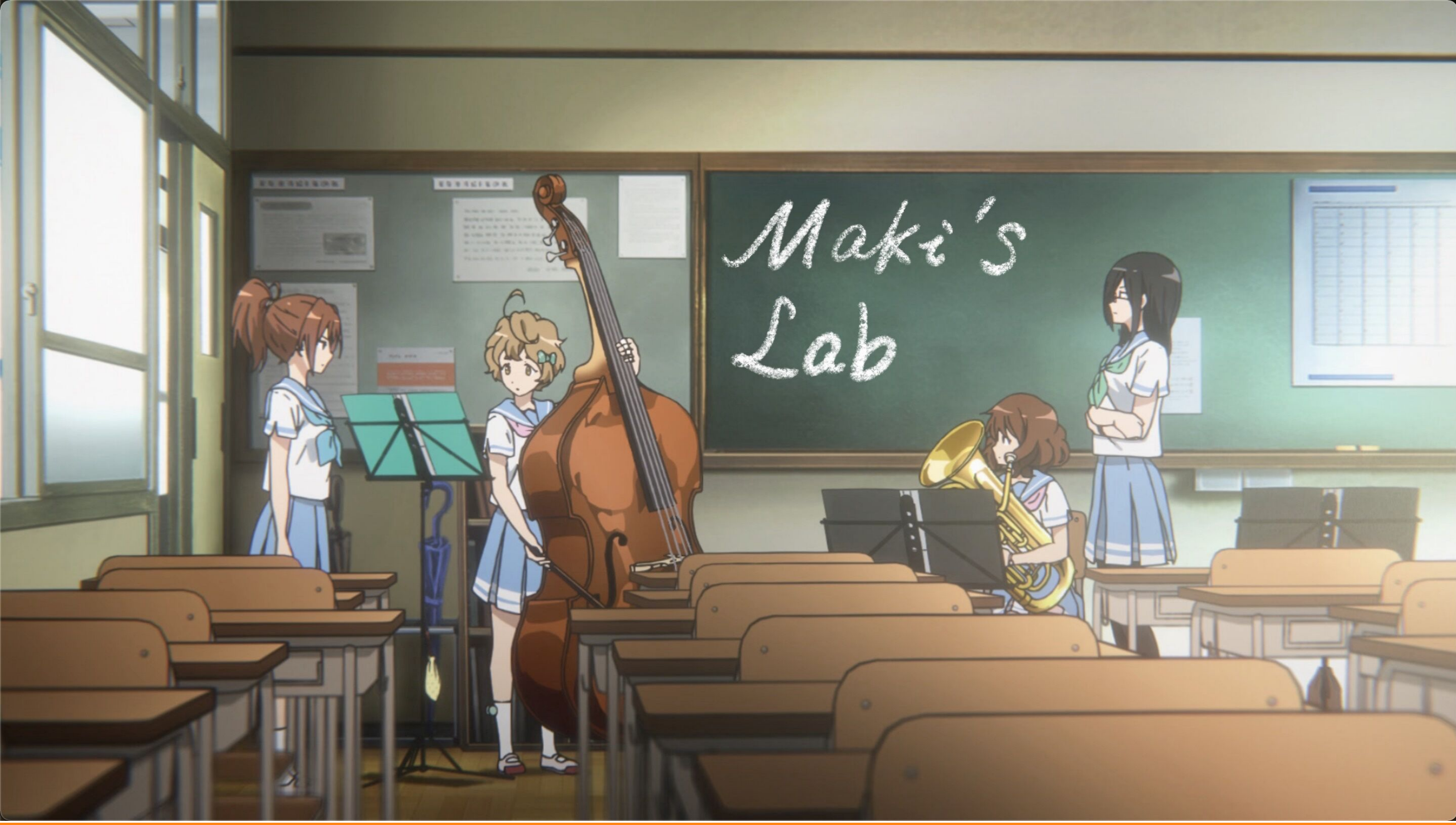


常微分方程

定性理论：稳定性问题

作者：Galois 爱求五次根
组织：深北莫数学学社分析小组
时间：2022/12/1
宗旨：执象而求，咫尺千里

恰恰是数学，给精密的自然科学提供了无可置疑的的可靠保证，没有数学，它们无法达到这样的可靠程度。——爱因斯坦

目录

第 1 章 稳定性理论

1.1 基本概念

在稳定性理论中，关于当自变量在区间 $t \in [t_0; +\infty)$ 上趋于正无穷时，微分方程或系统 Cauchy 问题的解对在 $t = t_0$ 处给定的初值的依赖性问题非常重要。此外不失一般性，设 $t_0 = 0$

1.1.1 稳定性理论的基本概念

考虑关于所需向量函数 $\bar{y}(t) = (y_1(t), y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$ 的一阶标准微分方程组的 Cauchy 问题

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)) \tag{1.1}$$

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \tag{1.2}$$

其中

$$\bar{f}(t, \bar{y}) = (f_1(t, \bar{y}), f_2(t, \bar{y}), \ldots, f_n(t, \bar{y}))^\top, \quad \bar{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})^\top$$

假设，对一切的 $i, j = 1, 2, \ldots, n$ 来说，函数 $f_i(t, \bar{y})$ 与偏导数 $\partial f_i(t, \bar{y})/\partial y_j$ 在集合

$$\Pi = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$$

上都有定义且连续。然后根据 Picard 定理（关于任意初值 $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ 的 Cauchy 问题解的存在与唯一性定理），系统 (1.1)，(1.2) 在某一区间 $[0, T]$ 存在唯一解 $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$，其括号中的符号反应解对初始状态 $\bar{y}_0$ 的依赖。若在初值条件 (1.2) 中取初值为 $\widetilde{y}_0$，则对应的解表达式为 $\bar{y}(t; \widetilde{y}_0)$。采用向量 $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ 的 Euclid 范数

$$\|\bar{y}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}$$

描述高维空间中的度量

注 相空间中的解轨是有界闭集故为紧集

定义 1.1 (Lyapunov 稳定性)

Cauchy 问题 (1.1), (1.2) 的解 $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$ 称为在 Lyapunov 意义下稳定的，如果对任意的 ϵ，存在 $\delta(\varepsilon, \bar{y}_0) > 0$，使得对任意的满足条件 $\|\widetilde{y}_0 - \bar{y}_0\| < \delta(\varepsilon, \bar{y}_0)$ 的初始值 $\widetilde{y}_0$，相应的方程组 (1.1) 的 Cauchy 问题的解 $\bar{y}(t; \widetilde{y}_0)$ 对一切的 $t \geqslant 0$ 存在并满足不等式

$$\|\bar{y}(t; \widetilde{y}_0) - \bar{y}(t; \bar{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, +\infty) \tag{1.3}$$

否则，解 $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$ 称为在 Lyapunov 意义下不稳定的 ♣

注 不等式 (1.3) 必须对所有的 $t \geqslant 0$ 同时满足，因此也可以用不等式

$$\sup_{t \geqslant 0} \|\bar{y}(t; \widetilde{y}_0) - \bar{y}(t; \bar{y}_0)\| < \varepsilon$$

替代不等式 (1.3)

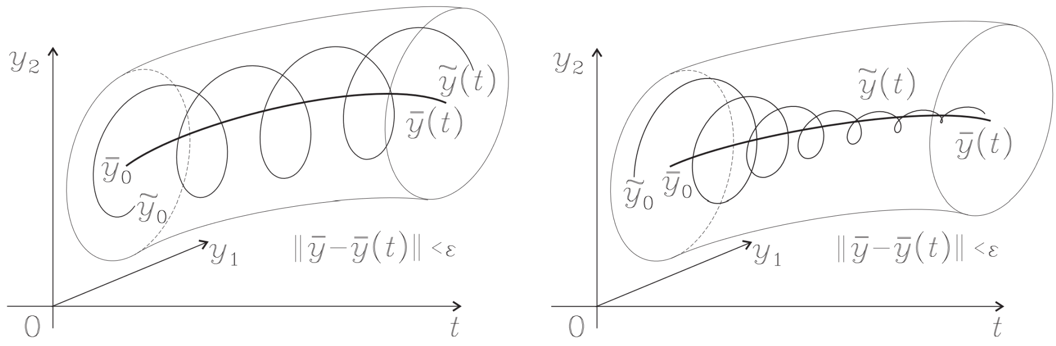
定义 1.2 (渐近稳定性)

Cauchy 问题 (1.1)，(1.2) 的解 $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$ 称为渐近稳定的，如果其在 Lyapunov 的意义下是稳定的，并且存在 $\delta_0 > 0$，使得对任意的满足条件 $\|\widetilde{y}_0 - \bar{y}_0\| < \delta_0$ 的初始值 $\widetilde{y}_0$，存在极限

$$\lim_{t \to +\infty} \|\bar{y}(t; \widetilde{y}_0) - \bar{y}(t; \bar{y}_0)\| = 0 \tag{1.4}$$

♣

注 图1.1：对于解决方案的稳定性和渐进稳定性的定义，$\bar{y}(t) = \bar{y}\,(t;\bar{y}_0)$



a. б.

图 1.1: 在 Lyapunov 意义下的稳定性和渐进稳定性的定义

a. 在稳定的情况下，解 $\tilde{y}(t) = \bar{y}\,(t;\tilde{y}_0)$ 在解 $\bar{y}(t)(\|\bar{y} - \bar{y}(t)\| < \varepsilon, t \geqslant 0)$ 的积分曲线的 ε 管道内

б. 在渐进稳定的情况下，在 $t \to +\infty$ 时，另外 $|\tilde{y}(t) - \bar{y}(t)\| \to 0$

注 图 (1.1) 可视化所介绍的 “在 Lyapunov 意义下的稳定性” 和 “渐进稳定性” 的概念

1.1.2 简化成零解的稳定性问题

在 $\bar{f}(t, 0, \dots, 0) = \bar{\theta}, \bar{y}_0 = \bar{\theta}$ 的情况下，Cauchy 问题 (1.1)，(1.2) 有零解 $\bar{\theta} = (0, \dots, 0)^\top$：

$$\bar{y}(t;\bar{\theta}) = \bar{\theta}, \quad t \geqslant 0$$

接下来重新定义这种情况下的 Lyapunov 稳定性和渐近稳定性，以便进一步描述问题

定义 1.3 (零解的 Lyapunov 稳定性)

Cauchy 问题 (1.1)，(1.2) 的零解 $\bar{y}(t;\bar{\theta}) = \bar{\theta}$ 称为是在 Lyapunov 的意义下稳定的，如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对任意的初值 $\tilde{y}_0$（满足条件 $\|\tilde{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$），相应的系统 (1.1) 的 Cauchy 问题的解 $\bar{y}\,(t;\tilde{y}_0)$ 对一切的 $t \geqslant 0$ 都存在且

$$\|\bar{y}\,(t;\tilde{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, +\infty) \tag{1.5}$$

否则称零解在 Lyapunov 的意义下不稳定 ♣

定义 1.4 (零解的渐近稳定性)

Cauchy 问题 (1.1)，(1.2) 的零解 $\bar{y}(t) = \bar{\theta}$ 称为在 Lyapunov 的意义下是渐近稳定的，若其在 Lyapunov 的意义下稳定且存在 $\delta_0 > 0$，使得对任意的初值 $\tilde{y}_0$（满足条件 $\|\tilde{y}_0\| < \delta_0$），极限

$$\lim_{t \to +\infty} \|\bar{y}\,(t;\tilde{y}_0)\| = 0 \tag{1.6}$$

存在 ♣

Cauchy 问题 (1.1)，(1.2) 的解 $\bar{y}\,(t;\bar{y}_0)$ 的稳定性问题可以归结为类似系统的零解问题。接下来通过引入一个新的未知函数，将系统 (1.1) 过渡到新系统（将非零解化成零解）

$$\bar{x}(t) = \bar{y}(t) - \bar{y}\,(t;\bar{y}_0)$$

因为 $\bar{y}(t)$ 是 (1.1) 的解，则对 $\bar{x}(t)$ 有：

$$\frac{\bar{x}(t)}{dt} = \frac{\bar{y}(t)}{dt} - \frac{\bar{y}\,(t;\bar{y}_0)}{dt} = \bar{f}(t;\bar{y}(t)) - \bar{f}\,(t;\bar{y}\,(t;\bar{y}_0)) =$$
$$= \bar{f}\,(t;\bar{x}(t) + \bar{y}\,(t;\bar{y}_0)) - \bar{f}\,(t;\bar{y}\,(t;\bar{y}_0))$$

