，则称 f 非退化

特别地 $E\neq\{0\}$ 时 f 恒等于 0，此时有 $E^{\perp}=E$，f 退化

注 (退化性)

记线性空间 $E/E^{\perp}$ 为 E'，取商空间的过程中可由 f 得 E' 上的一个 f'。对 $x',y'\in E'$ 取 x',y' 在 E 中的代表元 x,y，则 $f(x,y)$ 只依赖于 x'，y'，而与代表元无关——因为若 x_1,y_1 为 x',y' 的另外一组代表元，则有 $x_1=x+u,y_1=y+v,u,v\in E^{\perp}$ 且

$$f\left(x_1,y_1\right)=f(x,y)+f(x,v)+f(u,y)+f(u,v)=f(x,y)+0+0+0=f(x,y)$$

于是可定义 $f'\left(x',y'\right)=f(x,y)$。由 f 为 Hermite 型，则有 f' 也为 Hermite 型。设 $x'\in E'$，并设 $(\forall y'\in E'):f'\left(x',y'\right)=0$，则后者非退化。选择 x' 在 E 中的代表元 x，则 $(\forall y\in E):f(x,y)=0$，则有 $x\in E^{\perp}$，即 $x'=0$

称 f' 为和 f 相关联的非退化 Hermite 型。若 f 本身就非退化，则 f' 等价于 f

由构造可以把关于 Hermite 型的几乎所有问题都归结到非退化的情形

定理 4.58 (Hermite 型勾股定理/Hermite 型 Pythagoras 定理)

设 f 为 E 上 Hermite 型，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 E 中两两正交元，则有

$$f\left(x_1+\cdots+x_n,x_1+\cdots+x_n\right)=f\left(x_1x_1\right)+\cdots+f\left(x_n,x_n\right)$$

证明 由性质 (4.5.1.1) 即证

4.5.1.2 准 Hilbert 空间与内积空间

定义 4.63 (准 Hilbert 空间与数量积)

设 f 为 E 上一个 Hermite 型，若

$$(\forall x\in E):f(x,x)\geqslant 0$$

则称 f 半正定，称 f 为 E 上半正定 Hermite 型。称一个复线性空间及其上一个半正定 Hermite 型构成了一个准 **Hilbert** 空间

若 E 为准 Hilbert 空间，则称一个半正定 Hermite 型为 E 上一个数量积，研究准 Hilbert 空间用 $(x\mid y)$ 表示 E 中两个元素 x 和 y 的数量积

定理 4.59 (准 Hilbert 空间上 Cauchy-Schwarz 不等式)

设 E 为准 Hilbert 空间，则有

$$(\forall x,y\in E):|(x\mid y)|^2\leqslant(x\mid x)(y\mid y)$$

证明 显然有

$$(\forall\lambda\in\mathbb{C}):0\leqslant(x+\lambda y\mid x+\lambda y)=\lambda\bar{\lambda}(y\mid y)+\lambda(y\mid x)+\bar{\lambda}(x\mid y)+(x\mid x)\tag{4.2}$$

乘上 $(y \mid y)$，则有

$$(\forall\lambda\in\mathbb{C}):0\leqslant(\lambda(y\mid y)+(x\mid y))(\bar{\lambda}(y\mid y)+(y\mid x))+(x\mid x)(y\mid y)-(x\mid y)(y\mid x) \tag{4.3}$$

假设 $(y\mid y)\neq 0$。取 $\lambda=-(x\mid y)/(y\mid y)$，则由式 (4.3) 有

$$0\leqslant(x\mid x)(y\mid y)-(x\mid y)(y\mid x)$$

即定理中不等式。若 $(x\mid x)\neq 0$，仅需交换 x 和 y 位置即可。

若 $(x\mid x)=(y\mid y)=0$，则 (4.2) 就简化为

$$(\forall\lambda\in\mathbb{C}):0\leqslant\lambda(y\mid x)+\bar{\lambda}(x\mid y) \tag{4.4}$$

在式 (4.4) 中取 $\lambda=-(x\mid y)$ 就有

$$0\leqslant-(x\mid y)\overline{(x\mid y)}-\overline{(x\mid y)}(x\mid y)=-2|(x\mid y)|^2$$

即 $(x\mid y)=0$，定理中的不等式仍然成立

定理 4.60 (准 Hilbert 空间上正交子空间结构)

