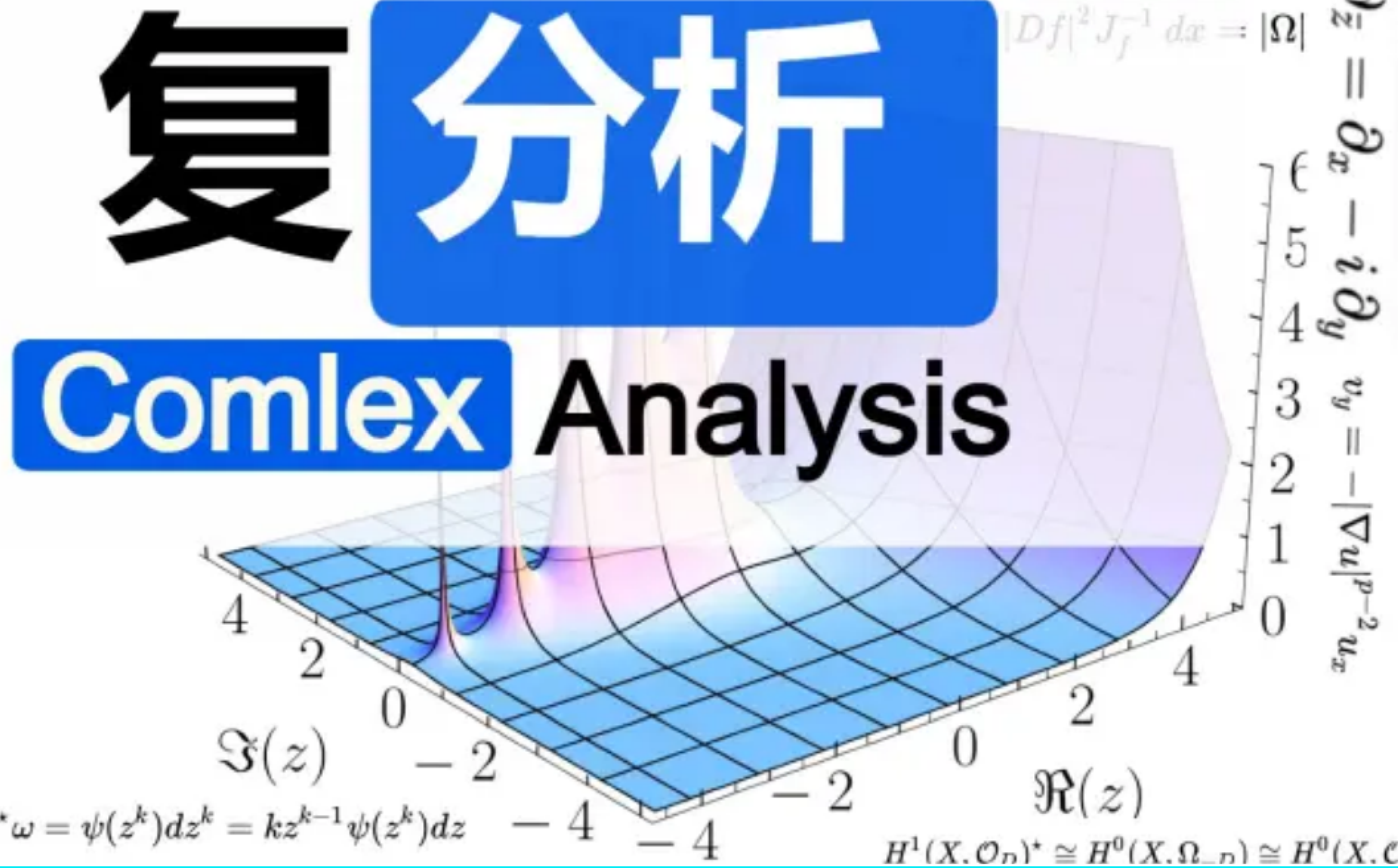

复分析

Complex analysis

作者：Galois 爱求五次根

组织：深北莫数学学社分析小组

时间：2023/2/15

宗旨：执象而求，咫尺千里

在实数域中，连接两个真理的最短路径是通过复数域。

目录

第 1 章 基本概念

事实上，如果通过在论证中引入复值来拓展函数的范畴的话，那么就会产生一种以前一直隐而未现的和谐与规律。

B. Riemann, 1851

1.1 复平面与复变函数

定义 1.1 (形式复数)

形式上定义数学对象“复数”（комплексное число）为

$$z = (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

并称第一个部分为复数的实部（действительная часть），第二个部分为复数的虚部（мнимая часть），记两个部分为[a]

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

并记复数为 $z = x + iy \in \mathbb{C}$

称 $(0,0) = 0$ 为零元（нулевый элемент），称 $(1,0) = 1$ 为单位（единица），称 $(0,1) = i$ 为虚数单位（мнимая единица）

[a]源自拉丁语的实 realis，以及拉丁语的虚 imaginarius

♣

注 “复数”这一名称由 Gauss 引人，记号 i 最先由 Euler 使用

注 （复数）虚部为零的复数 $z = (x, 0)$ 通常记为 $z = x$ 并用实数 x 标识。因此，实数是复数的特例。

定义 1.2 (复数相等)

若复数 $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ 实部与虚部均相等，则称二复数相等，即

$$(z_1 = z_2) := (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$$

♣

定义 1.3 (复数加法与乘法)

设复数 $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ 根据如下规则定义加法（сложение）与乘法（умножение）

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

♣

引理 1.1 (复数逆元唯一性)

若复数 $z = a + bi \neq 0$，则存在唯一的复数 z^{-1} 满足 $z \cdot z^{-1} = 1$

♡

证明 令

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2}$$

直接计算得 $z \cdot z^{-1} = 1$，存在性得证。若 w 也满足 $zw = 1$，两边乘 z^{-1} 即得 $w = z^{-1}$，唯一性得证

注 利用该引理，可以定义复数的除法。同理有减法的定义

定义 1.4 (复数减法与除法)

设复数 $z_1=(x_1,y_1), z_2=(x_2,y_2)$，通过逆运算再定义减法 (вычитание) 与除法 (деление)

$$z_1-z_2:=(x_1-x_2,y_1-y_2)$$
$$\frac{z_1}{z_2}:=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right),\quad x_2^2+y_2^2\neq 0$$