因此，向量函数 $\bar{x}(t)$ 是系统

$$\frac{\bar{x}(t)}{dt}=\bar{f}\left(t;\bar{x}(t)+\bar{y}\left(t;\bar{y}_0\right)\right)-\bar{f}\left(t;\bar{y}\left(t;\bar{y}_0\right)\right)$$

的解。该系统的解 $\bar{x}(t;\bar{\theta})$ 在初值条件为零 $\bar{x}(0)=\bar{\theta}$ 的情况下恒等于零 $\bar{x}(t;\bar{\theta})=\bar{\theta},t\geqslant 0$。该平凡解对应于原系统的解 $\bar{y}\left(t;\bar{y}_0\right)$，考虑到上述情况，故在系统的稳定性分析中，通常只研究零解的稳定性

1.2 常系数线性系统零解的稳定性

本节中，将考虑带有常实数系数的线性齐次常微分方程组

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=A\bar{y}$$

其中矩阵 $A=\left(a_{ij}\right),a_{ij}\in\mathbb{R},i,j=1,\ldots,n$。根据矩阵 A 的性质，证明系统零解的稳定性、渐近稳定性和不稳定性定理

1.2.1 辅助命题

引理 1.1

假设矩阵 $B(t)=\left(b_{ij}(t)\right)$ 是函数矩阵，其所有元素都可以被相同的函数 $b(t)$ 优化 (мажорироваться):

$$\left|b_{ij}(t)\right|\leqslant b(t),\quad i,j=1,\ldots,n$$

若向量值函数 $\bar{x}(t)=\left(x_1(t),\ldots,x_n(t)\right)^{\top}$, $\bar{y}(t)=\left(y_1(t),\ldots,y_n(t)\right)^{\top}$ 存在关系式 $\bar{y}(t)=B(t)\bar{x}(t)$，那么就有估计

$$\|\bar{y}(t)\|\leqslant nb(t)\|\bar{x}(t)\|$$

♡

证明 因为 $y_j(t)=\sum_{k=1}^n b_{jk}(t)x_k(t)$，那么估计各分量的绝对值并应用 Cauchy-Буняковского 不等式，有

$$\left|y_j(t)\right|=\sum_{k=1}^n\left|b_{jk}(t)\right|\cdot\left|x_k(t)\right|\leqslant b(t)\sum_{k=1}^n\left|x_k(t)\right|\leqslant b(t)\left(\sum_{k=1}^n 1^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^n x_k^2(t)\right)^{1/2}=b(t)\sqrt{n}\|x(t)\|$$

将所得的不等式不等号两侧平方并关于 $j=1,\ldots,n$ 求和，即可得到引理1.1的命题

引理 1.2

对任意的当 $t\geqslant 0$ 时连续的向量值函数 $\bar{y}(t)=\left(y_1(t),\ldots,y_n(t)\right)^{\top}$，不等式

$$\left\|\int_0^t\bar{y}(\xi)d\xi\right\|\leqslant\sqrt{n}\int_0^t\|\bar{y}(\xi)\|d\xi$$

都成立

♡

证明 根据向量值函数积分的定义，有

$$\int_0^t\bar{y}(\xi)d\xi=\left(I_1(t),\ldots,I_n(t)\right)^{\top},\quad I_j(t)=\int_0^t y_j(\xi)d\xi,\quad j=1,\ldots,n$$

当 $t\geqslant 0$，关于分量的不等式

$$\left|I_j(t)\right|=\left|\int_0^t y_j(\xi)d\xi\right|\leqslant\int_0^t\left|y_j(\xi)\right|d\xi\leqslant\int_0^t\|\bar{y}(\xi)\|d\xi$$

成立。再将所得的不等式不等号两侧平方并关于 $j=1,\ldots,n$ 求和，即可得到引理1.2的命题

引理 1.3

假设矩阵 $Y(t)$ 是具有常系数 $a_{ij}\in\mathbb{R},i,j=1,\ldots,n$ 的线性齐次微分方程组 $d\bar{y}/dt=A\bar{y}$ 的基解矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值并考虑重数，$p=\max_{k=1,\ldots,n}\operatorname{Re}\lambda_k$

那么 (матрициант-фундаментальная матрица) 基解矩阵 $Z(t,\tau)=Y(t)Y^{-1}(\tau)$ 满足关系

1. $Z(t,\tau)=Z(t-\tau,0)$
2. 对任意的 $\gamma>0$，存在 $C_\gamma>0$，使得不等式
$$|Z_{ij}(t,\tau)|\leqslant C_\gamma e^{(p+\gamma)(t-\tau)},\quad \forall t\geqslant\tau$$
成立

证明 基解矩阵 (матрицант) 是 Cauchy 问题矩阵形式
$$\frac{dZ(t,\tau)}{dt}=AZ(t,\tau),\quad Z(\tau,\tau)=E$$
的解，记 $s=t-\tau$，τ 是取定的，并引入函数
$$\widetilde{Z}(s)=Z(\tau+s,\tau)$$
显然有
$$\frac{d\widetilde{Z}(s)}{ds}=A\widetilde{Z}(s),\quad \widetilde{Z}(0)=E$$
但是由于 Cauchy 问题矩阵形式解的唯一性，则有等式 $\widetilde{Z}(s)=Z(s,0)$。回到变量 t，可得 $Z(t,\tau)=Z(t-\tau,0)$

估计矩阵 $Z(s,0)=Y(s)Y^{-1}(0)$ 的分量。由于基解矩阵的列由基本解组的向量值函数组成，因此基解矩阵 $Z(s,0)$ 的元素根据定理有
$$Z_{ij}(s,0)=q_{ij}(s)e^{\lambda_k s}\tag{1.7}$$
的形式，其中 λ_k 是某一个特征值，而 $q_{ij}(s)$ 是阶数为 $\deg q_{ij}(s)\leqslant n-1$ 的多项式。对任意的 $\gamma>0$，存在常数 $C_{ij}>0$，使得不等式
$$|q_{ij}(s)|\leqslant C_{ij}e^{\gamma s},\quad \forall s\geqslant 0$$
成立。又因为 $p=\max_{k=1,\ldots,n}\operatorname{Re}\lambda_k$，那么
$$\left|e^{\lambda_k s}\right|=e^{\operatorname{Re}\lambda_k s}\leqslant e^{ps}$$
考虑这些不等式，根据 (1.7) 可得
$$|Z_{ij}(s,0)|\leqslant|q_{ij}(s)|\cdot\left|e^{\lambda_k s}\right|\leqslant C_\gamma e^{(p+\gamma)s},\quad C_\gamma=\max_{i,j=1,\ldots,n}C_{ij}$$
已假设 $s=t-\tau$，则引理1.3的第二个命题得证

1.2.2 常系数线性微分方程组零解的渐近稳定性定理

考虑带有常实系数的线性齐次微分方程组
$$\frac{d\bar{y}}{dt}=A\bar{y}\tag{1.8}$$
其中 $A=(a_{ij}),a_{ij}\in\mathbb{R},i,j=1,\ldots,n$，设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值并考虑其重数

定理 1.1 (齐次线性方程组零解的渐近稳定性)

假设矩阵 A 的所有特征值的实部都为负
$$\operatorname{Re}\lambda_k<0,\quad \forall k=1,\ldots,n$$
那么方程组 (1.8) 的零解 $\bar{y}(t;\bar{\theta})=\bar{\theta}$ 是渐进稳定的

证明 假设 $\bar{y}(t)=\bar{y}(t;\bar{y}_0)$ 是 Cauchy 问题
$$\frac{d\bar{y}}{dt}=A\bar{y},\quad \bar{y}(0)=\bar{y}_0$$
的解，那么根据基解矩阵的定义，该 Cauchy 问题的解可以表示成
$$\bar{y}(t)=Z(t,0)\bar{y}_0\tag{1.9}$$

的形式。记 $p = \max_{k=1,\dots,n} \operatorname{Re}\lambda_k < 0$，选择并固定如此小的 $\gamma > 0$，以至于

$$\alpha = p + \gamma < 0$$

然后，根据引理1.3的第二部分可知，存在常数 C_γ 使得估计

$$|Z_{ij}(t,0)| \leqslant C_\gamma e^{\alpha t}, \quad t \geqslant 0$$

成立。再根据引理1.1，其中 $B(t) = Z(t,0), b(t) = C_\gamma e^{\alpha t}$ 并且 $\bar{x}(t) = \bar{y}_0$ 根据 (1.9)，可推出估计

$$\|\bar{y}(t)\| \leqslant nC_\gamma e^{\alpha t}\|\bar{y}_0\|$$

如果取 $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2nC_\gamma}$，那么由不等式 $\|\bar{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$ 可以得到对一切的 $t \geqslant 0$ 不等式 $\|\bar{y}(t)\| < \varepsilon$ 成立。渐近稳定性遵循极限关系：当 $t \to +\infty$ 时，$\exp\{\alpha t\} \to 0$

1.2.3 常系数线性系统零解的稳定性定理

定理 1.2 (常系数线性系统零解的稳定性定理)

假设矩阵 A 的所有特征值的实部非正，即

$$\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant 0, \quad \forall k = 1,\dots,n$$

并且存在实部为零的特征值，其中对应于 $\operatorname{Re}\lambda = 0$ 的每个特征子空间的维数和 λ 的重数一致

则系统 (1.8) 的零解 $\bar{y}(t;\bar{\theta}) = \bar{\theta}$ 在 Lyapunov 的意义下稳定但不是渐近稳定的 ♡

证明 再所考虑的情况下，明确基解矩阵

$$Z(t,0) = Y(t)Y^{-1}(0)$$

对变量 $t : t \geqslant 0$ 的依赖性。对于对应具有负实部特征值的基解矩阵的所有元素 $Y_{ij}(t)$，类似于定理1.1，有估计：

$$|Y_{ij}(t)| \leqslant C_{ij}e^{\alpha t}, \quad \forall t \geqslant 0$$

其中 C_{ij} 恒定，$\alpha < 0$。因此

$$|Y_{ij}(t)| \leqslant C_{ij}, \quad \forall t \geqslant 0$$

根据定理的条件，对应于实部为零的特征值 $\lambda = iq$ 的基解矩阵的元素 $Y_{kl}(t)$ 是来自形如

$$\bar{y}(t) = \overline{h_l}e^{\lambda t}$$

的基本解组的向量函数的分量，其中 $\bar{h} = (h_{1l},\dots,h_{nl})^\top$ 为特征向量（没有这些特征值对应的关联向量）。显然，在这种情况下，基解矩阵的元素是有界的

$$|Y_{kl}(t)| = |h_{kl}| \cdot |e^{iqt}| \leqslant C_{kl}, \quad \forall t \geqslant 0$$

因此，基解矩阵 $Y(t)$ 的所有元素都是有界的。矩阵 $Y(t)$ 乘以常数矩阵 $Y^{-1}(0)$ 使乘积矩阵的元素有界。因此

$$|Z_{ij}(t,0)| \leqslant \widetilde{C}_{ij}, \quad \forall t \geqslant 0$$

根据引理1.1，在带有矩阵 $B(t) = Z(t,0)$ 的解的表达式中，函数 $b(t) = \widetilde{C} = \max_{i,j=1,\dots,n}\widetilde{C}_{ij}$ 和 $\bar{x}(t) = \bar{y}_0$ 存在估计

$$\|\bar{y}(t)\| \leqslant n\widetilde{C}\|\bar{y}_0\|$$

从该估计（不等式）中可以推出零解的稳定性

接下来证明零解不具备渐近稳定性。设 $\bar{h} \in \mathbb{C}^n$ 是对应于特征值 $\lambda = iq$ $(q > 0)$ 的某个特征向量。不失一般性，可以假设向量范数 $\|\bar{h}\| = 1$。向量函数

$$\bar{y}(t) = 0.5\delta_0 \operatorname{Re}\bar{h}e^{iqt}, \quad \delta_0 > 0$$

是系统 (1.8) 的解，作为复值解 $\bar{h}e^{iqt}$ 的实部。在初始时刻 $t = 0$，有：

$$\bar{y}(0) = 0.5\delta_0 \operatorname{Re}\bar{h}, \quad \|\bar{y}(0)\| \leqslant 0.5\delta_0\|\bar{h}\| = 0.5\delta_0$$