设 E 为准 Hilbert 空间，则 $E^{\perp}$ 为 E 中满足 $(x\mid x)=0$ 的 x 全体构成的集合

证明 设 $x\in E^{\perp}$，显然有 $(x\mid x)=0$；反之，假设 $(x\mid x)=0$，由准 Hilbert 空间 Cauchy-Schwarz 不等式 (4.59)，则 $(\forall y\in E):(x\mid y)=0$，则有 $x\in E^{\perp}$

注 由此定义 E 上的数量积非退化，当且仅当 $(\forall x\in E)(x\neq 0):(x\mid x)>0$，否则称 E 上的数量积退化

定义 4.64 (半正定 Hermite 型与典范数量积)

设 $E=F=\mathbb{C}^n$，对 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\mu_1,\cdots,\mu_n\in\mathbb{C}$ 定义

$$f\left((\lambda_1,\cdots,\lambda_n),(\mu_1,\cdots,\mu_n)\right)=\lambda_1\overline{\mu_1}+\cdots+\lambda_n\overline{\mu_n}$$

则 f 为 $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ 上的一个半正定 **Hermite 型**，称 f 为 $\mathbb{C}^n$ 上的典范数量积

定义 4.65 (内积空间第一定义)

设 E 为准 Hilbert 空间，若其数量积非退化，则称该准 Hilbert 空间为分离准 **Hilbert** 空间或内积空间，称该非退化数量积为纯量积或内积

定理 4.61 (准 Hilbert 空间上半范数)

设 E 为一个准 Hilbert 空间，对于 $x\in E$ 定义

$$\|x\|=\sqrt{(x\mid x)}$$

则 E 上的函数 $x\mapsto\|x\|$ 为一个半范数，即满足

$\mathrm{S}_1:(\forall x\in E):\|x\|\geqslant 0$

$\mathrm{S}_2:(\forall x\in E)(\forall\lambda\in\mathbb{C}:\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|(x)\|$

$\mathrm{S}_3:(\forall x,y\in E):\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

证明 S_1 与 S_2 显然。对于 $x,y\in E$ 有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y\mid x+y)=(x\mid x)+(y\mid y)+(x\mid y)+(y\mid x)\\&\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2+2|(x\mid y)|\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\quad(\text{Caychy-Schwarz 不等式})\\&=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

S_3 即证

定理 4.62 (准 Hilbert 空间对角线恒等式/тождество параллелограмма)

在准 Hilbert 空间 E 中有

$$(\forall x, y \in E) : \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

证明 直接由定义即得

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y \mid x+y) + (x-y \mid x-y)\\ &= (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) + (x \mid x) - (x \mid y) - (y \mid x) + (y \mid y)\\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\end{aligned}$$

定理得证

定理 4.63 (准 Hilbert 空间勾股定理/准 Hilbert 空间 Pythagoras 定理)

在准 Hilbert 空间 E 中，若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 两两正交，则有

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$$

定理 4.64 (准 Hilbert 空间上赋范充要条件)

设 E 为准 Hilbert 空间，对于 $x \in E$ 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

则该半范数为一个范数（即满足 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$）的充要条件为 E 为分离的，即 E 为内积空间

证明 最后的条件等价于 $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$ ，这即是范数的定义

注 经常也用该定理的结论来定义内积空间，今后为区别起见，称内积空间的非退化数量积为纯量积，由此引出下面的定义

定义 4.66 (内积空间第二定义)

设 E 为复线性空间，若有函数 $E \times E \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ 满足

$H_1 : (\forall x \in E) : \langle x, x \rangle \geqslant 0$

$H_2 : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$H_3 : (\forall x, y \in E) : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

$H_4 : (\forall x, y \in E)(\forall \lambda \in \mathbb{C}) : \lambda \langle x, y \rangle$

$H_5 : (\forall x, y, z \in E)\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

则称空间 E 为一个内积空间，称 $E \times E \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ 为其上的纯量积或内积

注 （内积空间第二定义）

由 $H_2H_4H_5$ 知函数为 Hermite 型，由 H_1 可见该 Hermite 型为半正定 Hermite 型，由 H_5 及定理 (4.64) 可见，该半正定非退化 Hermite 型与一个范数相关联

定理 4.65 (内积空间纯量积连续性)

设 $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$，则有

$$(x_n \mid y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x \mid y)$$

证明 由定义与准 Hilbert 空间上 Cauchy-Schwarz 不等式 (4.59) 即得

$$\begin{aligned}|(x_n \mid y_n) - (x \mid y)| = |(x_n - x \mid y_n) + (x \mid y_n - y)| &\leqslant |(x_n - x \mid y_n)| + |(x, y_n - y)|\\ &\leqslant (x_n - x \mid x_n - x) \cdot (y_n \mid y_n) + (x \mid x) \cdot (y_n - y \mid y_n - y)\\ &= \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|\end{aligned}$$