♣

注 （复数域）实际上，定义上述加法与乘法运算的复数集为一个域，记为 $\mathbb{C}$

性质 （复数运算群性质）复数的运算满足下列性质：

(1) （加法交换性）$(\forall z_1,z_2\in\mathbf{C}):z_1+z_2=z_2+z_1$

(3) （加法结合性）$(\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}):(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

(2) （乘法交换性）$(\forall z_1,z_2\in\mathbf{C}):z_1z_2=z_2z_1$

(4) （乘法结合性）$(\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}):(z_1z_2)\,z_3=z_1\,(z_2z_3)$

(5) （乘法对加法分配性）对任意的 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}, z_1\,(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

定义 1.5 (几何表示 геометрический изображение)

选择 Descartes 坐标系中平面的点或向量来表示复数，称该平面为复平面 (комплексная плоскость)，称横坐标轴 (ось абсцисс) 为实轴 (действительная ось)，称纵坐标轴 (ось ординат) 为虚轴 (мнимая ось) 若复数 $z=a+bi\neq 0$，则表示复数的点与原点不同，则可在 Descartes 坐标系基础上使用极坐标来定义，即 $r>0$ 的径向量 (радиус-вектор) 与极角 (полярный угол)Φ，记为

$$r=|z|,\quad \Phi=\operatorname{Arg}z$$

称 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 z 的模。称在 $(-\pi,\pi]$ 上的极角为 z 的辐角主值 (главное значение аргумента)，记为 $\arg z$，则有

$$-\pi<\arg z=\varphi\leqslant\pi,\quad \operatorname{Arg}z=\arg z+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

并称 $\operatorname{Arg}z$ 为 z 的辐角

♣

例题 1.1 （几何表示）求 $z=a+bi$ 的模与辐角，其中 $a,b\in R, a\neq 0$

解 由定义即有

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{b}{a}, & a>0,\\ \pi+\arctan\dfrac{b}{a}, & a<0,b\geqslant 0,\\ \arctan\dfrac{b}{a}-\pi, & a<0,b<0.\end{cases}$$

定义 1.6 (共轭复数)

称复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 互相复共轭 (взаимно комплексно сопряжённые)，经常称其中一个为另一个的共轭复数。

♣

性质 共轭复数满足下列性质

$$\overline{\overline{z}}=z$$
$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$$
$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},\quad z_2\neq 0$$

例题 1.2 （复方程组）解方程 $az+b\overline{z}=c$，其中 $a,b,c\in\mathbb{C}$

解 设 z 为原方程的解，则 $\bar{z}$ 为方程 $\bar{b}z+\bar{a}\bar{z}=\bar{c}$ 的解，则问题等价于解方程组

$$\begin{cases} az+b\bar{z}=c, \\ \bar{b}z+\bar{a}\bar{z}=\bar{c}, \end{cases}$$

当 $|a|^2\neq|b|^2$ 时，解为 $z=\dfrac{\bar{a}c-b\bar{c}}{|a|^2-|b|^2}$；若 $|a|^2=|b|^2$，则方程组不相容，除非满足条件 $\dfrac{\bar{a}}{b}=\dfrac{\bar{b}}{a}=\dfrac{\bar{c}}{c}$。在此条件下方程组退化为方程 $c\bar{b}z+\bar{c}b\bar{z}=c\bar{c}$，即 $Z+\bar{Z}=|c|^2$，其中 $Z=c\bar{b}z$。后一个方程的解为 $Z=\dfrac{1}{2}|c|^2+\mathrm{i}t, t\in\mathbb{R}$，代回 z 得 $z=\dfrac{1}{2}\dfrac{\bar{c}}{\bar{b}}+\mathrm{i}\dfrac{t}{c\bar{b}}$

定义 1.7 (三角形式/тригонометрическая форма)

若复数 z 用极坐标表示：

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

则有复数的三角形式

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

若设

$$z_1=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right),\quad z_2=r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$$

则根据定义的乘除法显然有

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right) \\ \frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right),\quad r_2\neq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

♣

注 （Euler 公式形式引入）

对函数 $\mathrm{e}^x, \sin x$ 和 $\cos x$ 进行幂级数展开：

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x&=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \\ \sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, \\ \cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, \end{aligned}$$

其中 $x\in\mathbb{R}$

若形式地令

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=1+\frac{\mathrm{i}x}{1!}+\frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}+\cdots,$$

并代入 $\mathrm{i}^2=-1$，则有所谓 Euler 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$$

下面严格证明该命题

定义 1.8

设 $z,w\in\mathbb{C}$，定义 z 与 w 的距离为

$$d(z,w)=|z-w|$$

设 $z=x_1+\mathrm{i}y_1, w=x_2+\mathrm{i}y_2$，显然 $d(z,w)$ 与 z 和 w 在平面 $\mathbb{R}^2$ 中代表的点 $P_1=(x_1,y_1)$ 和 $P_2=(x_2,y_2)$ 之间的距离

$$d\left(P_1,P_2\right)=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$$

♣

定义 1.9 (复变函数)

设 $\mathbf{E}$ 为复平面的子空间且设每个 $z \in \mathbf{E}$ 对应一个或多个数值 w ，这时称在 E 给定了 z 的复变函数 (функция комплексного переменного) 并记为 $w = f(z)$。若设 $z = x+iy, w = u+iv$, 其中 $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, 则 E 上的 $w = f(z)$ 等效于给定的两个实函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 在 Euclid 平面上的值

称对应一个数值的复变函数为单复变函数 (однозначная Функция)，称对应多个数值的复变函数为多复变函数 (многозначная функция)

记函数 f 的定义域为 $\operatorname{dom} f$，值域为 $\operatorname{im} f$，记函数 f 在 E 上的值集为 $f(\mathrm{E})$ ♣

定义 1.10 (复变函数极限概念)

设 $E \subset \operatorname{dom} f$，$z_0$ 为 的极限点，则

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall z) : [|z - z_0| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(z) - A| < \varepsilon]$$

记为

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

♣

定理 1.1 (复变函数收敛充要条件)

设 $z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, f(z) = u + iv, A = B + iC$，则有

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow (\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B) \wedge (\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C)$$

♡

推论 1.1

设复变函数 g 与 h 定义在集 E 上

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = A_1, \quad \lim_{z \to z_0} h(z) = A_2$$

则有

$$\lim_{z \to z_0} (g(z) \pm h(z)) = A_1 \pm A_2, \quad \lim_{z \to z_0} (g(z) \cdot h(z)) = A_1 \cdot A_2$$

另外若 $A_2 \neq 0$，则有

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{A_1}{A_2}$$

♡

例题 1.3 求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{n}{n^2 - 1}\right)^n$