对任意的 $\delta_0>0$，上述构造的解 $\bar{y}(t)$ 在零解的 δ_0-邻域内出发，但是当 $t\to+\infty$ 时，$\bar{y}(t)\nrightarrow\bar{\theta}$，因为例如：当 $t_k=2\pi k/q, k\in\mathbb{N}$ 时，$\bar{y}\left(t_k\right)=0.5\delta_0\operatorname{Re}\bar{h}\neq\bar{\theta}$。更简单的 $q=0$ 的情况，类似地考虑

1.2.4 常系数线性系统零解的不稳定性定理

定理 1.3 (常系数线性系统零解的不稳定性定理)

至少满足以下条件之一：

1. 矩阵 A 有正实部的特征值
2. 矩阵 A 有一个特征值 λ_m，使得

$$\operatorname{Re}\lambda_m=0$$

并且特征值 λ_m 所对应的特征子空间的维数小于该特征值的代数重数

则零解 $\bar{y}(t;\bar{\theta})=\bar{\theta}$ 在 Lyapunov 的意义下不稳定

♡

证明 假设矩阵 A 有特征值 $\lambda=p+iq$，其中 $p>0,q>0$。用 $\bar{h}=\bar{h}_R+i\bar{h}_I$ 表示相对应的特征向量，其中 $\bar{h}_R,\bar{h}_I$ 是空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的向量。不失一般性，可以假设 $\|\bar{h}\|=1$。向量函数

$$\bar{y}(t)=0.5\delta\operatorname{Re}\bar{h}e^{(p+iq)t}=0.5\delta e^{pt}\left(\bar{h}_R\cos qt-\bar{h}_I\sin qt\right),\quad\delta>0 \tag{1.10}$$

是方程 (??) 的解，作为复值解 $\bar{h}e^{(p+iq)t}$ 的实部。在初始时刻 $t=0$，有

$$\bar{y}(0)=0.5\delta\bar{h}_R,\quad\|\bar{y}(0)\|\leqslant0.5\delta\|\bar{h}\|=0.5\delta$$

对任意的 $\delta>0$，在 (1.10) 中构造的解 $\bar{y}(t)$ 从零解的 δ-邻域内出发，当 $(t=t_k=2\pi k/q,k\in\mathbb{N})\bigvee(k\to+\infty)$ 时，有：

$$\bar{y}\left(t_k\right)=0.5\delta\bar{h}_Re^{2\pi kp/q},\quad\left\|\bar{y}\left(t_k\right)\right\|=0.5\delta\left\|\bar{h}_R\right\|e^{2\pi kp/q}\to+\infty$$

更简单的情况 $q=0$，类似地考虑

如果矩阵 A 具有特征值 $\lambda=iq,q>0$，特征值的重数超过了特征子空间的维数，则对任意的 $\delta>0$，系统 (1.8) 存在解，形如：

$$\begin{aligned}\bar{y}(t)&=0.5\delta\operatorname{Re}(\bar{g}+t\bar{h})e^{iqt}=\\&=0.5\delta\left(\left(\bar{g}_R+t\bar{h}_R\right)\cos qt-\left(\bar{g}_I+t\bar{h}_I\right)\sin qt\right),\quad\delta>0\\\bar{y}(0)&=0.5\delta\operatorname{Re}\bar{g},\quad\|\bar{y}(0)\|\leqslant0.5\delta\end{aligned}$$

其中 $\bar{h}=\bar{h}_R+i\bar{h}_I$ 是特征向量，而 $\bar{g}=\bar{g}_R+i\bar{g}_I$ 是关联向量，$\|\bar{g}\|=1$。构造解 $\bar{y}(t)$ 当 $t=0$ 时从零解的 δ-邻域中出发，而当 $(t=t_k=2\pi k/q,k\in\mathbb{N})\wedge(k\to+\infty)$ 时，有：

$$\bar{y}\left(t_k\right)=0.5\delta\left(\bar{g}_R+t_k\bar{h}_R\right),\quad\left\|\bar{y}\left(t_k\right)\right\|\sim k\left\|\bar{h}_R\right\|\to+\infty$$

更简单的情况 $q=0$，类似地考虑

1.3 借助一阶线性近似研究稳定性（Lyapunov 第一方法）

考察自治方程

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt}=\bar{f}(\bar{y}(t)) \tag{1.11}$$

其中 $\bar{f}(\bar{y})=\left(f_1(\bar{y}),f_2(\bar{y}),\ldots,f_n(\bar{y})\right)^{\top}$。假设

$$\bar{f}(\bar{\theta})=\bar{\theta}$$

那么系统 (1.11) 有零解 $\bar{y}(t)=\bar{\theta}$，将进一步研究该零解的稳定性

在本节和下一节中，假设所有在 $t=0$ 时从零解的某一邻域中出发的解对一切 $t\geqslant0$ 都有定义。当 (1.11)

右侧向量函数的分量 $f_j(\bar{y})$ 在整个 $\mathbb{R}^n$ 空间上满足 Lipschitz 条件时，由定理可知，该事实显然成立。其他限制更少的情况也是可能成立的

设函数 $f_j(\bar{y})$ 在坐标原点的某邻域中二阶连续可微。那么有表达式：

$$\bar{f}(\bar{y}) = A\bar{y} + \bar{R}(\bar{y}) \tag{1.12}$$

其中

$$\text{Jacobi 矩阵}A : A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0,\ldots,0)\right),\quad i,j = 1,\ldots,n,\quad \bar{R}(\bar{y}) = \bar{o}(\|\bar{y}\|)$$

回想高阶无穷小的定义，条件 $\bar{R}(\bar{y}) = \bar{o}(\|\bar{y}\|)$ 意味着

$$\forall\sigma > 0\quad \exists\rho > 0 : \|\bar{y}\| < \rho \Rightarrow \|\bar{R}(\bar{y})\| < \sigma\|\bar{y}\| \tag{1.13}$$

引理 1.4

假设满足条件 (1.12) 并且矩阵 A 的所有特征值都有负实部：

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0,\quad \forall k = 1,\ldots,n$$

那么存在常数 $\delta_0 > 0$ 和 $\rho_0 \geqslant \delta_0 > 0$，使得 Cauchy 问题

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t) + \bar{R}(\bar{y}(t)),\quad \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \tag{1.14}$$

任何解 $\bar{y}(t;\bar{y}_0)$（其中 $\|\bar{y}_0\| < \delta_0$），对一切 $t \geqslant 0$ 都满足不等式

$$\|\bar{y}(t;\bar{y}_0)\| < \rho_0$$

♡

证明 首先验证 Cauchy 问题 (1.14) 的解满足向量积分方程

$$\bar{y}(t;\bar{y}_0) = Z(t,0)\bar{y}_0 + \int_0^t Z(t,\tau)\bar{R}(\bar{y}(\tau;\bar{y}_0))\,d\tau \tag{1.15}$$

确实满足方程，记

$$\bar{F}(t) = \bar{R}(\bar{y}(t;\bar{y}_0)) \tag{1.16}$$

可以看出，$\bar{y}(t;\bar{y}_0)$ 是右侧部分为 $\bar{F}(t)$ 的线性非齐次系统 Cauchy 问题的解，即

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t) + \bar{F}(t),\quad \bar{y}(0) = \bar{y}_0$$

参考线性微分方程组解的存在唯一性定理，该 Cauchy 问题的解形如：

$$\bar{y}(t) = Z(t,0)\bar{y}_0 + \int_0^t Z(t,\tau)\bar{F}(\tau)d\tau$$

考虑公式 (1.16)，得出等式 (1.15)

估计等式 (1.15) 右侧的每一项被加数。根据引理1.1，1.3，类似于定理1.1关于线性系统零解的渐近稳定性的证明，得出结论：存在独立于 $\bar{y}_0$ 的常数 $\alpha < 0$ 与 $M_1 > 0$，使得不等式

$$\|Z(t,0)\bar{y}_0\| \leqslant M_1 e^{\alpha t}\|\bar{y}_0\|$$

成立。(1.15) 式中的被积函数表达式的估计类似

$$\left\|Z(t,\tau)\bar{R}(\bar{y}(\tau;\bar{y}_0))\right\| \leqslant M_2 e^{\alpha(t-\tau)}\left\|\bar{R}(\bar{y}(\tau;\bar{y}_0))\right\|$$

借助引理1.2，估计向量函数积分的范数，得到不等式

$$\|\bar{y}(t;\bar{y}_0)\| \leqslant Me^{\alpha t}\|\bar{y}_0\| + M\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\left\|\bar{R}(\bar{y}(\tau;\bar{y}_0))\right\|d\tau \tag{1.17}$$

其中 $M = \max\{M_1, M_2\sqrt{n}\}$

取定数值 $\sigma > 0$ 足够小以满足不等式

$$\frac{M\sigma}{|\alpha|} \leqslant \frac{1}{4}$$

对于给定的 σ，根据 (1.13) 知：存在 $\rho_0>0$ 使得当 $\|\bar{y}\|<\rho_0$ 时，有估计

$$\|\bar{R}(\bar{y})\|<\sigma\|\bar{y}\| \tag{1.18}$$

最后，取

$$\delta_0=\min\left\{\frac{\rho_0}{4M},\frac{\rho_0}{2}\right\}$$

至此，出现在定理条件中的常数 δ_0、ρ_0 已经选定

假设当 $t=0$ 时，Cauchy 问题 (1.14) 的解 $\bar{y}(t;\bar{y}_0)$ 满足不等式 $\|\bar{y}_0\|<\delta_0$，则 $\|\bar{y}_0\|<\rho_0$，且由于解的连续性，不等式 $\|\bar{y}(t;\bar{y}_0)\|<\rho_0$ 在某个左闭右开区间 $[0,t_1)$ 上成立。$t_1=+\infty$ 的情况仍然有待验证。（反证法）假设相反，对某个有限数 $t_1\in(0,+\infty)$，有：

$$\|\bar{y}(t;\bar{y}_0)\|<\rho_0,\quad \forall t\in[0,t_1),\quad \|\bar{y}(t_1;\bar{y}_0)\|=\rho_0$$

那么由于 (1.18)

$$\left\|\bar{R}\left(\bar{y}(\tau;\bar{y}_0)\right)\right\|\leqslant\sigma\left\|\bar{y}(\tau;\bar{y}_0)\right\|\leqslant\sigma\rho_0,\quad 0\leqslant\tau\leqslant t_1$$

鉴于

$$\|\bar{y}_0\|\leqslant\delta_0\leqslant\frac{\rho_0}{4M}$$

有根据 (1.17)，有

$$\rho_0=\|\bar{y}(t_1;\bar{y}_0)\|\leqslant\frac{\rho_0}{4}e^{\alpha t_1}+M\sigma\rho_0\int_0^{t_1}e^{\alpha(t_1-\tau)}d\tau\leqslant\frac{\rho_0}{4}+\frac{M\sigma\rho_0}{|\alpha|}\left(1-e^{\alpha t_1}\right)\leqslant\frac{\rho_0}{2}$$

因此得到矛盾，定理得证

定理 1.4

假设函数 $f_j(\bar{y}),j=1,\ldots,n$ 在坐标原点的某邻域内二次连续可微

若矩阵 $A:A=(\partial f_i(0,\ldots,0)/\partial y_j)$ 的所有特征值具有负实部：

$$\operatorname{Re}\lambda_k<0,\quad \forall k=1,\ldots,n$$

则系统 (1.11) 的零解在 Lyapunov 的意义下渐近稳定

若矩阵 $A:A=(\partial f_i(0,\ldots,0)/\partial y_j)$ 存在至少一个特征值具有正实部：

$$\exists\lambda\in\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}:\operatorname{Re}\lambda>0$$

则零解在 Lyapunov 的意义下不稳定

证明 （仅限于证明稳定性定理的第一部分）取引理1.4的证明中使用的常数 δ_0 和 ρ_0 并在零解的 δ_0-邻域中任取初始点 $\bar{y}_0$。那么 $\bar{y}(t;\bar{y}_0)$ 是 Cauchy 问题 (1.14) 和相应的积分方程 (1.15) 的解。由于引理1.4中当 $t\geqslant 0$ 时，不等式 $\|\bar{y}(t;\bar{y}_0)\|\leqslant\rho_0$ 成立，并且根据 (1.18) 有估计

$$\left\|\bar{R}\left(\bar{y}(\tau;\bar{y}_0)\right)\right\|<\sigma\left\|\bar{y}(\tau;\bar{y}_0)\right\|,\quad \forall\tau\geqslant 0$$

那么，由于 (1.17)，对一切的 $t\geqslant 0$ 成立不等式：

$$\|\bar{y}(t;\bar{y}_0)\|\leqslant Me^{\alpha t}\|\bar{y}_0\|+M\sigma e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\|\bar{y}(\tau;\bar{y}_0)\|d\tau$$