由 $(y_n \mid y_n), (x \mid x)$ 有界性有 $|(x_n \mid y_n) - (x \mid y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

定义 4.67 (内积空间第三定义)

设 E 为域 K 上线性空间，若有函数 $E \times E \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ 满足内积公理

I_1：（正定性）$(\forall x \in E) : \langle x, x\rangle \geqslant 0$ 且 $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

I_2：（共轭对称性）$(\forall x, y \in E) : \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

I_3：（第一变元线性性）$(\forall x, y, z \in E)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) : \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

则称空间 E 为一个内积空间，称 $E \times E \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ 为其上的纯量积 (**скалярное произведение**) 或内积。

特别地，若域 K 为实数域，则称空间 E 为一个 **Euclid** 空间 (**Euclidean space/евклидово пространство**)；若域 K 为复数域，则称空间 E 为一个酉空间 (**unitary linear space/унитарное пространство**)

类似地，也称实准 Hilbert 空间为准 **Euclid** 空间 (**псевдоевклидовое пространство**)，称复准 Hilbert 空间为准酉空间

注 （准 Euclid 空间）

由准 Euclid 空间定义，定理 (4.64) 可改述为定理 (4.66)

定理 4.66 (准 Euclid 空间可赋半范性)

任意 Euclid 空间可通过 $\|f\| = \sqrt{f \mid f)}$ 对 $\forall f$ 赋范，任意准 Euclid 空间可通过 $\|f\| = \sqrt{(f \mid f)}$ 对 $\forall f$ 赋半范

注 当然也有任意酉空间可通过 $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ 对 $\forall f$ 赋范，任意准酉空间可通过 $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ 对 $\forall f$ 赋半范

定义 4.68 (准 Hilbert 空间拓扑)

在一个准 Hilbert 空间中，称满足 $\|x\| \leqslant 1$ （对应地，$\|x\| < 1, \|x\| = 1$）的 x 全体构成的集合为闭单位球（对应地，称为开单位球，单位球面）

定义 4.69 (内积空间度量)

设 E 为一个内积空间，对于 $x, y \in E$ 定义

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y \mid x - y)}$$

由定理 (4.64) 即知 d 为 E 上的一个距离，则 E 为一个距离空间，则为一个分离拓扑空间，称 E 的拓扑为范数拓扑

例题 4.12 （$C[a; b]$ 非内积空间）

在空间 $C[a; b]$ 上无法引入内积

$$(\forall x \in C[a; b]) : \|x(t)\| = \max_{t \in [a;b]} |x(t)|$$

解 设

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0; 0.5] \\ 2t - 1 & , t \in [0.5; 1] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} -2t + 1 & , t \in [0; 0.5] \\ 0 & , t \in [0.5; 1] \end{cases}$$

则 $\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = 1, \|x + y\| = 1$，不满足准 Hilbert 空间对角线恒等式 (4.62)

例题 4.13 （l_1 空间非内积空间）

在 l_1 空间上无法引入内积

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|, \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$$

解 设 $x=(1,0,0,\ldots), y=(0,1,0,\ldots)$，则 $\|x\|=\|y\|=1, \|x-y\|=2, \|x+y\|=2$，不满足准 Hilbert 空间对角线恒等式 (4.62)

4.5.1.3 Hilbert 空间

定义 4.70 (Hilbert 空间)

称完备内积空间为 **Hilbert 空间 (Hilbert space/Гильбертовое пространство)** ♣

定理 4.67 (有限维内积空间结构)

设 E 为一个具有有限维数 n 的内积空间，则 E 和带有典范数量积的 $\mathbb{C}^n$ 同构 ♡

证明 归纳：$n=0$ 定理显然。现设对 $n-1$ 维空间该定理成立。设 x_0 为 E 中非零元素，则有 $(x_0 \mid x_0)>0$. 不妨设 $(x_0 \mid x_0)=1$. 从 E 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $f_0: y \mapsto (y \mid x_0)$ 为线性映射，由 $f_0(x_0)=1$，其非零。取 $F=\operatorname{Ker} f_0$，这是一个 $n-1$ 维内积空间。根据归纳假设，存在从 F 到具备典范数量积的 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的同构 u。由 $x_0 \notin F$，则有 $\mathbb{C}x_0$ 和 F 在 E 内互补。E 的任意元素都可以用唯一的方式写成 $y+\lambda x_0$ 的形式，其中 $y \in F, \lambda \in \mathbb{C}$。考虑映射 $v: E \to \mathbb{C}^n, v(y+\lambda x_0)=(u(y), \lambda)$，显然 v 为从 E 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性双射。对 $y' \in F$ 和 $\lambda' \in \mathbb{C}$ 有