解 设 $z_n = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{n}{n^2 - 1}\right)^n$，则有

$$|z_n| = \left(1 + \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad \arg z_n = n \arctan \frac{n}{n^2 - 1}$$

由

$$\lim_{n \to \infty} n \arctan \frac{n}{n^2 - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} = 1$$

则有 $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \cos 1 + \mathrm{i}\sin 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}}$

定义 1.11 (复变函数收敛概念)

设有复数序列 $z_n = x_n + iy_n$，若

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$$

则称复数序列收敛到极限 $z_0 = x_0 + iy_0$ ♣

定理 1.2

设有复数序列 $z_n = x_n + iy_n$，则有

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \wedge (\lim_{n\to\infty} y_n = y_0)$$

♡

定理 1.3 (Bolzano-Weierstrass 定理/Больцано-Вейерштрасса 定理)

每个有界复数序列必有收敛子序列

♡

定理 1.4 (Cauchy 准则/критерий Коши)

复数序列 $z_n = x_n + iy_n$ 收敛的充要条件为

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}) : |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

♡

注 该定理表明：复数集完备

定理 1.5 (Euler 公式)

设 $z \in \mathbb{C}$，则有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z \tag{1.2}$$

♡

证明 对 $n = 1, 2, \cdots$，令 $z_n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$ 得序列 $\{z_n\}$。设 $m > n$，则有

$$|z_n - z_m| \leqslant \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!} + \cdots + \frac{|z^m|}{m!}$$

而实数序列

$$\left\{ a_n = 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z^2|}{2!} + \cdots + \frac{|z^n|}{n!} \right\}$$

在 $\mathbb{R}$ 中收敛于 $\mathrm{e}^{|z|}$，则为 Cauchy 序列，因此 $\{z_n\}$ 也为 Cauchy 序列，则其在 $\mathbb{C}$ 中收敛，记其极限为 e^z，即 $\forall z \in \mathbb{C}$。定义：

$$\mathrm{e}^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \cdots$$

同理, 利用 Cauchy 准则不难证明 $\forall z \in \mathbb{C}$，下面两个级数

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

都收敛，将其极限分别记为 $\sin z$ 和 $\cos z$，由此得到指数函数和三角函数对复变量的推广。直接计算不难看出 $\forall z \in \mathbb{C}$，则有 Euler 公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$

定义 1.12 (指数形式/показательная форма)

利用 Euler 公式 (формула Эйлера)

$$e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

则有复数的指数形式 $z = re^{i\varphi}$。利用三角形式定义立即有

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

则有

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi} = r_1 r_2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi \equiv \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi}$$

♣

定理 1.6 (De Moivre 定理/формула Муавра)

(De Moivre[a]定理/формула Муавра) 设 z 为复数，则下列公式成立

$$z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi}=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\quad n\in\mathbb{Z}$$

[a]隶莫弗 (De Moivre,Abraham,1667.5.26-1754.11.27) 法国数学家，其数学贡献主要在英国做出并卒于英国伦敦

定义 1.13

设有复数 $z_0=r_0e^{i\phi_0}$，若 $z_0^n=z$ ，则由 De Moivre 定理得

$$r_0^ne^{in\varphi_0}=re^{i\varphi}\Rightarrow r_0=\sqrt[n]{r},\quad \varphi_0=\frac{\varphi}{n}+2\frac{k}{n}\pi(k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

称 $z_0=r_0e^{i\phi_0}$ 为复数 $z=re^{i\varphi}$ 的 n 次根 (корень n-й натуральной степени)

例题 1.4 (De Moivre 定理) 将 $\cos 5x$ 及 $\sin 5x$ 展开为 $\cos x,\sin x$ 的表达式

解 由 De Moivre 定理 (1.6) 有 $\cos 5x+\mathrm{i}\sin 5x=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^5$，由 Newton 二项式公式有

$$\begin{aligned}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^5=&\cos^5x+5\,\mathrm{i}\cos^4x\sin x-10\cos^3x\sin^2x\\&-10\,\mathrm{i}\cos^2x\sin^3x+5\cos x\sin^4x+\mathrm{i}\sin^5x\end{aligned}$$

由此则有

$$\begin{aligned}\cos 5x&=\cos^5x-10\cos^3x\sin^2x+5\cos x\sin^4x\\ \sin 5x&=5\cos^4x\sin x-10\cos^2x\sin^3x+\sin^5x\end{aligned}$$

定义 1.14 (复变函数连续概念)

设 $E\subset\operatorname{dom}f$ 且设 $z_0\in E$ 为 E 的极限点，若

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f\left(z_0\right)$$

则称复变函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续。若 $f(z)$ 在集 E 上任意点都连续，则称 f 在集 E 上连续

定理 1.7 (复变函数连续充要条件)

函数 $f(z)=u+iv$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续等价于

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u\left(x_0,y_0\right),\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v\left(x_0,y_0\right)$$

例题 1.5 (复变函数连续性) 设函数

$$f_1(z)=\frac{\operatorname{Re}(z)}{z},f_2(z)=\frac{z}{|z|},f_3(z)=\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2},f_4(z)=\frac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|}$$

定义在集合 $Z=\bar{O}_\delta(0)\backslash\{0\}$ 上，其中 $\bar{O}_\delta(0)=\{|z\in\mathbb{C}|(|z|\leqslant)\delta\wedge(\delta>0)\}$，判别能否将这些函数延拓到 $\bar{O}_\delta(0)$ 上，使得所得延拓在点 $z=0$ 连续

解 设 $z_n=\left(\dfrac{1}{n},0\right),z_n'=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，则对足够大的 $n\in\mathbb{N}$，序列 $\{z_n\},\{z_n'\}$ 属于集合 $\bar{O}_\delta(0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n'=0$。这时由 $f_1\left(z_n\right)=1,f_1\left(z_n'\right)=0,f_2\left(z_n\right)=1,f_2\left(z_n'\right)=\mathrm{i},f_3\left(z_n\right)=1$，$f_3\left(z_n'\right)=-1$ 知，函数 f_1,f_2,f_3 在点 $z=0$ 无极限，故不能将它们延拓到集合 $\bar{O}_\delta(0)$ 上，并使得到的函数在 $z=0$ 连续

下观察函数 f_4。设 $\{z_n\}=\{x_n+\mathrm{i}y_n\}$ 为集合 $\bar{O}_\delta(0)$ 中的任意点列，且满足

$$(\lim_{n\to\infty}z_n=0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N})(z_n\neq 0)$$