不等式两侧同时乘以非负函数 $e^{-\alpha t}$，并引入标量函数的记号：

$$u(t)=e^{-\alpha t}\|\bar{y}(t;\bar{y}_0)\|$$

得到不等式

$$0\leqslant u(t)\leqslant M\|\bar{y}_0\|+M\sigma\int_0^t u(\tau)d\tau,\quad t\geqslant 0$$

根据 Gronwall-Bellman 引理，可得

$$u(t)\leqslant M\|\bar{y}_0\|e^{M\sigma t}$$

换回之前的记号，根据比值

$$M\sigma \leqslant \frac{|\alpha|}{4}$$

有

$$\|\bar{y}(t;\bar{y}_0)\| \leqslant M\|\bar{y}_0\| e^{(M\sigma+\alpha)t} \leqslant M\|\bar{y}_0\| e^{3\alpha t/4}$$

由于 α 小于零，因此零解渐近稳定

1.4 借助 Lyapunov 函数研究稳定性（Lyapunov 第二方法）

1.4.1 正定函数

定义 1.5 (正定函数/Положительно определенные функции)

函数 $V(\bar{y}):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称为在集合 $\Omega(\bar{\theta} \in \Omega)$ 上的正定函数，如果满足条件：

1. $V(\bar{y}) \geqslant 0, \forall \bar{y} \in \Omega$
2. $V(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{\theta}$

此外，为了满足函数的确定性，假设集合 Ω 是以原点为中心、半径 $R>0$ 的闭球：

$$\Omega = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}\| \leqslant R\}$$

♣

引理 1.5

假设 $V(\bar{y})$ 是一个在集合 Ω 上的连续且正定函数，那么有：

1. 对任意的 $\varepsilon_1>0$，存在 $\varepsilon_2>0$，使得根据条件 $\bar{y}\in\Omega, \|\bar{y}\| \geqslant \varepsilon_1$ 得到不等式 $V(\bar{y}) \geqslant \varepsilon_2$
2. 对任意的 $\varepsilon_2>0$，存在 $\varepsilon_3>0$，使得根据条件 $\bar{y}\in\Omega, V(\bar{y}) \geqslant \varepsilon_2$ 得到不等式 $\|\bar{y}\| \geqslant \varepsilon_3$

♡

证明 用反证法证明引理

1. 假设第一个命题是错误的。那么存在 $\varepsilon_1>0$，使得对任意的 $\varepsilon_2>0$，存在点 $\bar{y}$ 满足：$(\varepsilon_1 \leqslant \|\bar{y}\| \leqslant R) \wedge (V(\bar{y}) < \varepsilon_2)$。由于 ε_2 的任意性，取序列 $0<\varepsilon_{2k}\to 0$，那么可以找到点列 $\bar{y}_k$，满足 $(\varepsilon_1 \leqslant \|\bar{y}_k\| \leqslant R) \wedge (V(\bar{y}_k) \to 0)$。由于点列 $\bar{y}_k$ 位于有界闭集（Euclid 空间中的紧集）中，根据 Bolzano-Weierstrass 定理可得，其某子列 $\bar{y}_{k_m}$ 收敛：$\bar{y}_{k_m} \to \tilde{y}, \varepsilon_1 \leqslant \|\tilde{y}\| \leqslant R$。由于连续性 $V(\bar{y}_{k_m}) \to V(\tilde{y}) = 0$，因此，又因为函数的正定性，有 $\tilde{y} = \bar{\theta}$。得到矛盾

2. 假设第二个命题是错误的。和上面的推理类似，存在 $\varepsilon_2>0$，使得对某个序列 $0<\varepsilon_{3k}\to 0$，存在点列 $\bar{y}_k$，满足 $(\|\bar{y}_k\| \leqslant \varepsilon_{3k}) \bigvee (V(\bar{y}_k) \geqslant \varepsilon_2)$。根据函数的连续性，有 $V(\bar{y}_k) \to V(0) = 0$，与之前的不等式矛盾

引理的**几何意义**：函数的水平截面 $V(\bar{y}) = \varepsilon_2$ 位于球层中（等高线），内部以球 $\|\bar{y}\| = \varepsilon_3$ 为界，外部以球 $\|\bar{y}\| = \varepsilon_1$ 为界，参考图1.2

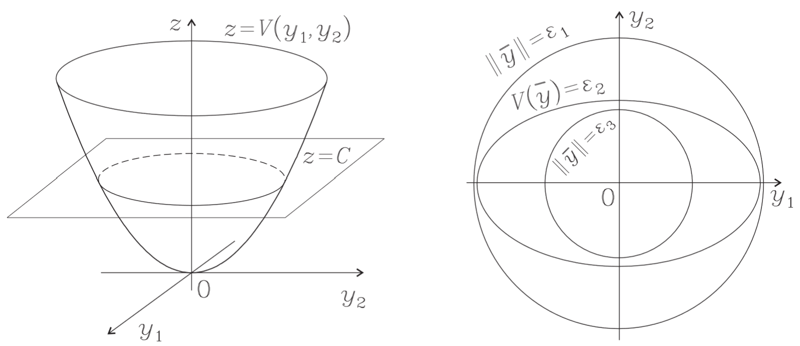


图 1.2: 关于 Chetaev 定理的证明

推论 1.1

若点列 $\bar{y}_k \in \Omega$，那么当 $k \to +\infty$

$$\bar{y}_k \to \bar{\theta} \text{当且仅当} V(\bar{y}_k) \to 0$$

若当 $t \geqslant 0$ 向量函数 $\bar{y}(t) \in \Omega$，那么当 $t \to +\infty$

$$\bar{y}(t) \to \bar{\theta} \text{当且仅当} V(\bar{y}(t)) \to 0$$

♡

已证的命题表明，连续、正定的函数可以用作点 $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ 与坐标原点接近程度的度量，显然范数 $V(\bar{y}) = \|\bar{y}\|$ 是作用在向量函数上的连续、正定算子

1.4.2 Lyapunov 函数

考虑常微分方程正规系统的 Cauchy 问题

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)), \quad \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \in \Omega \tag{1.19}$$

其中 $\bar{f}(t, \bar{y}) = (f_1(t, y_1, \ldots, y_n), f_2(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n))^{\top}$，向量函数的分量 $f_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ 在集合

$$[0; +\infty) \times \Omega$$

上有定义且连续。并且

$$f_j(t, 0, \ldots, 0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad t \geqslant 0$$

显然，系统 (1.19) 有零解 $\bar{y}(t; \bar{\theta}) = \bar{\theta}$

定义 1.6 (Lyapunov 函数)

在区域 Ω 上连续可微且正定的函数 $V(\bar{y})$ 称为系统 (1.19) 的 Lyapunov 函数，若

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}) \leqslant 0, \quad \forall \bar{y} \in \Omega, t \geqslant 0 \tag{1.20}$$

♣

1.4.3 稳定性定理

定理 1.5 (稳定性定理)

假设系统 (1.19) 在集合 Ω 上存在 Lyapunov 函数。那么系统 (1.19) 的零解 $\bar{y}(t; \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ 在 Lyapunov 的意义下稳定

♡

证明 固定任意的 $\varepsilon_1 \in (0, R)$。根据引理1.5，存在 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$，使得一旦不等式 $\|\bar{y}\| \geqslant \varepsilon_1$ 对 $\bar{y} \in \Omega$ 成立，那么

$$V(\bar{y}) \geqslant \varepsilon_2 \tag{1.21}$$

根据函数 $V(\bar{y})$ 在零点的连续性，对于 $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon_2(\varepsilon_1))$，使得从不等式 $\|\bar{y}\| < \delta$，可以推出估计

$$V(\bar{y}) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2} \tag{1.22}$$

不失一般性，可以假设 $\delta \leqslant \varepsilon_1$

考察位于零解 $(\|\bar{y}_0\| < \delta)$ 的 δ-邻域中的任意的初始点 $\bar{y}_0$，并证明当 $t \geqslant 0$ 时，系统 (1.19) 的相应解 $\bar{y}(t) = \bar{y}(t; \bar{y}_0)$ 满足不等式

$$\|\bar{y}(t)\| < \varepsilon_1$$

当 $t = 0$ 时，该不等式成立，$\|\bar{y}(0)\| = \|\bar{y}_0\| < \delta \leqslant \varepsilon_1$，并且根据不等式 (1.22)，有

$$V(\bar{y}(0)) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2} \tag{1.23}$$

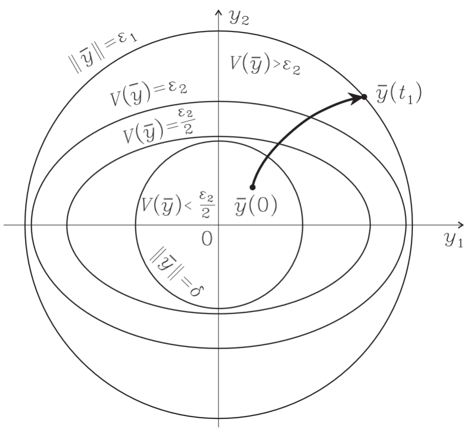


图 1.3: 关于稳定性定理1.5的证明

根据函数的连续性，不等式 $\|\bar{y}(t)\|<\varepsilon_1$ 在某一左闭右开区间上得到满足。若 $t_1=+\infty$，则稳定性得证。然而，如果在某个有限的时刻 $t_1\in(0,+\infty)$，相反的不等式

$$\|\bar{y}\left(t_1\right)\|\geqslant\varepsilon_1,$$

成立。然后根据不等式 (1.21)，得到（参考图1.3）:

$$V\left(\bar{y}\left(t_1\right)\right)\geqslant\varepsilon_2$$

考虑不等式 (1.23)，有

$$V\left(\bar{y}\left(t_1\right)\right)-V(\bar{y}(0))\geqslant\varepsilon_2-\frac{\varepsilon_2}{2}=\frac{\varepsilon_2}{2}>0 \tag{1.24}$$

另一方面，由于 (1.20)

$$\frac{dV(\bar{y}(t))}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V(\bar{y}(t))}{\partial y_j}\frac{dy_j(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V(\bar{y}(t))}{\partial y_j}f_j(t,\bar{y}(t))\leqslant 0,\quad t\in[0,t_1]$$

因此，函数 $V(\bar{y}(t))$ 在闭区间 $[0,t_1]$ 上不增，这与关系式 (1.24) 矛盾

因此，对任意的 $\varepsilon_1>0$，存在 $\delta=\delta\left(\varepsilon_1\right)$，使得从不等式 $\|\bar{y}_0\|<\delta$，可以推出：对一切 $t\geqslant 0$，有估计 $\|\bar{y}\left(t;\bar{y}_0\right)\|<\varepsilon_1$，这表明零解在 Lyapunov 的意义下是稳定的

1.4.4 渐近稳定性定理

定理 1.6 (渐近稳定性定理)

假设系统 (1.19) 在集合 Ω 上存在 Lyapunov 函数 $V(\bar{y})$，满足不等式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j}f_j(t,\bar{y})\leqslant -W(\bar{y}),\quad\forall\bar{y}\in\Omega,\quad t\geqslant 0 \tag{1.25}$$

其中 $W(\bar{y})$ 是某个在集合 Ω 上连续且正定的函数

那么系统 (1.19) 的零解 $\bar{y}(t;\bar{\theta})=\bar{\theta}$ 在 Lyapunov 的意义下是渐近稳定的 ♡

证明 零解在 Lyapunov 意义下的稳定性遵循定理1.5。仍需证明：Cauchy 问题 (1.19) 的解 $\bar{y}(t)=\bar{y}\left(t;\bar{y}_0\right)$ 满足：仅当 $\bar{y}_0$ 在零解的某个邻域中时，有

$$\bar{y}(t)\rightarrow\bar{\theta}\quad\text{当}\quad t\rightarrow+\infty$$

定理1.5的证明意味着相轨 $\bar{y}(t)$ 是有界的，因为其完全位于零解的 ε_1-邻域内。因此，作为自变量的 t 的标

量函数，函数 $V(\bar{y}(t))$ 下有界并且从不等式 (1.25) 得出：不会由于不等式

$$\frac{dV(\bar{y}(t))}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V(\bar{y}(t))}{\partial y_j}f_j(t,\bar{y}(t))\leqslant -W(\bar{y}(t))\leqslant 0$$