$$\begin{aligned}
(v(y+\lambda x_0) \mid v(y'+\lambda' x_0)) &= ((u(y), \lambda) \mid (u(y'), \lambda')) \quad (\text{根据 } v \text{ 的定义}) \\
&= (u(y) \mid u(y')) + \lambda\overline{\lambda'} \quad (\text{根据典范数量积的定义}) \\
&= (y \mid y') + \lambda\overline{\lambda'} \quad (\ u \text{ 为同构}) \\
&= (y \mid y') + (y \mid \lambda' x_0) + (\lambda x_0 \mid y') + (\lambda x_0 \mid \lambda' x_0) \quad ((x_0 \mid x_0)=1\ ) \\
&= (y+\lambda x_0 \mid y'+\lambda' x_0)
\end{aligned}$$

则 v 为准 Hilbert 空间的同构

推论 4.15 (有限维内积空间完备性)

有限维内积空间均为完备空间，即有限维内积空间均为 Hilbert 空间 ♡

例题 4.14 (l_2 空间为 Hilbert 空间)

在 l_2 空间上定义内积

$$(\forall x, y \in l_2): \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$$

则该内积空间为 Hilbert 空间

证明 下证完备性，设基本序列 $\{x_n\}$，$x_n=\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \ldots\right)$ 满足

$$(\forall k, n, p \in \mathbb{N}): \left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x_{n+p}-x_n\|_{l_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

则对于任意 k，数值序列 $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $\mathbb{R}$ 上为基本序列，则由 $\mathbb{R}$ 完备性有 $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。设 $\xi_k^{(0)}=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}$。考虑实数序列 $x_0=\left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)}, \ldots\right)$，下证 $x_0 \in l_2$，和在 l_2 上 $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$

由 $\{x_n\} \subset l_2$ 的基本性有

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n>N)(\forall p\in\mathbb{N}): \|x_{n+p}-x_n\| = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

这时对于任意 m 有

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

令 $p\to+\infty$ 即得，对于任意 $n>N$ 有

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\xi_k^{(0)}-\xi_k^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon$$

现当 $m\to\infty$ 时取极限即得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(0)}-\xi_k^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon$$

因此当 $n>N$ 时 $x_0-x_n\in l_2$，且 $\|x_0-x_n\|\leqslant\varepsilon$。则 $x_0=x_n+(x_0-x_n)\in l_2$。此外 $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x_0$

定理 4.68 (Hilbert 空间闭凸集上最佳逼近存在唯一性)

设 M 为 Hilbert 空间上闭凸集，若 $x\notin M$，则有且仅有一个元素 $y\in M$ 满足

$$d(x,M)=\|x-y\|$$

♡

证明

存在性：由闭集点到集合距离引理 (4.2)，$d=d(x,M)>0$，则

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\exists u_n\in M):d\leqslant\|x-u_n\|<d+\frac{1}{n}$$

下证 $\{u_n\}$ 为基本序列

由准 Hilbert 空间上对角线恒等式 (4.62) 即有

$$2\left\|x-u_n\right\|^2+2\left\|x-u_m\right\|^2=\left\|u_n-u_m\right\|^2+\left\|2x-u_n-u_m\right\|^2$$

而由 M 为闭集，则 $\dfrac{u_n+u_m}{2}\in M$ 且

$$\|2x-u_n-u_m\|^2=4\left\|x-\frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2\geqslant 4d^2$$

此外

$$\|x-u_n\|^2<\left(d+\frac{1}{n}\right)^2,\quad\|x-u_m\|^2<\left(d+\frac{1}{m}\right)^2$$

若 $n,m>N$，则序列 $\{u_n\}$ 为基本序列

由 H 的完备性有 $\{u_n\}$ 收敛到某个元素 $y\in M$ （由 M 为闭集）。对于

$$d\leqslant\|x-u_n\|<d+\frac{1}{n}$$

令 $n\to\infty$，则有 $\|x-y\|=d$

唯一性：设某个 $y^*\in M$ 满足 $\|x-y^*\|=d$。由准 Hilbert 空间上对角线恒等式 (4.62) 即有

$$4d^2=2\|x-y\|^2+2\left\|x-y^*\right\|^2=\|y-y^*\|^2+4\left\|x-\frac{y+y^*}{2}\right\|^2\geqslant\|y-y^*\|^2+4d^2$$