当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 0,y_n\to 0$，但这时 $|f_4\left(z_n\right)|=|x_n|\to 0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_4\left(z_n\right)=0$，则若令

$$\varphi(z)=\begin{cases}f_4(z), & z\in\bar{O}_\delta(0)\backslash\{0\},\\0, & z=0.\end{cases}$$

则有函数在点 $z=0$ 连续

推论 1.2 (复变函数二元运算连续性)

设复变函数 $g(z)$ 与 $h(z)$ 在点 z_0 处连续。则它们的和差积都在点 z_0 处连续。若 $h(z_0)\neq 0$，则它们的商也在点 z_0 处连续

推论 1.3 (复变函数复合连续性)

设函数 $w=f(z)$ 在集 E 上连续且 $f(\mathrm{E})\subset \mathrm{F}$，函数 $\zeta=g(w)$ 在集 $\mathbf{F}$ 上连续，则复合函数 $\zeta=g[f(z)]\equiv G(z)$ 在集 $\mathbf{E}$ 上连续

推论 1.4 (Weierstrass 第一定理/первая теорема Вейерштрасса)

设函数 $w=f(z)$ 在有界闭集 E 上连续，则有 $w=f(z)$ 在 E 上有界

推论 1.5 (复数 Weierstrass 第二定理/комплексная версия 2-й теоремы Вейерштрасса)

设函数 $w=f(z)$ 在有界闭集 E 上连续，则有 $w=f(z)$ 在 E 上的模必达上下界

推论 1.6 (Cantor 定理/теорема Кантора)

设函数 $w=f(z)$ 在有界闭集 E 上连续，则有 $w=f(z)$ 在 E 上一致连续

1.2 解析函数与 Cauchy-Riemann 方程

定义 1.15 (单复变函数可微性概念)

设函数 f 为 $\mathbf{E}$ 上单复变函数，z_0 为 $\mathbf{E}$ 的任意极限点，若存在极限

$$\lim_{E\ni z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

则称极限为函数 f 沿集合 $\mathbf{E}$ 在点 z_0 处的导数，记为 $f'(z_0)$。称沿集合 $\mathbf{E}$ 在 z_0 处具有导数的 f 可微。称 $z-z_0\equiv\Delta z=dz$ 为（与变量无关的）微分算子，称 $f(z)-f(z_0)\equiv\Delta f(z)$ 为函数的增量 (приращение)

定理 1.8 (单复变函数可微性准则)

单复变函数 f 在点 z_0 处可微的充要条件为其在点 z_0 处增量可表达为如下形式：

$$\Delta f(z)=A\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\Delta z$$

其中 A 为常数 (констант)，$\alpha(z_0,\Delta z)$ 为 $z\to z_0$ 时的无穷小量。
且若该表示成立，则有 $A=f'(z_0)$

例题 1.6 （共轭算子在复平面处处不可导）

设 $f(z)=\bar{z}$，则 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处不可导

解 给定 $\forall z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，若令 $z=x+\mathrm{i}y_0$，则有

$$\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

若令 $z=x_0+\mathrm{i}y$，则有

$$\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=-\frac{y-y_0}{y-y_0}=-1$$

由此 $f(z)$ 处处不可导

定义 1.16 (复变函数偏导数概念)
设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为区域 D 上复变函数，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0\in D$，若实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 都存在关于 x 的偏导数，称 $f(z)$ 在 z_0 对 x 可偏导，形式化记为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

称其为函数 $f(z)$ 关于 x 的偏导数
同理定义 $f(z)$ 关于 y 的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

若 $u(x,y)\in C^r(D)$ 和 $v(x,y)\in C^r(D)$，即 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内所有小于或等于 r 阶的偏导都存在并连续，记为 $f(z)\in C^r(D)$；若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内任意阶连续可导，记为 $f(z)\in C^\infty(D)$ ♣

定义 1.17 (Cauchy-Riemann 方程)
称微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

为 Cauchy-Riemann 方程，简称为 C-R 方程 ♣

例题 1.7 令

$$u(x,y)=\begin{cases}0, & (x\neq 0)\wedge(y\neq 0)\\ 1, & (x=0)\vee(y=0)\end{cases}$$
$$v(x,y)=1,$$

则在点 $(0,0)$ 处，$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都有偏导且满足 Cauchy-Riemann 方程，但

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

在 $z=0$ 处并不连续，则不可导

注 该例题表明需要对 Cauchy-Riemann 方程加上一定的条件，才有可微性的充要条件，于是考虑下面的 D'Alembert-Euler 条件

定理 1.9 (D'Alembert-Euler 条件)
定义在区域 $\mathbf{G}$ 上的复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在该区域上的点 $z_0=x_0+iy_0$ 可微的充要条件为实变函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微与其在该点偏导数满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

♡

证明 必要性：根据函数 f 的增量在点 z_0 的可微性法则，则有

$$\Delta f(z)=f'(z_0)\cdot\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\cdot\Delta z$$

设 $f'(z_0)=a+ib,\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$，分离实部和虚部得

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y$$

由 α_1 与 α_2 在 Δx 与 Δy 趋于零时为无穷小量，则有：
A) 函数 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微且其在该点偏导数为 $u_x=a,u_y=-b$
B) 函数 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微且其在该点偏导数为 $v_x=b,v_y=a$
则满足 Cauchy-Riemann 方程
充分性：由条件，函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微。设 $u_x=a,v_x=b$，则由 D'Alembert-Euler

条件有 $u_y = -b, v_y = a$，这时有

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha|\Delta z|$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta|\Delta z|$$

其中 $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 为变量为 x 与 y 的 Descartes 平面上的标准无穷小，而当 $\Delta z \to 0$ 时有 $\alpha, \beta \to 0$。

将这些等式中的第二个乘以 i 并将其添加到第一个得

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta)|\Delta z| = A\Delta z + \varepsilon\Delta z \tag{1.4}$$

其中 $A = a + ib$ 且

$$\gamma = \frac{(\alpha + i\beta)|\Delta z|}{\Delta z}$$

从 $|\gamma| = |\alpha + i\beta|$ 有 γ 为当 $\Delta z \to 0$ 时的无穷小。根据可微性准则，增量 Δf 表达为形式 (1.4) 等价于函数 f 在点 z_0 的可微性