而增加。那么存在极限

$$\lim_{t\to+\infty}V(\bar{y}(t))=\alpha\geqslant 0$$

确保 $\alpha=0$。事实上，如果 $\alpha>0$，那么由于不等式 $V(\bar{y}(t))\geqslant\alpha$ 中函数 $V(\bar{y}(t))$ 是非增的，又根据引理1.5第二节得到：对一切的 $t\geqslant 0$，有估计 $\|\bar{y}(t)\|\geqslant\varepsilon_3>0$（其中 $\varepsilon_3=\varepsilon_3(\alpha)$）。将引理1.5第一节的命题应用于正定函数 $W(\bar{y})$，验证不等式 $W(\bar{y}(t))\geqslant\beta$（其中 $\beta=\beta(\varepsilon_3)>0$）对一切的 $t\geqslant 0$ 都成立。那么当 $t\to+\infty$，根据关系式 (1.25) 和 Lagrange 有限增量公式，有：

$$V(\bar{y}(t))-V(\bar{y}(0))=\frac{dV(\bar{y}(\xi))}{dt}t\leqslant -W(\bar{y}(\xi))t\leqslant -\beta t\to-\infty,$$

这与函数 $V(\bar{y})$ 的正定性相矛盾

因此 $V(\bar{y}(t))\to\alpha=0$，并且借助引理1.5的推论，最终验证：当 $t\to+\infty$ 时，$\bar{y}(t)\to\bar{\theta}$

1.4.5 Chetaev 不稳定性定理

定理 1.7 (Chetaev 不稳定性定理) 假设在某个半径 $\varepsilon>0$ 的球 $\Omega_\varepsilon=\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n:\|\bar{y}\|<\varepsilon\}$ 上，存在边界为 $\Gamma_0\cup\Gamma_\varepsilon$ 的区域 $D\subset\Omega_\varepsilon$，其中 $\bar{\theta}\in\Gamma_0$，并且当 $\bar{y}\in\Gamma_\varepsilon$ 时，$\|\bar{y}\|=\varepsilon$。假设函数 $U(\bar{y})$ 在该区域的闭包 $D\cup\Gamma_0\cup\Gamma_\varepsilon$ 上有定义且连续可微，并有下述性质：

1. 当 $\bar{y}\in\Gamma_0$ 时，$U(\bar{y})=0$；当 $\bar{y}\in D$ 时，$U(\bar{y})>0$
2. 对任意的 $\alpha>0$，存在 $\beta=\beta(\alpha)>0$，使得根据条件 $(\bar{y}\in D)\wedge(U(\bar{y})\geqslant\alpha)$，遵循不等式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U(\bar{y})}{\partial y_j}f_j(t,\bar{y})\geqslant\beta,\quad t\geqslant 0$$

那么问题 (1.19) 的零解 $\bar{y}(t;\bar{\theta})=\bar{\theta}$ 在 Lyapunov 的意义下不稳定 ♡

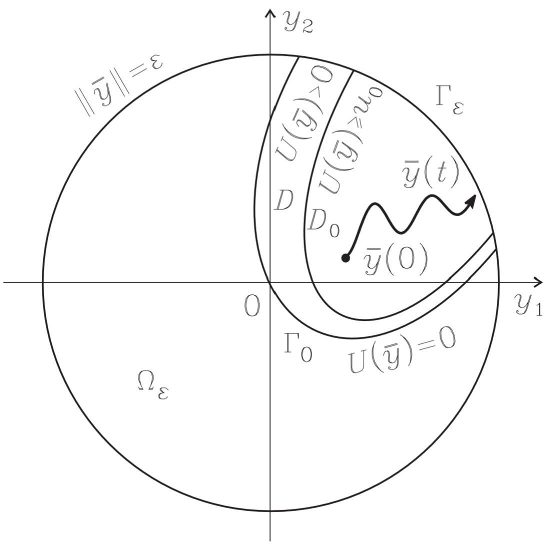


图 1.4: 关于 Chetaev 定理的证明

证明 （反证法）证明相反的情况，即零解在 Lyapunov 的意义下稳定。根据 Lyapunov 的意义下稳定性的定义，对于取自定理条件中的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 Cauchy 问题 (1.19) 的任意解 $\bar{y}(t)=\bar{y}(t;\bar{y}_0)$，当 $t=0$ 时

满足不等式 $\|\bar{y}_0\| < \delta$，对一切的 $t \geqslant 0$ 不等式 $\|\bar{y}(t)\| < \varepsilon$ 成立，即

$$\bar{y}(t) \in \Omega_\varepsilon \tag{1.26}$$

因为 $\bar{\theta} \in \Gamma_0$，可以取 $\bar{y}_0 \in D$，那么 $U(\bar{y}_0) = u_0 > 0$。考虑变量函数 $U(\bar{y}(t))$，有

$$\frac{dU(\bar{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U(\bar{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}(t)) \tag{1.27}$$

因此当 $t = 0$ 时，不等式 $\frac{dU(\bar{y}_0)}{dt} > 0$ 成立

当 $t = 0$ 时，只要从区域 D 出发的轨迹，都保持在该区域中（即 $\bar{y}(t) \in D$）不等式

$$\frac{dU(\bar{y}(t))}{dt} > 0$$

成立。那么函数 $U(\bar{y}(t))$ 递增，因此

$$U(\bar{y}(t)) > U(\bar{y}_0) = u_0 > 0 \tag{1.28}$$

所考虑的轨迹不能通过边界 Γ_0（由于条件 $U|_{\Gamma_0} = 0$）或边界 Γ_ε（由于 (1.26) 式）离开区域 D。因此

$$\bar{y}(t) \in D, \quad t \geqslant 0 \tag{1.29}$$

并且不等式 (1.28) 对一切 $t > 0$ 都成立。有因为函数 $U(\bar{y}(t))$ 的连续性，轨迹不能超出有界闭集 D_0 的边界（如图1.4），其中

$$D_0 = \{\bar{y} \in D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon : U(\bar{y}) \geqslant u_0\}$$

根据定理的条件以及表达式 (1.27)，(1.28) 和 (1.29)，当 $\alpha = u_0$ 时，存在 $\beta_0 > 0$ 使得在轨迹 $\bar{y}(t)$ 的所有点处都满足不等式

$$\frac{dU(\bar{y}(t))}{dt} \geqslant \beta_0$$

在闭区间 $[0, t]$ 上逐项积分，并取 $t \to +\infty$ 时的极限

$$U(\bar{y}(t)) \geqslant U(\bar{y}_0) + \beta_0 t \to +\infty, \quad \bar{y}(t) \in D_0$$

这与连续函数 $U(\bar{y})$ 在有界闭集（Euclid 空间中的紧集）D_0 上的有界性相矛盾。因此原来的假设是错误的，零解在 Lyapunov 意义下的不稳定性即证

1.4.6 奇点的稳定性

点 $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ 称为自治系统

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{y}(t)) \tag{1.30}$$

的奇点 (точка покоя)（平衡位置），若 $\bar{f}(\bar{y}_0) = \bar{\theta}$。因此可以从方程组

$$\begin{cases} f_1(y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ f_2(y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

中解出奇点的坐标

如果 $\bar{y}_0$ 是奇点，则函数 $\bar{y}(t) = \bar{y}_0$ 是系统 (1.30) 的不依赖于变量 t 的解。这样的解在增广相空间 $(t, y_1, \ldots, y_n)$ 中的轨迹是一条直线，而在变量 $(y_1, \ldots, y_n)$ 张成的相空间中的轨线是一个点。如果相应的解 $\bar{y}(t) = \bar{y}_0$ 在 Lyapunov 的意义下稳定、渐近稳定或不稳定，称奇点 $\bar{y}_0$ 在 Lyapunov 的意义下稳定、渐近稳定或不稳定

为了研究奇点的稳定性，可以做变量替换 $\bar{y}(t) = \hat{y}(t) + \bar{y}_0$，将奇点化成新坐标系下的原点，研究变量替换后新系统

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = \bar{F}(\hat{y}(t)), \quad \bar{F}(\hat{y}) = \bar{f}(\hat{y} + \bar{y}_0)$$

零解的稳定性。为了应用定理1.4，计算 $A=(a_{ij})$ 的导数矩阵的元素：

$$a_{ij}=\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,\ldots,0)=\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{y}_0)$$

结果，得到关于在任意奇点（不一定是零点）处，系统的一阶线性近似稳定性的命题陈述

定理 1.8

假设 $\bar{y}_0$ 式系统 (1.30) 的奇点（稳定点、不动点），函数 $f_j(\bar{y})$ 在初值点 $\bar{y}_0, j=1,\ldots,n$ 的某一邻域内二阶连续可微

如果矩阵 $A: A=(\partial f_i(\bar{y}_0)/\partial y_j)$ 的所有特征值都有负实部：

$$\operatorname{Re}\lambda_k<0,\quad \forall k=1,\ldots,n,$$

则奇点 $\bar{y}_0$ 在 Lyapunov 的意义下渐进稳定

如果矩阵 $A: A=(\partial f_i(\bar{y}_0)/\partial y_j)$ 的至少一个特征值具有正实部：

$$\exists\lambda\in\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}:\operatorname{Re}\lambda>0,$$

则奇点 $\bar{y}_0$ 在 Lyapunov 的意义下不稳定 ♡

1.5 平面动力系统奇点（稳定点）的分类

借助上面证明的定理1.1-1.3，可以研究常系数线性系统在奇点的稳定性，并解答从奇点点的邻域出发的轨迹随自变量推移会有什么的情况：当 $t\to+\infty$ 时，是否保持在这个邻域中；或者是否在有限的时间内离开奇点的邻域。同时有必要弄清楚奇点附近的相轨的特征，如果可能的话，还要弄清楚邻域之外的相轨特征。本节仅针对平面上线性动力系统（$n=2$）的奇点进行拓扑分类

1.5.1 线性系统奇点的分类

考虑关于向量函数 $\bar{y}(t)=(y_1(t),y_2(t))^\top$ 的具有常实系数的线性齐次系统

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=A\bar{y},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\tag{1.31}$$

接下来研究位于相空间（即坐标平面 (y_1,y_2)）上的相位轨迹。注意，该系统的相位轨迹是从系统 (1.31) 中消去变量 t 后，得到的常微分方程的积分曲线

$$\frac{dy_1}{dy_2}=\frac{a_{11}y_1+a_{12}y_2}{a_{21}y_1+a_{22}y_2}\tag{1.32}$$

稳定点 $(0,0)$ 相对于方程 (1.32) 来说是奇点，因为该点处违背了 Cauchy 问题解的存在与唯一性定理的条件。因此既可以存在几条相位曲线通过点 $(0,0)$，也可以没有一条相位曲线通过该点。因此，原系统 (1.31) 的稳定点（奇点）$(0,0)$ 是方程 (1.32) 在相变量下的奇点

根据矩阵 A 的特征值与特征向量的特性对稳定点（奇点）进行分类。理论分析仅考虑变量个数 $n=2$ 的平面动力系统的情况：此时矩阵 A 有两个特征值 λ_1,λ_2。若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则对应的特征向量

$$\bar{h}_1=\begin{pmatrix}h_{11}\\h_{21}\end{pmatrix},\quad \bar{h}_2=\begin{pmatrix}h_{12}\\h_{22}\end{pmatrix}$$

线性无关并构成空间 $\mathbb{C}^2$ 中的一个基；若 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，可能存在两个或一个线性无关的特征向量，而在后一种情况下，存在一个与特征向量线性无关的关联向量。接下来考虑非退化系数矩阵 $A:(\det A\neq0)$ 的情况下奇点的类型