因此 $\|y-y^*\|=0$ 且 $y=y^*$

推论 4.16 (Hilbert 空间正交分解)

设 L 为 Hilbert 空间 H 的子空间，则对于任意 $x\in H$ 有唯一的分解 $x=y+z$，其中 $y\in L,z\perp L$

♡

注 该推论引出了正交补的定义

定义 4.71 (正交补)

设 L 为 Hlibert 空间 H 上线性流形，则称 H 上与 L 正交点的点构成的集合为 L（在 H 上）的正交补 **(ортогональное дополнение)**，记为 $L^{\perp}$

♣

定理 4.69 (Hilbert 空间线性流形正交补为子空间)

设 L 为 Hlibert 空间 H 上线性流形，则 L 在 H 上的正交补为 H 的子空间

证明

线性性：设 $z_1,z_2\in L^\perp$，则 $(\forall y\in L):(\langle z_1,y\rangle=0)\wedge(\langle z_2,y\rangle=0)$，则有

$$(\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C})(\forall y\in L):\langle\lambda_1z_1+\lambda_2z_2,y\rangle=\lambda_1\langle z_1,y\rangle+\lambda_2\langle z_2,y\rangle=0$$

则有 $\lambda_1z_1+\lambda_2z_2\in L^\perp$

闭性：设给定序列 $\{z_n\},z_n\in L^\perp,z_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}z$，则 $(\forall y\in L):\langle z_n,y\rangle=0$，取极限即得 $(\forall y\in L):\langle z,y\rangle=0$，则 $z\in L^\perp$

定理 4.70 (Hilbert 空间线性流形完备性充要条件)

设 L 为 Hlibert 空间 H 上线性流形，则 L 在 H 上完备的充要条件为 $L^\perp=\{0\}$

证明

充分性：设 $L^\perp=\{0\}$，若 $(\forall y\in L):\langle z,y\rangle=0$，则 $z=0$。假设 L 在 H 中不稠密，则存在 $x_0\in H,x_0\notin\bar{L}$。集 $\bar{L}$ 为 H 子空间，则由推论 (4.16) 给出正交分解 $x_0=y_0+z_0,y_0\in\bar{L},z_0\in(\bar{L})^\perp=L^\perp$，但这时 $z_0\neq0$，导出矛盾

必要性：设 L 在 H 上完备，则 $\bar{L}=H$。假设存在 $z_0\in H,z_0\perp L$。对于任意 $y\in H$ 存在序列 $y_n\in L,y_n\to y$。则 $0=\langle y_n,z_0\rangle\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\langle y,z_0\rangle$。则 $(\forall y\in H):\langle y,z_0\rangle=0$，当 $y=z_0$ 时即有 $\langle z_0,z_0\rangle=0$，则 $z_0=0$

定义 4.72 (可分赋范空间)

设 X 为赋范空间，若其存在可数处处稠密集，即有

$$(\exists\{x_n\}_{n=1}^\infty)(\forall x\in X)(\forall\varepsilon>0)(\exists x_n):\|x_n-x\|<\varepsilon$$

则称 X 为可分赋范空间

定理 4.71 (Hilbert 空间可分充要条件)

设 H 为 Hilbert 空间，则 H 为可分 Hilbert 空间的充要条件为 H 存在有限数量或可数数量元素的正交基

证明

必要性：设 H 为可分 Hilbert 空间，则在 H 上存在可数处处稠密集 $\{x_n\}$。设 x_k 为 $\{x_n\}$ 中第一个非零元素，记为 e_1。考虑一个序列 $x_{k+1},x_{k+2},\dots$ 并设 x_s 为其第一个与 e_1 线性无关的元素，记为 e_2。考虑序列 $x_{s+1},x_{s+2},\dots$ 并将第一个与 e_1 和 e_2 线性无关的元素记为 e_3 。以此类推，得到一个有限数量或可数数量元素的序列 $\{e_n\}$

由于线性无关组 $\{e_n\}$ 的线性闭包 L 包含 $\{x_n\}$，则 L 在 H 中稠密。对 $\{e_n\}$ 进行正交化即得正交组 $\{f_n\}$，且该正交组的线性闭包也在 H 中稠密，则得

$$(\forall x\in H)(\exists\{\alpha_{k,n}\}):\sum_{k=1}^\infty\alpha_{k,n}f_k\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$$

充分性：设在 H 上存在有限数量或可数数量元素的正交基 $\{f_n\}$，则向量组 $\{f_n\}$ 中所有向量系数为 $c_k=\alpha_k+i\beta_k,\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{Q}$ 的有限线性组合的集合构成一个在 H 中稠密的可数集