注 由于 $f'(z_0) = A = a + ib$ 且数 a 与 b 在充分性证明中记为 $a = u_x = v_y, b = -u_y = v_x$，则 D'Alembert-Euler 条件给出了通过计算函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 的偏导数来计算复变函数导数 $f'(z_0)$ 的计算公式

$$f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

推论 1.7 (极坐标形式 D'Alembert-Euler 条件)

定义在区域 $\mathbf{G}$ 上的复变函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在该区域上的点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 极坐标 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r = \sqrt{x^2+y^2}$ 下可微的充要条件为实变函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微与其在该点偏导数满足极坐标形式的 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

♡

证明 由复合函数求导法则有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi$$

解出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

同理有

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

由 Cauchy-Riemann 方程有

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} = -\frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r} \tag{1.6}$$

用式 (1.5) 乘 $\cos\varphi$，式 (1.6) 乘 $\sin\varphi$，相加即得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

用式 (1.5) 乘 $-\sin\varphi$，式 (1.6) 乘 $\cos\varphi$，相加即得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

因此，函数 $f=u+\mathrm{i}v$ 在极坐标下的 Cauchy-Riemann 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

定义 1.18

称在区域 **G** 上处处可微且函数在区域 **G** 上的导数处处连续，则称 f 在区域 **G** 上解析 (аналитическая)。但由于区域上可微性推出区域上连续性，该定义修改为称在区域 **G** 上处处可微的函数为区域 **G** 上解析函数（或全纯函数），记为 $f\in\mathcal{A}(G)$。若函数在复数集上全纯，则称函数为整函数，即若 $f\in\mathcal{A}(\mathbb{C})$，则称函数 f 为整函数 (целая функция)

♣

注 “全纯的”有时也说成“正则的”或“复可微的”。对复可微的定义与一般的实变量函数中微分的定义是完全类似的。但是复变函数的全纯性要比实变量函数的可微性具有更好的性质，例如，全纯函数存在无穷阶复微分，即只要复变函数一阶可微，则能无穷多阶可微。而实变函数却存在一阶可微而二阶不可微的情况。因此，任何一个全纯函数都是解析的，亦即可以在任何点处展成幂级数。因此后面把“解析的”作为“全纯的”的同义词。与复变函数相比，某些实变函数即使存在无穷阶微分，也不能展成幂级数

例题 1.8 （复数指数形式解析性）

设 $z=x+\mathrm{i}y$，利用 Euler 公式 (1.2) 定义：

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$$

则 e^z 在 $\mathbb{C}$ 上解析

解 由 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y, v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续偏导，则它们在 $\mathbb{C}$ 上可微。注意

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

则有 u,v 满足 Cauchy-Riemann 方程，由定理 (1.9) 得 e^z 在 $\mathbb{C}$ 上解析

定理 1.10 (Cauchy-Riemann 方程变式)

设 $u(x,y),v(x,y)$ 为区域 G 上 C^∞ 的函数，则 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 G 上解析的充要条件为

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$$

♡

证明 由 C^∞ 的二维实向量函数 $(u(x,y),v(x,y))$ 用复变量表示时为

$$u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=f(x,y)=f\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)$$

则显然有

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)[u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

则条件等价于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $u(x,y),v(x,y)$ 满足 Cauchy-Riemann 方程，由 D'Alembert-Euler 条件 (1.9) 即证

注 该定理表明 Cauchy-Riemann 方程可以被替代为条件

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$$

即函数为解析函数的充要条件为函数独立于变量 $\bar{z}$

性质 $f\in\mathcal{A}(G)\Rightarrow f\in\mathcal{C}(G)$

定理 1.11

若复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都在 z_0 处可导，则有

(1) $f(z) \pm g(z), f(z)g(z)$ 在 z_0 处可导且有

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0);$$

(2) 设 $g(z_0) \neq 0$，则 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 在 z_0 处可导且有

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

(3) 设 $w = g(z)$ 在 z_0 处可导，$f(w)$ 在 $w_0 = g(z_0)$ 处可导，则 $f \circ g$ 在 z_0 处可导且有

$$(f \circ g)'(z_0) = f'[g(z_0)]\, g'(z_0)$$

注 复变函数的微分运算与实变函数的微分运算完全相同，不再证明

注 该定理表明，解析函数的和、差、积和商（分母不为零）都为解析函数，两个解析函数的复合函数也为解析函数

例题 1.9 设 $z = x + \mathbf{i}y$，当 $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$ 时求解析函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$

解 由 D'Alembert-Euler 条件 (1.9)，则满足 Cauchy-Riemann 方程有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v(x,y) = 2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v(x,y) = 2xy - x + \int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{d}x + C_2$$

其中

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{d}x = 2\int \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{d}x - \int \frac{\mathbf{d}x}{x^2+y^2}$$

利用

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \int (x)'_x \frac{1}{x^2+y^2}\mathbf{d}x + \int x\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x \mathbf{d}x + C_3$$

则求出

$$2\int \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{d}x = \int \frac{1}{x^2+y^2}\mathbf{d}x - \frac{x}{x^2+y^2} + C_3$$

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{d}x = \int \frac{1}{x^2+y^2}\mathbf{d}x - \frac{x}{x^2+y^2} + C_3 - \int \frac{1}{x^2+y^2}\mathbf{d}x = -\frac{x}{x^2+y^2} + C_3$$

综上 $v(x,y) = 2xy - \dfrac{x}{x^2+y^2} - x + 5y + C, C \in \mathbb{R}$，则 $f(z) = z^2 + (5-\mathbf{i})z - \mathbf{i}\dfrac{1}{z} + C\mathbf{i}, C \in \mathbb{R}$

命题 1.1 (实值函数区域上解析充要条件)

设 $f(z)$ 为区域 D 上实值函数，则 $f(z)$ 在 D 上解析的充要条件为 $f(z)$ 在 D 上为常数

证明 充分性显然。必要性：任取 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$，若令 $z = x + \mathrm{i}y_0 \in D$，则有

$$f'(z_0) = \lim_{x \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

为实数；而若取 $z = x_0 + \mathrm{i}y \in D$，则

$$f'(z_0) = \lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

为虚数。因此必须有 $f'(z_0) = 0$，即 $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ 得 $f(z)$ 为常数

推论 1.8

若两个解析函数的实部（或虚部）相同，则此两解析函数之间仅差一常数 ♡

定理 1.12 (逆映射解析性)

设 $f \in \mathcal{A}(\mathrm{G})$ 且在点 $z_0 \in G$ 满足 $f'(z_0) \neq 0$，若设 $w_0 = f(z_0)$，则可以找到点 w_0 的邻域 K_ε 与函数 $z = \phi(w)$ 满足