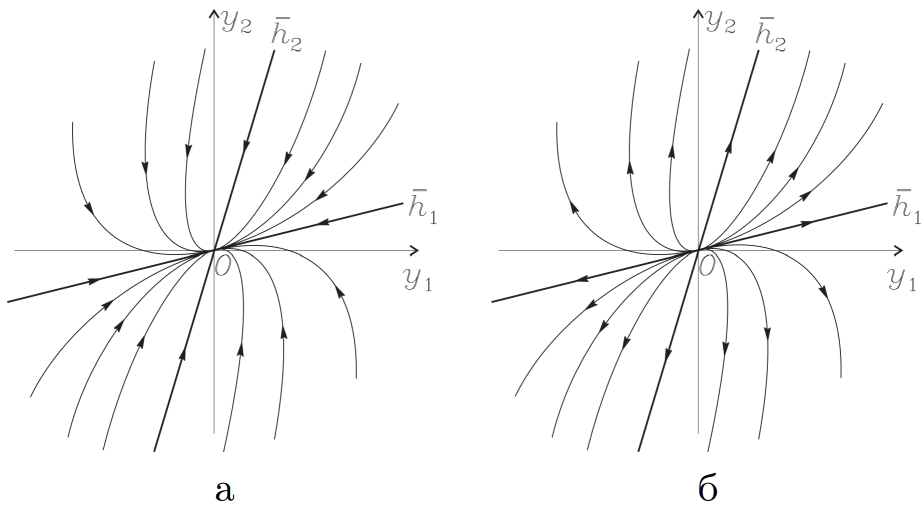


图 1.5: 结点 (узел)：а-稳定，б-不稳定

1.5.2 结点/узел：$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

系统 (1.31) 通解的形式：

$$\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{1.33}$$

先考虑特征值小于零的情况：$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$。此时零奇点在的意义下渐近稳定，称为**稳定结点 (устойчивый узел)**。当 $t \to +\infty$ 时，相轨线趋向稳定结点（$\bar{y}(t) \to \bar{\theta}$）。计算相轨线经过结点的方向，为此先计算导数

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{12} \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 h_{21} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{22} \lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1 h_{11} \lambda_1 + C_2 h_{12} \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{C_1 h_{21} \lambda_1 + C_2 h_{22} \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}} \tag{1.34}$$

由于 $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$，则当 $C_1 \neq 0$ 时，$t \to +\infty$ 有 $\frac{dy_1}{dy_2} \to \frac{h_{11}}{h_{21}}$ 。即相轨线的切向量在极限情况下与特征向量 $\bar{h}_1$ 共线。如果 $C_1 = 0$，则

$$\bar{y}(t) = C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

这意味着相轨线位于由特征向量 $\bar{h}_2$ 张成的直线上，并且当 $t \to +\infty$ 时逼近奇点

计算当 $t \to -\infty$ 相轨线的方向。在这种情况下，奇点以外的相轨迹都趋向于无穷远点。由于公式 (1.33)，当 $C_2 \neq 0$ 时，有

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11} \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 h_{12} \lambda_2}{C_1 h_{21} \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 h_{22} \lambda_2} \to \frac{h_{12}}{h_{22}}, \quad t \to -\infty, \quad (\lambda_1 - \lambda_2 > 0)$$

也就是说，在无穷远点附近，相轨线与向量 $\bar{h}_2$ 平行。如果 $C_2 = 0$，则

$$\bar{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

相轨线位于由特征向量 $\bar{h}_1$ 张成的直线上。计算结果如图1.5所示，描述了在稳定结点情况下的相轨线，轨线上的箭头表示随着时间 t 增加的运动方向

对于正特征值 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$，奇点称为不稳定结点，相轨的位置和形式与负特征值的情况保持相同，但沿轨迹的运动方向相反

结点规则：相轨线进入结点时，与绝对值最小的特征值对应的特征向量所张成的直线相切

1.5.3 临界（星形）结点/дикритический узел：$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0, \dim\ker(A - \lambda_1 E) = 2$

临界（星形）结点的情况：矩阵 A 的两个特征值相等 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$，其对应的两个特征向量 $\bar{h}_1$ 与 $\bar{h}_2$ 线性无关（二维特征空间）。那么通解公式 (1.33) 的形式为

$$\bar{y}(t) = \left(C_1\bar{h}_1 + C_2\bar{h}_2\right)e^{\lambda t}$$

并在相平面 (y_1, y_2) 上定义所有可能的轨线的集合，如果 $t \to +\infty$，当 $\lambda < 0$ 时，进入奇点（稳定的星形结点）；

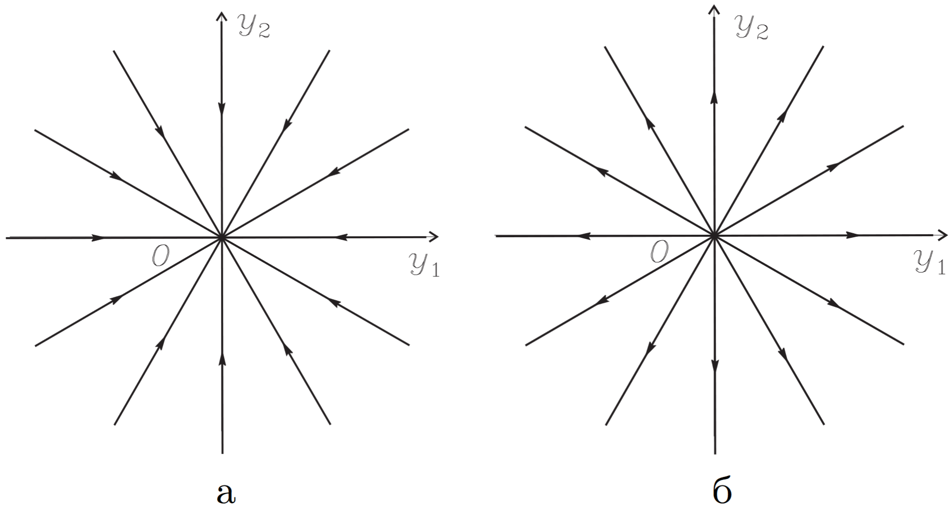


图 1.6: 星形结点 (дикритический узел)：а-稳定，б-不稳定

当 $\lambda > 0$ 时，远离奇点（不稳定的星形结点），如图1.6

1.5.4 退化节点/вырожденный узел：$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0, \dim\ker(A - \lambda_1 E) = 1$

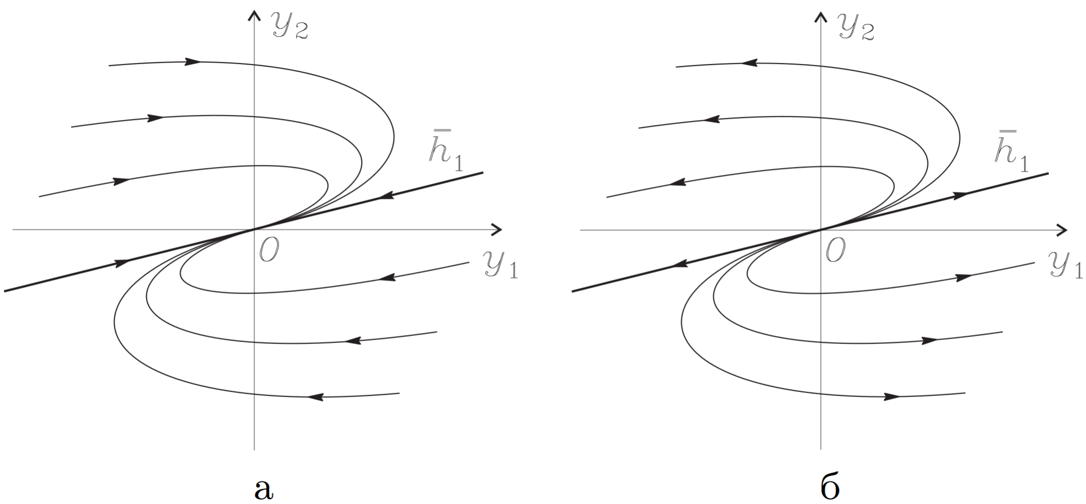


图 1.7: 退化结点 (вырожденный узел)：а-稳定，б-不稳定

当 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ 时，退化节点稳定；当 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ 时，退化节点不稳定。在退化节点的情况下，矩阵 A 的两个特征值相等 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$，对应一个线性无关的特征向量 $\bar{h}_1$ 和一个关联向量 (присоединенный вектор)$\bar{p}_1$（一维特征空间）。系统 (1.31) 的通解形式为

$$\bar{y}(t) = C_1\bar{h}_1 e^{\lambda t} + C_2\left(\bar{p}_1 + t\bar{h}_1\right)e^{\lambda t}$$

如果 $C_2=0$，则解 $\bar{y}(t)=C_1\bar{h}_1e^{\lambda t}$ 的相轨线由两段轨线组成。当 $t\to+\infty$ 时，若 $\lambda<0$，轨线沿着特征向量的方向进入奇点；若 $\lambda>0$，轨线沿着特征向量的方向远离奇点。如果 $C_2\neq 0$,，则

$$\bar{y}(t)=te^{\lambda t}\left(C_2\bar{h}_1+\bar{o}(1)\right),\quad t\to+\infty$$

可以看出，当 $(t\to+\infty)\wedge(\lambda<0)$ 或当 $(t\to-\infty)\wedge(\lambda>0)$ 时，解与特征向量相切。当 $(t\to+\infty)\wedge(\lambda<0)$ 或当 $(t\to-\infty)\wedge(\lambda>0)$ 时，在无穷远点相轨线再次沿着特征向量的方向平行，但由于因子 t 的符号变化，轨线方向相反。退化结点的典型相轨迹图像如图1.7

1.5.5 鞍点/седло：$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\lambda_2<0<\lambda_1$

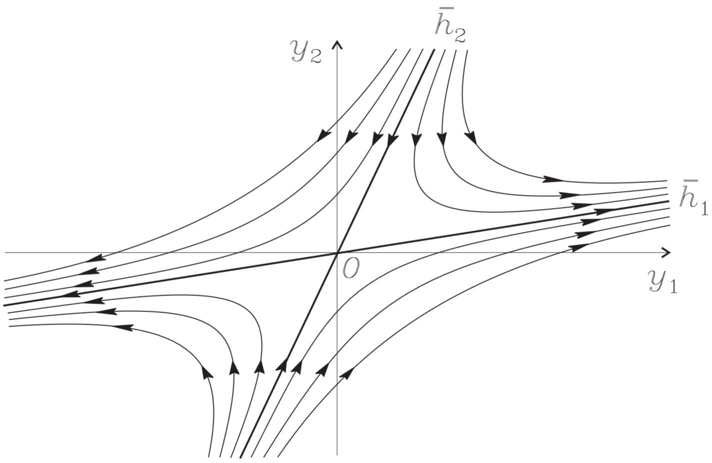


图 1.8: 鞍点 (седло)

显然，根据特征值正负性可知鞍点是不稳定奇点。接下来借助公式 (1.33) 分析轨线的行为特征。$C_1\neq 0$，当 $t\to+\infty$ 时，得到表达式

$$\bar{y}(t)=e^{\lambda_1 t}\left(C_1\begin{pmatrix}h_{11}\\h_{21}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}h_{12}\\h_{22}\end{pmatrix}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)=e^{\lambda_1 t}\left(C_1\begin{pmatrix}h_{11}\\h_{21}\end{pmatrix}+\bar{o}(1)\right)$$

除此之外，从 (1.34) 式中容易看出：$\frac{dy_1}{dy_2}\to\frac{h_{11}}{h_{21}}$，即当 $t\to+\infty$ 时，相轨线沿着由特征向量 $\bar{h}_1$ 张成的渐近线趋向于无穷远点。若 $C_1=0$，则 $\bar{y}(t)=C_2\bar{h}_2e^{\lambda_2 t}$，且相轨线位于由特征向量 $\bar{h}_2$ 张成的直线上，当 $t\to+\infty$ 时，趋向奇点

对于 $t\to-\infty$，图像相反：当 $C_2\neq 0$ 时，相轨线沿着由特征向量 $\bar{h}_2$ 张成的渐近线趋向于无穷远点。若 $C_2=0$，则 $\bar{y}(t)=C_1\bar{h}_1e^{\lambda_1 t}$，且相轨线位于由特征向量 $\bar{h}_1$ 张成的直线上，当 $t\to-\infty$ 趋向于奇点。参考图1.8

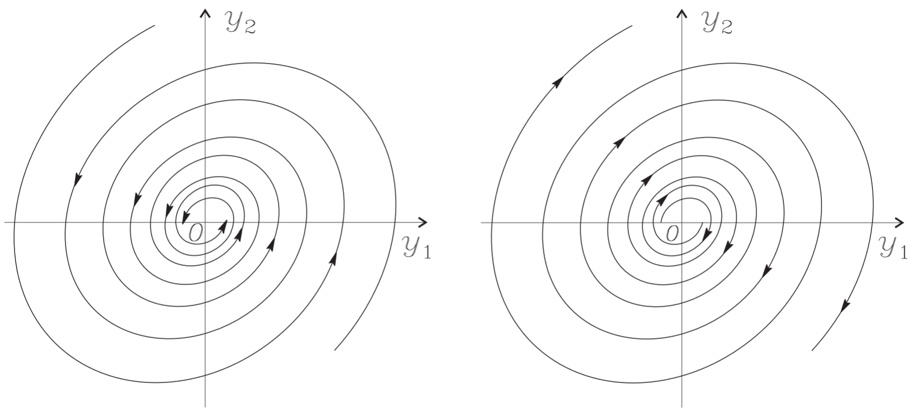
1.5.6 焦点/фокус：$\lambda_{1,2}=\delta\pm i\omega\in\mathbb{C},\omega\neq 0,\delta\neq 0$

奇点称为**焦点**，若矩阵 A 存在具有非零的实和虚部的复共轭特征值 假设 $\bar{h}=\bar{h}_1+i\bar{h}_2$ 是对应于特征值 $\lambda_1=\delta+i\omega$ 的特征向量，其中 $\bar{h}_{1,2}$ 线性无关。那么复值向量函数 $\bar{z}(t)=\bar{h}\exp\{\lambda_1 t\}$ 的实部和虚部构成了系统的实基本解组：

$$\bar{y}_1(t)=\operatorname{Re}\bar{z}(t)=e^{\delta t}\left(\bar{h}_1\cos\omega t-\bar{h}_2\sin\omega t\right)$$
$$\bar{y}_2(t)=\operatorname{Im}\bar{z}(t)=e^{\delta t}\left(\bar{h}_1\sin\omega t+\bar{h}_2\cos\omega t\right)$$

因此，实通解形如：

$$\begin{aligned}\bar{y}(t)&=C_1\bar{y}_1(t)+C_2\bar{y}_2(t)=\\&=e^{\delta t}\left(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t\right)\bar{h}_1+e^{\delta t}\left(C_2\cos\omega t-C_1\sin\omega t\right)\bar{h}_2\end{aligned}$$



а　　　　　　　　б

图 1.9: 焦点 (фокус)：а-稳定，б-不稳定

记 $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \neq 0$ 并且从条件

$$\sin\psi = \frac{C_1}{C}, \quad \cos\psi = \frac{C_2}{C}$$

中引入辅助角 ψ。然后根据由向量 $\bar{h}_1$ 和 $\bar{h}_2$ 组成的基得到解 $\bar{y}$ 的分解式：

$$\bar{y}(t) = \xi_1(t)\bar{h}_1 + \xi_2(t)\bar{h}_2$$

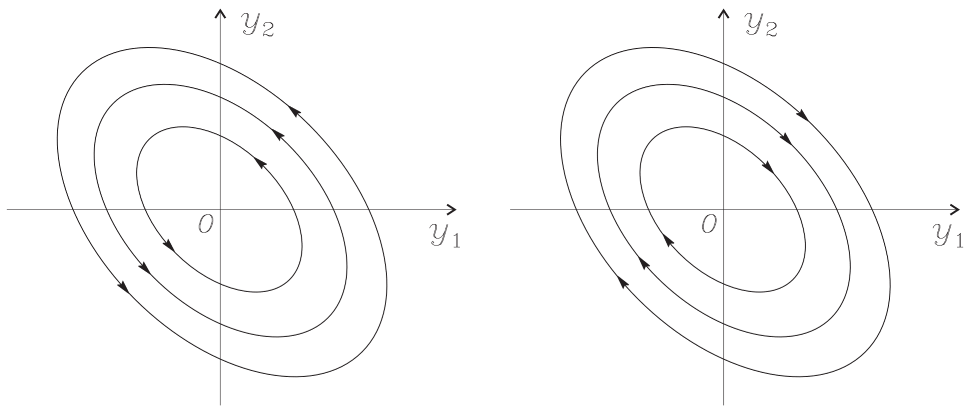
分解的组合系数由关系式

$$\xi_1(t) = Ce^{\delta t}\sin(\omega t + \psi), \quad \xi_2(t) = Ce^{\delta t}\cos(\omega t + \psi)$$

确定。解给出了对数螺旋线：在 $t \to +\infty$ 的情况下，当 $\delta < 0$ 时，轨线向焦点卷缩（稳定焦点，$\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t) \to 0$）；当 $\delta > 0$ 时轨线发散远离焦点（不稳定焦点，$\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) \to +\infty$）。如图1.9，展示了奇点为焦点的情况下，相轨线的特征行为

1.5.7 中心/центр：$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \in \mathbb{C}, \omega \neq 0$

奇点称为**中心**，如果矩阵 A 仅存在纯虚复共轭特征值 因此，中心是稳定的奇点，但不渐近稳定。借助具有实



а　　　　　　　　б

图 1.10: 中心 (центр)

线性无关组分 $\bar{h}_1$ 和 $\bar{h}_2$ 的复值特征向量 $\bar{h} = \bar{h}_1 + i\bar{h}_2$，类似于焦点的情况，将通解分解成 $\bar{y}(t) = \xi_1(t)\bar{h}_1 + \xi_2(t)\bar{h}_2$，其中系数

$$\xi_1(t) = C\sin(\omega t + \psi), \quad \xi_2(t) = C\cos(\omega t + \psi),$$

满足等式 $\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)=C^2$。系数向量 $(\xi_1(t),\xi_2(t))$ 描述了沿圆的周期性运动，在一般情况下原始坐标系下对应在椭圆上的运动，如图1.10

1.5.8 矩阵 A 退化的情况：$\det A=0$

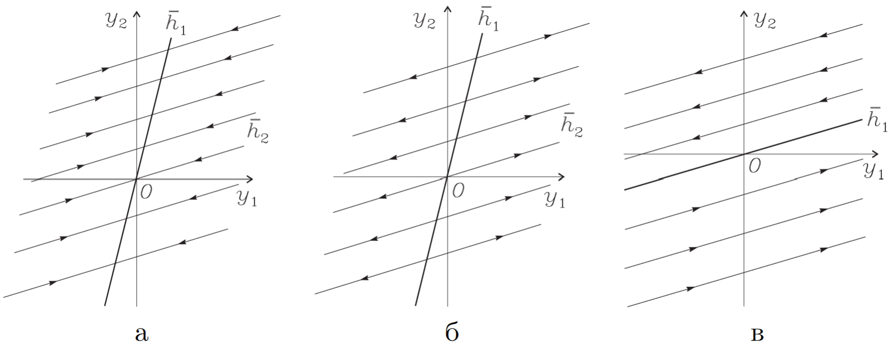


图 1.11: 退化矩阵情况

二级退化矩阵有一个或两个特征值等于零，考虑这两种情况

假设 $\lambda_1=0,\lambda_2\neq 0$ 并且 $\bar{h}_1,\bar{h}_2$ 是对应的线性无关的特征向量，那么通解形如：

$$\bar{y}(t)=C_1\bar{h}_1+C_2\bar{h}_2e^{\lambda_2 t}$$

通过坐标原点、平行于向量 $\bar{h}_1$ 的整条直线由奇点组成。从平面的剩余点开始，沿着与第二个特征向量 $\bar{h}_2$ 平行的直线运动，在 $\lambda_2<0$ 的情况下，当 $t\to+\infty$ 时趋近奇点，或在 $\lambda_2>0$ 的情况下，当 $t\to-\infty$ 时也趋近奇点。相轨线的特征如图1.11а 和1.11б

假设 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 且 $\dim\ker A=2$，则存在两个线性无关的特征向量 $\bar{h}_1$ 和 $\bar{h}_2$，那么矩阵 A 是零矩阵，通解 (1.31) 形如：

$$\bar{y}(t)=C_1\bar{h}_1+C_2\bar{h}_2$$

在这种情况下，平面上所有点都是奇点

假设 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 且 $\dim\ker A=1$，则只有一个线性无关的特征向量 $\bar{h}$。那么存在一个对应的关联向量 $\bar{p}$。通解 (1.31) 形如：

$$\bar{y}(t)=C_1\bar{h}+C_2(\bar{p}+t\bar{h})=(C_1+C_2t)\,\bar{h}+C_2\bar{p}$$

通过坐标原点且平行于特征向量 $\bar{h}$ 的整条直线都由不稳定奇点组成。从平面的剩余点开始，沿着平行于特征向量 $\bar{h}$ 的直线运动，其中运动方向在对应于 $C_2>0$ 和 $C_2<0$ 的半平面上相反。相轨线的特征如图1.11в

1.5.9 非线性系统奇点的分类

自治系统

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt}=\bar{f}(\bar{y}(t))\tag{1.35}$$

的奇点 $\bar{y}_0\in\mathbb{R}^n$ 是粗糙的 (грубая)，如果矩阵导数

$$A=(a_{ij})\,,\quad a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{y}_0)\,,\quad i,j=1,\ldots,n\tag{1.36}$$

恰好有 n 个实部非零的成对不同的特征值。根据定理1.8，粗糙奇点在 Lyapunov 意义下的稳定性总是借助 Lyapunov 第一方法唯一确定。事实证明，系统 (1.35) 的相轨线在每一个粗糙奇点的小邻域内的定性行为可以借助线性系统得到充分的描述（线性整流）

$$\frac{d\widehat{y}(t)}{dt}=A\widehat{y}(t)\tag{1.37}$$

在平面 ($n = 2$) 上，粗糙奇点对应于形式为 (1.37) 的线性系统，仅具有以下形式之一的零奇点：结点、鞍点或焦点。将非线性系统的粗糙奇点称为结点、鞍点或焦点，如果此类型具有对应于带矩阵 (1.36) 的线性系统 (1.37) 的零奇点

第 2 章 二阶微分方程的边值问题

2.1 Green 函数 (функция Грина) 与边值问题解的存在性

考察边值问题

$$Ly \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2.1}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \tag{2.2}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \tag{2.3}$$

其中 $p(x), q(x), f(x)$ 是已知的函数,而 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 是已知常数,使得 $p(x) \in C^1[0,l], p(x) > 0, x \in [0,l], q(x), f(x) \in C[0,l], \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1, 2$

定义 2.1

函数 $y(x)$ 称为边值问题 (2.1)-(2.3) 的解,若 $y(x) \in C^2[0,l]$ 并且满足表达式 (2.1)-(2.3)

2.1.1 Green 函数

引入 Green 函数,用来求解边值问题 (2.1)-(2.3)

定义 2.2 (Green 函数)

函数 $G(x,\xi)$ 称为二阶常微分方程边值问题 (2.1)-(2.3) 的 Green 函数,如果其在矩形方块 $[0,l] \times [0,l]$ 上有定义,并满足条件:

1) 对任意的 $\xi \in (0,l)$,函数 $G(x,\xi)$ 在集合 $[0,\xi) \cup (\xi,l]$ 上关于变量 x 二次连续可微 (即 $G(x,\xi) \in C^2([0,\xi) \cup (\xi,l])$),并满足齐次方程:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) - q(x)G(x,\xi) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad x \neq \xi$$

2) 函数 $G(x,\xi)$ 满足关于变量 x 的齐次边值条件:

$$\alpha_1 G_x(0,\xi) + \beta_1 G(0,\xi) = 0, \quad \alpha_2 G_x(l,\xi) + \beta_2 G(l,\xi) = 0, \quad \forall \xi \in (0,l)$$

3) 函数 $G(x,\xi)$ 在矩形方块 $[0,l] \times [0,l]$ 内连续,而当 $x = \xi$ 时,偏导数 $G_x(x,\xi)$ 有有限的极限值:

$$G_x(\xi+0,\xi) = \lim_{x\to\xi+0} G_x(x,\xi), \quad G_x(\xi-0,\xi) = \lim_{x\to\xi-0} G_x(x,\xi)$$

满足关系式

$$G_x(\xi+0,\xi) - G_x(\xi-0,\xi) = \frac{1}{p(\xi)}, \quad \forall \xi \in (0,l)$$

2.1.2 Green 函数的存在与唯一性

定理 2.1 (Green 函数的存在与唯一性)

若齐次边值问题

$$Lv = 0, \quad \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0, \quad \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0 \tag{2.4}$$

只有零解,则边值问题 (2.1)-(2.3) 的 Green 函数存在且唯一

证明 定义函数 $y_1(x)$ 为 Cauchy 问题

$$Ly_1 = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad y_1(0) = -\alpha_1, \quad y_1'(0) = \beta_1$$

的解，而函数 $y_2(x)$ 为 Cauchy 问题

$$Ly_2 = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad y_2(l) = -\alpha_2, \quad y_2'(l) = \beta_2$$

的解。显然，函数 $y_1(x)$ 满足边值条件 (2.2)，而函数 $y_2(x)$ 满足边值条件 (2.3):

$$\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0, \quad \alpha_2 y_2'(l) + \beta_2 y_2(l) = 0 \tag{2.5}$$