(1) 函数 ϕ 为 f 的逆，即

$$(\forall w \in K_\varepsilon) : f[\phi(w)] = w$$

(2) $\phi(w) \in \mathcal{A}(K_\varepsilon)$

(3) 任意 $\phi'(w_0)$ 满足公式

$$\phi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

♡

注 利用隐函数定理 (теорема о неявных функциях) 即证

注 （几何意义）

设 $f(z)$ 在 z_0 可导，由

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

得

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

因此当 z 充分接近于 z_0 时有

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \, |z - z_0| \, .$$

这表明当 $f'(z_0) \neq 0$ 时 $f(z)$ 将以 z_0 为圆心，r 为半径的充分小的圆盘近似地映为以 $f(z_0)$ 为圆心，$|f'(z_0)| r$ 为半径的圆盘。特别地，$|f'(z_0)|^2$ 应是映射 $w = f(z)$ 关于对应区域之间的面积比，即映射的 Jacobi 行列式。下面证明这里的讨论

定理 1.13 (几何意义)

设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \in \mathcal{A}(D)$，$D$ 为开集，$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$，则 $|f'(z_0)|^2$ 为映射

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

在 (x_0, y_0) 处的 Jacobi 行列式 ♡

证明 映射 $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ 的 Jacobi 行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

由 $Cauchy - Riemann$ 方程，上式可写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z_0)|^2$$

定理即证

定理 1.14

设 $f(z)$ 是区域 Ω 上的单叶解析函数，则 (1) $f'(z)$ 在 Ω 上处处不为零；

(2) $f(\Omega)$ 是开集，因而是 $\mathbb{C}$ 中的区域；

(3) $f^{-1}: f(\Omega) \to \Omega$ 在 $f(\Omega)$ 上解析，并且

$$\left(f^{-1}\right)'[f(z)] = \frac{1}{f'(z)}.$$

即只要解析函数 $f(z)$ 在 Ω 上是单射，那么 $f: \Omega \to f(\Omega)$ 必是解析同胚

注 由于这一定理对于一个变量的实函数是不成立的，因此它不可能仅通过导数的定义 $\lim_{z\to x_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$ 简单推出

定理 1.15 (逆映射存在性与解析性)

设 $f \in \mathcal{A}(\mathrm{G})$，$G$ 为开集且在点 $z_0 \in G$ 满足 $f'(z_0) \neq 0$，则存在点 $z_0 \in G$ 的邻域 D 满足函数 f 存在逆映射

证明 将 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 看做映射 $(x,y) \mapsto (u,v)$，则其 Jacobi 行列式 $|f'(z_0)|^2 > 0$，由逆映射定理得 $f: D \to f(D)$ 有逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$，并由函数 f 可微得其逆映射可微，则逆映射也为解析函数

定理 1.16 (逆映射导数计算公式)

设 $f \in \mathcal{A}(\mathrm{G})$，$G$ 为开集且在点 $z_0 \in G$ 满足 $f'(z_0) \neq 0$，则 f 的逆映射 f^{-1} 满足公式

$$(f^{-1})'(\omega_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

证明 由

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \lim_{w_0'\to w_0} \frac{f^{-1}(w_0') - f^{-1}(w_0)}{w_0' - w_0} = \lim_{z'\to z} \frac{z'-z}{f(z') - f(z)} = \lim_{z'\to z} \frac{1}{\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}} = \frac{1}{f'(z)}$$

即得公式

1.3 多值映射与反函数

定义 1.19 (单叶与多叶)

设 $w = f(z) \in \mathcal{A}(G)$，若

$$(\forall z_1, z_2 \in G): [z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)]$$

则称 f 在 G 上单叶 (однолистная), 否则称 f 在 G 上多叶 (многолистная), 类似地有双叶 (двулистная)、可数叶 (счетнолистная) 等

若 $f(z)$ 在 G 上多叶，但在其子区域 g 上单叶，则称 g 为 f 的单叶区域

定义 1.20 (多叶函数与多值函数单值分支)

设 $z = f(w)$ 在区域 $\mathbf{G}$ 上解析的函数变量为 w 的平面。若 f 为多叶函数，则 $\mathbf{G}$ 可划分为（有无穷多种划分法）

$$\mathbf{G} = \left(\bigcup_k \mathbf{G}_k\right) \bigcup \left(\bigcup_1 \gamma_1\right)$$

其中 $\mathbf{G}_k$ 为函数 f 的不交单叶区域，而 γ_1 为分界线，记 $\Phi_k = f(G_k), \phi_I = f(\gamma_l)$ ，则定义域的划分对应于值域的划分

$$\Phi = f(G) = \left(\bigcup_k \Phi_k\right) \bigcup \left(\bigcup_1 \phi_1\right)$$

另设函数 $w = F(z)$, 若在区域 Φ_k 的点上考虑该函数, 将 F 作为它在点 $z \in \Phi_k$ 处的值, 该点的唯一原像属

于区域 $\mathbf{G}_k$, 则得一个从 Φ_k 到 $\mathbf{G}_k$ 单值函数 $w=F_k(z)$, 这时原函数 $z=f(w)$ 和函数 $w=F_k(z)$ 可以被认为是互逆单值函数，称函数 $F_k(z)$ 为多值函数 $w=F(z)$ 的单值分支 (однозначная ветвь многозначной функции)

注 与区域 $\mathbf{G}_k$ 不同，区域 Φ_k 可以相交甚至重合

注 （复指数函数在水平线族作用）

由于 $(e^z)'=e^z$ 且 e^z 恒不为零，则由定理 (3.5) 有复指数函数在 $\mathbb{C}$ 任意点上有局部共形性。但由周期性，在 e^z 整个定义域上复指数函数并不是全局共形的。

考虑宽度为 $h=\phi_1-\phi_0\leqslant 2\pi$ 的带 (полоса) $g:\phi_0<y<\phi_1$ 为复指数函数的单叶区域（同一个 w 的两个对数不能出现在同一条带中）。将 g 视为水平线 (1.7) 的族的并集 (семейство горизонтальных прямых),

$$I_\phi: z=t+i\phi,\quad -\infty<t<\infty,\quad \phi_0<\phi<\phi_1 \tag{1.7}$$

在复指数函数作用下，直线 I_ϕ 变为射线

$$L_\phi: w=e^t(\cos\phi+i\sin\phi)$$

且射线从点 $w=0$ 处出发，倾斜角为 ϕ。则带 g 在平面 w 上图像为开口 (раствор) 为 h 的扇形 (сектор)G，且其顶点在 $w=0$。该扇形的边界射线为

$$\operatorname{Arg} w=\phi_0+2k\pi, \operatorname{Arg} w=\phi_1+2k\pi$$

在带 g 上复指数函数一一地在 $z\in g$ 上共形，由此有 $g\xrightarrow[\text{共形}]{\exp z} G$

定义 1.21 (复指数函数反函数)

由 $z=x+iy$ 可把 e^z 表示为 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 。欲利用 $e^z=w$ 定义复指数反函数，而 $\operatorname{dom} e^z=\mathbb{C}$，显然推出 $(\forall z\in\mathbb{C}: e^z\neq 0)$，于是设

$$|w|(\cos\arg w+i\sin\arg w)=e^x(\cos y+i\sin y)\Leftrightarrow(e^x=|w|)\wedge(y\in\operatorname{Arg} w)$$

其中 $\operatorname{im} e^z$ 上有 $w\neq 0$。则可定义 x：$x=\ln|w|$。因此任意非零 w 有一组如下可数原像：

$$z=\ln|w|+i\operatorname{Arg} w$$

则称 $z=\ln|w|+i\operatorname{Arg} w$ 为 w 的自然对数 (натуральный логарифм)，记为 $\operatorname{Ln}(w)$。w 的自然对数都位于与横坐标 $\ln|w|$ 的线上，不同自然对数之间的距离为 2π 的整数倍（由公式 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 即有将 2π 添加到参数 z 的虚部 y 不改变 e^z 的值，另外还得复指数函数为周期为 $2\pi i$ 的周期函数）

定义 1.22 (对数函数单值分支)

设 $z=f(w)=e^w, G=\mathbb{C}$，则有任意宽度最多为 2π 的水平带为指数函数的单叶区域，设

$$G_k: 2k\pi<\operatorname{Im} w<2(k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

$$\gamma_l: \operatorname{Im} w=\frac{2}{\pi},\quad l=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

则对任意 k 有 Φ_k 得到相同的区域 Φ，即整个复平面，沿实轴的非负部分进行切割，该切口适用于所有 γ_l 的图像

固定 k 并考虑序偶 (G_k,Φ)，称在区域上该序偶定义了互逆的单值函数 $z=e^w$ 与

$$w=\operatorname{Ln}_k z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi), k\in\mathbb{Z}$$

特别地，当 $k=0$，时称单值分支

$$w=\operatorname{Ln}_0 z=\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

为对数主值

注 （对数函数单值分支）

对数函数所有单值分支都定义在同一个区域 Φ, 任何两个分支都以纯虚常数相互不同。作为解析函数 $z=e^w$ 的反函数，函数 $\mathrm{Ln}_k\, z$ 在 Φ 中解析，则在导函数 $\mathrm{Ln}_k\, z$ 的任意点 $z\in\Phi$ 可以使用反函数微分规则找到：

$$(\mathrm{Ln}_k\, z)=\frac{1}{(e^w)'}=\frac{1}{e^w}=\frac{1}{z}$$

注 （复指数函数在铅垂线族作用）

观察复指数函数作用于平行于虚轴的线上，令

$$I_c: z=c+it,\quad -\infty<t<\infty$$

则该直线在复指数函数作用下的图像为一个圆周

$$\gamma_c: w=e^c(\cos t+i\sin t)$$

则当点 z 表达直线 I_c 时，t 从 $-\infty$ 变到一次 ∞，这时 w 无穷多次顺时针表达圆周 γ_c。在直线 I_c 上长度 2π 的区间对应一圈 γ_c

例题 1.10 不平行于实轴或虚轴的直线，被复指数函数映射为对数螺旋 (логарифмическая спираль)（极坐标方程 $\rho=Ce^{k\phi}$ 给出的曲线，其中 $C>0$ 且 k 为常数）

注 （复数幂运算法则）

对于复数幂 $z^\alpha(\alpha\in C)$，乘幂的指数相加原理与乘幂的指数相乘原理均不再成立，即

$$z^{\alpha_1}z^{\alpha_2}=\mathrm{e}^{\alpha_1\,\mathrm{Ln}\,z}\mathrm{e}^{\alpha_2\,\mathrm{Ln}\,z}=\mathrm{e}^{\alpha_1\,\mathrm{Ln}\,z+\alpha_2\,\mathrm{Ln}\,z}\neq\mathrm{e}^{(\alpha_1+\alpha_2)\,\mathrm{Ln}\,z}=z^{\alpha_1+\alpha_2}$$

$$(z^\alpha)^\beta=\left(e^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}\right)^\beta=e^{\beta\alpha(\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z)}\neq e^{\beta\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}$$

例题 1.11 将 2^{i} 和 i^{i} 表示为 $a+ib$ 的形式

解 由定义即有 $2^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln 2}=\cos\ln 2+\mathrm{i}\sin\ln 2, \mathrm{i}^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

性质 （复变正余弦与双曲正余弦）

下列余弦函数，双曲余弦函数，正弦函数，双曲正弦函数表达式成立：

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\mathrm{ch}\, z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\mathrm{sh}\, z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}\tag{1.8}$$

注 式 (1.8) 为指数函数的线性组合并继承周期性，则双曲正弦和双曲余弦具有相同的周期 $2\pi i$。三角函数根据 iz 的周期定义，因此正弦函数与余弦函数的周期为 2π

注 显然对于实值，复双曲函数与同名 (одноименных) 实值函数全等，复三角函数显然也与同名实值函数全等。例如 $\cos z$，设 $z=x\in\mathbb{R}$，则有

$$\cos z=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{1}{2}(\cos x+i\sin x+\cos x-i\sin x)=\cos x$$

对于 $z=x+iy$ 实轴外的值，有

$$\begin{aligned}|\cos z|&=\frac{1}{2}\left|e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}\right|=\frac{1}{2}\left|\cos x\left(e^y+e^{-y}\right)-i\sin x\left(e^y-e^{-y}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})(\cos^2 x+\sin^2 x)+2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}=\sqrt{\mathrm{ch}^2\, y-\sin^2 x}\end{aligned}$$

同理有 $|\sin z|=\sqrt{\mathrm{sh}^2\, y+\sin^2 x}$。考虑这两种情况均为非负平方根，则有

$$\mathrm{ch}\, y\geqslant|\cos z|\geqslant\sqrt{\mathrm{ch}^2\, y-1}=|\mathrm{sh}\, y|$$

$$\mathrm{ch}\, y=\sqrt{\mathrm{sh}^2\, y+1}\geqslant|\sin z|\geqslant|\mathrm{sh}\, y|$$