函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性无关，否则齐次边值问题将有非零解

求形如

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1(\xi)y_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ c_2(\xi)y_2(x), & \xi \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

的 Green 函数，其中 $c_1(\xi)$ 和 $c_2(\xi)$ 是未知函数。从该表达式中可以得出，函数 $G(x,\xi)$ 满足 Green 函数定义条件的 1) 和 2)。选择合适的函数 $c_1(\xi)$ 和 $c_2(\xi)$ 使得条件 3) 也得到满足。根据 $G(x,\xi)$ 在点 $x = \xi$ 处的连续性，可以得出:

$$c_1(\xi)y_1(\xi) = c_2(\xi)y_2(\xi)$$

根据 $G_x(x,\xi)$ 的导数在点 $x = \xi$ 处不连续的条件，有:

$$c_2(\xi)y_2'(\xi) - c_1(\xi)y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}$$

因此，得到了关于未知函数 $c_1(\xi)$ 与 $c_2(\xi)$ 的两个方程的系统，求解该系统，得到:

$$c_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}, \quad c_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}$$

其中 $W(\xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)$ 是 Wronsky 行列式。根据公式 (??) 可知，$W(\xi)p(\xi) = g_0$ 是已知常数。结果得到 Green 函数的最终形式:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{2.6}$$

已证 Green 函数的存在性，现证 Green 函数的唯一性。（反证法）假设存在两个 Green 函数: $G(x,\xi)$ 和 $\widehat{G}(x,\xi)$。令 ξ 是开区间 $(0,l)$ 中任意取定的不动点。考虑函数 $z(x) = G(x,\xi) - \widehat{G}(x,\xi)$。该函数在闭区间 $[0,l]$ 上连续，并在该区间上有连续的导数 $z'(x)$，因为函数 $G_x(x,\xi)$ 和 $\widehat{G}_x(x,\xi)$ 在点 $x = \xi$ 处具有相同的间断性。从等式 $Lz = 0, x \neq \xi$ 中可以进一步得出表达式

$$z''(x) = \frac{q(x)z(x) - p'(x)z'(x)}{p(x)}$$

由于当 $x \to \xi \pm 0$ 时极限值相等，验证二阶导数在 $x = \xi$ 处的连续性。那么函数 $z(x)$ 也是当 $x = \xi$ 时方程

$$Lz = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

的解，并且满足条件 (2.2)，(2.3) 根据定理的条件，在区间 $[0,l]$ 上的齐次边值问题只有平凡解 (тривиальное решение)。因此 $z(x) = 0$，意味着 $G(x,\xi) = \widehat{G}(x,\xi)$，定理得证

2.1.3 使用 Green 函数求非齐次边值问题的解

证明边值问题 (2.1)-(2.3) 解的存在与唯一性定理

定理 2.2

若齐次边值问题 (2.4) 只有零解，则边值问题 (2.1)-(2.3) 的解存在且唯一，并由公式

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2.7}$$

给出

证明 证明由公式 (2.7) 定义的函数 $y(x)$ 是边值问题 (2.1)-(2.3) 的解

由 Green 函数的公式 (2.6)，可得

$$y(x)=\frac{y_2(x)}{g_0}\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{y_1(x)}{g_0}\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.8}$$

在对同类项进行微分和化简后，有

$$y'(x)=\frac{y_2'(x)}{g_0}\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{y_1'(x)}{g_0}\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.9}$$

计算

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)&=\frac{\left(y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\right)p(x)}{g_0}f(x)+\\&+\frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_2}{dx}\right)\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right)\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi\end{aligned}$$

因为 $Ly_1=Ly_2=0$，而 $\left(y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\right)p(x)=g_0$，则

$$\begin{aligned}Ly&=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y(x)=\\&=f(x)+\frac{Ly_2}{g_0}\int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi+\frac{Ly_1}{g_0}\int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi=f(x)\end{aligned}$$

因此，函数 $y(x)$ 是方程 (2.1) 的解

验证边值条件 (2.2)，(2.3) 是否得到满足。根据公式 (2.8)，(2.9) 和 (2.5)，可以推出

$$\alpha_1y'(0)+\beta_1y(0)=\frac{\alpha_1y_1'(0)+\beta_1y_1(0)}{g_0}\int_0^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi=0$$

类似地验证等式 (2.3)

证明所得到的解的唯一性：假设边值问题 (2.1)-(2.3) 还有另一个解 $\widetilde{y}(x)$，那么两个解的差值 $v(x)=y(x)-\widetilde{y}(x)$ 将是闭区间 $[0,l]$ 上齐次边值问题 (2.4) 的解，由定理的条件可知，值为零 $y(x)-\widetilde{y}(x)\equiv 0$，两个解相等 (即解唯一)，定理得证

2.1.4 Green 函数在非线性微分方程中的应用

应用 Green 函数证明非线性微分方程边值问题解的存在与唯一性

考虑边值问题

$$y''(x)+a^2y(x)=F(x,y(x)),\quad 0\leqslant x\leqslant l \tag{2.10}$$

$$y(0)=y(l)=0 \tag{2.11}$$

定理 2.3

假设函数 $F(x,y)$ 当 $x\in[0,l]$ 时有定义且连续，并且关于变量 y 满足 Lipschitz 条件：

$$\left|F\left(x,y_1\right)-F\left(x,y_2\right)\right|\leqslant L\left|y_1-y_2\right|,\quad \forall x\in[0,l],\quad y_1,y_2\in\mathbb{R}$$

若 $lL(a|\sin al|)^{-1}<1$，则边值问题 (2.10)，(2.11) 的解存在且唯一

♡

证明 设函数 $y(x)$ 是边值问题 (2.10)，(2.11) 的解。引入新函数 $f(x)=F(x,y(x))$。那么函数 $y(x)$ 是边值问题

$$\begin{aligned}&y''(x)+a^2y(x)=f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\\&y(0)=0,\quad y(l)=0\end{aligned}$$

的解。求解该边值问题的 Green 函数形如 (??)。应用 Green 函数，可得

$$y(x)=\int_0^l G_a(x,\xi)f(\xi)d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant l$$

考虑到函数 $f(x)$ 的定义，有

$$y(x)=\int_0^l G_a(x,\xi)F(\xi,y(\xi))d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant l \tag{2.12}$$

因此，已经证明，若函数 $y(x)$ 是边值问题 (2.10)，(2.11) 的解，则其为积分方程 (2.12) 的解

反之亦然。假设函数 $y(x)$ 在闭区间 $[0,l]$ 上连续，并且是积分方程 (2.12) 的解。由公式 (??)，(2.12) 可知，函数 $y(x)$ 满足边值条件 (2.11)。将方程 (2.12) 微分两次并将 $y(x)$ 和 $y''(x)$ 代入方程 (2.10)，易证函数 $y(x)$ 是该方程的解。因此，积分方程 (2.12) 的连续解是边值问题 (2.10)，(2.11) 的解。因此，边值问题 (2.10)，(2.11) 等价于积分方程 (2.12) 得证

证明积分方程 (2.12) 在闭区间 $[0,l]$ 上连续解的存在性。考虑函数序列 $y_0(x)=0$，

$$y_{n+1}(x)=\int_0^l G_a(x,\xi)F\left(\xi,y_n(\xi)\right)d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.13}$$

函数列的所有函数 $y_n(x)$ 都在闭区间 $[0,l]$ 上有定义且连续

证明，有估计

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant M\left(\frac{lL}{a|\sin al|}\right)^n,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.14}$$

其中

$$M=\max_{0\leqslant x\leqslant l}|y_1(x)|=\max_{0\leqslant x\leqslant l}\left|\int_0^l G_a(x,\xi)F(\xi,0)d\xi\right|$$

事实上，当 $n=0$ 时估计式成立。假设当 $n=m-1$ 时，不等式成立，证明当 $n=m$ 时不等式也成立。估计 $|y_{m+1}(x)-y_m(x)|$，因为

$$|G_a(x,\xi)|\leqslant(a|\sin al|)^{-1},\quad 0\leqslant x,\xi\leqslant l$$

则

$$|y_{m+1}(x)-y_m(x)|\leqslant\int_0^l|G_a(x,\xi)|\left|F\left(\xi,y_m(\xi)\right)-F\left(\xi,y_{m-1}(\xi)\right)\right|d\xi\leqslant$$
$$\leqslant\frac{L}{a|\sin al|}\int_0^l|y_m(\xi)-y_{m-1}(\xi)|\,d\xi\leqslant M\left(\frac{lL}{a|\sin al|}\right)^m,\quad 0\leqslant x\leqslant l$$

因此，估计式 (2.14) 由数学归纳法得证

因为

$$y_k(t)=\sum_{n=1}^{k}\left(y_n(t)-y_{n-1}(t)\right)$$

则函数序列 $y_k(t)$ 在闭区间 $[0,l]$ 上的一致收敛等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(y_n(t)-y_{n-1}(t)\right)$$

的一致收敛。根据估计式 (2.14) 和 Weierstrass 强函数判别法可知，该级数在闭区间 $[0,l]$ 上一致收敛。因此，函数序列 $y_k(x)$ 也在闭区间 $[0,l]$ 上一致收敛到某一函数 $y(x)$。由于所有函数 $y_k(t)$ 都连续，因此函数 $y(x)$ 在闭区间 $[0,l]$ 上也是连续的。将公式 (2.13) 对 n 趋向于无穷大取极限，可得，函数 $y(x)$ 是方程 (2.12) 的解。因此，其为边值问题 (2.10)，(2.11) 的解

接下来证明边值问题 (2.10)，(2.11) 解的唯一性。为此只需要证明积分方程 (2.12) 有唯一的连续解即可。(反证法）假设情况并非如此，即存在两个连续函数 $y_1(x),y_2(x)$ 都是方程 (2.12) 的解。估计二者的差值，那么有

$$y_1(x)-y_2(x)=\int_0^l G_a(x,\xi)\left[F\left(\xi,y_1(\xi)\right)-F\left(\xi,y_2(\xi)\right)\right]d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant l$$

借助 Lipschitz 条件并对 Green 函数 $G_a(x,\xi)$ 使用估计，可得

$$|y_1(x)-y_2(x)|\leqslant\int_0^l|G_a(x,\xi)|\,L\mid y_1(\xi)\Big)-y_2(\xi)\mid d\xi<$$
$$<\max_{0\leqslant x\leqslant l}|y_1(x)-y_2(x)|,\quad 0\leqslant x\leqslant l$$

该不等式意味着 $y_1(x)=y_2(x)$。因此边值问题的解是唯一的，定理得证

2.2 Sturm-Liouville 问题

考虑边值问题

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2.15}$$

定理 2.4 ()

Sturm-Liouville 问题的所有特征函数和特征值都是实数 ♡

证明

定理 2.5 ()

每个特征值只对应一个特征函数（不会对应超过两个线性无关的特征函数） ♡

证明

引入函数的标量内积

定义 2.3 (函数内积)

函数 $v(x)$ 与 $w(x)$ 的标量（内）积

$$(v, w) = \int_0^l v(x)w(x)dx$$

♣

定义 2.4

函数 $v(x)$ 与 $w(x)$ 是正交的，若其标量积等于零，即 $(v, w) = 0$ ♣

定理 2.6 (特征函数的正交性)

不同特征值对应的特征函数是彼此正交的 ♡

证明 假设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为不同的特征值，$y_1(x), y_2(x)$ 为其对应的特征函数。由于 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 满足边值条件 (??), (??)，则由 Green 公式

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2 -$ различные собственные значения, а $y_1(x), y_2(x)$ - соответствующие им собственные функции. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют краевым условиям (3.34), (3.35), то из следствия из формулы Грина (3.16) получим, что

$$(Ly_1, y_2) - (y_1, Ly_2) = \int_0^l (y_2(x)Ly_1 - y_1(x)Ly_2)\, dx = 0.$$

Так как $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x), Ly_2 = -\lambda_2 y_2(x)$, то

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = \lambda_1 (y_1, y_2) - \lambda_2 (y_1, y_2) =$$

$$= (\lambda_1 y_1, y_2) - (y_1, \lambda_2 y_2) = -(Ly_1, y_2) + (y_1, Ly_2) = 0.$$

Следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0$, а значит $(y_1, y_2) = 0$ и функции $y_1(x), y_2(x)$ ортогональны.

第 3 章 一阶偏微分方程

3.1

3.1.1 一阶拟线性 (квазилинейное уравнение) 偏微分方程