由估计有 $\cos z$ 与 $\sin z$ 在远离实轴时两个函数的模都无限增长，因此与同名实函数不同，复函数 $\cos z$ 与 $\sin z$ 在复平面上无界

注 显然地由

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2=\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}=1$$

有三角恒等式

$$(\forall z \in \mathbb{C}): \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

实际三角学的其他公式仍然有效，如加法定理 (теорема сложения)，化简公式 (формула приведения) 等，由复变函数的定义即可验证。将在后文讨论的唯一性定理提供了一种通用方法，用于检查将函数的定义从实轴扩展到复平面时，原始函数满足的关系对其复变情形的泛化成立

由公式 (1.8) 立有

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz$$

其从直观上解释了相似性

注 (反三角函数微分公式有效性)

用于可微实函数的三角公式仍然有效，例如 $\cos z$ 有

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{1}{2} i \left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z$$

注 (复变反正余弦与双曲反正余弦)

对 $\cos z$ 引入中间变量 $t = e^{iz}$ 则有

$$w = \cos z = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

这时由前面的讨论可以为每个函数找到一个单叶区域

用直线 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 划分整个 z 平面为铅直带状域——函数 $w = \cos z$ 的单叶区域，对其中的每个区域取其相应的 w 平面，则合并可得 $w = \cos z$ 的反函数，即多值函数 $z = \operatorname{Arccos} w$，形如

$$z = \operatorname{Arccos} w = \frac{1}{\mathrm{i}} \operatorname{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right) = -\mathrm{i} \operatorname{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)$$

其中分岔点为 $\pm 1, \infty$

类似有

$$z = \operatorname{Arcsin} w = -\mathrm{i} \operatorname{Ln}\left(i\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)\right)$$

$$z = \operatorname{Arch} w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$z = \operatorname{Arsh} w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

性质 (复变正余切与双曲正余切)

下列正切函数，双曲正切函数，余切函数，双曲余切函数表达式成立：

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{ctan} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \tag{1.9}$$

注 式 (1.9) 中函数在其定义域上处处解析。因此 $\operatorname{ctg} z$ 仅在点 $z = k\pi$ 上无定义。另外，这些函数都是周期函数，双曲正切与双曲余弦周期为 πi，而三角函数周期为 π

注 (复变反正余切与双曲反正余切)

研究映射 $w = \tan z$ 及 $w = \cot z$ 则有这些函数的单叶区域为宽度为 π 的铅直带域。将整个 z 平面用直线 $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 划分成正切的单叶区域，对其中的每个区域取其相应的 w 平面，在区间 $[-\mathrm{i}, \mathrm{i}]$ 上有割痕，将它们合并在一起则有多值函数 $\operatorname{Arctan} w$

$$z = \operatorname{Arctan} w = \frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{Ln} \frac{1 + \mathrm{i}w}{1 - \mathrm{i}w} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + w}{1 - w}$$

其中有两个分岔点: $\pm \mathrm{i}$

类似有

$$
\begin{aligned}
z &= \operatorname{Arctan} w = \frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i} \\
z &= \operatorname{Arth} w = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} \\
z &= \operatorname{Arcth} w = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}
\end{aligned}
$$

例题 1.12 设 g 为平面 z 上的铅垂带 (вертикальная полоса)

$$g : 0 < x < \pi$$

而 G 为变量 w 的平面，沿实轴沿射线 $(\infty, -1]$ 与 $[1, \infty)$ 切割。证明

$$g \xrightarrow[\text{共形}]{\cos z} \mathrm{G}$$

1.4 Cauchy 积分理论

1825 年左右，Cauchy 在研究流体力学时发现 Cauchy 积分公式，他将解析函数表示为沿边界的含参变量积分，为解析函数的研究提供了一个非常有用的工具。解析函数的许多最基本的性质可通过 Cauchy 积分公式得到。另外还有与 Cauchy 积分公式 (1.24) 等价的 Cauchy 积分定理 (1.21)，这两个等价的定理共同成为了复变函数论的基石之一。另外可由所谓 Cauchy-Green 公式 (1.25) 直接推导出这两个等价的定理

1.5 参数化曲线与复积分

定义 1.23 (参数化曲线光滑性)

设 L 为参数化曲线，其参数方程为

$$z = \lambda(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

类似实分析情形定义，若 $z'(t)$ 存在，并在区间 $[\alpha; \beta]$ 上连续，且满足 $\forall t \in [a; b] : z'(t) \neq 0$，其中在点 $t = a$ 和 $t = b$ 处，$z'(a)$ 和 $z'(b)$ 为下列单侧极限

$$z'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{z(a+h) - z(a)}{h}, z'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}$$

则称参数化曲线 L 光滑

另外，若 $z'(t)$ 在区间 $[\alpha; \beta]$ 上连续并存在划分 $T : t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$ 为 $[\alpha; \beta]$ 使得 $z(t)$ 在区间 $[t_k; t_{k+1}]$ 上光滑，其中，在点 $t_k (k = 1, \cdots, n-1)$ 处的右导数和左导数不一定相等，则称参数化曲线分段光滑 ♣

注 (参数化曲线方向)

为了明确起见，在参数化曲线 L 上选择一个对应于参数增加的方向。则自然称点 $z_0 = \lambda(\alpha)$ 为曲线 L 的起点，称点 $\lambda(\beta)$ 为曲线终点。具有相反方向的相同曲线记为 $-L$

定义 1.24

在复平面上给定一条光滑曲线 L，并将其参数化

$$z = \lambda(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

设 $T : t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$ 为 $[\alpha; \beta]$ 任意划分 (разбиение)，称

$$\delta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{t_k - t_{k-1}\}$$

为该划分的直径 (диаметр)。则曲线 L 在弧上的划分记为 $T_\ell : \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$，其中弧 ℓ_k 的起点为 $z_{k-1} =$

$\lambda(t_{k-1}) = x_{k-1} + iy_{k-1}$，终点为 $z_k = \lambda(t_k)$

设函数 $w = f(z)$ 定义在曲线 L 的点上（由光滑性条件有连续性），在每个区间段 $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$ 中选择一个任意值 τ_k，则有弧 ℓ_k 上一个介点 $\zeta_k = \lambda(\tau_k)$。记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ 且有对应划分 T_ℓ 的复积分和

$$S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{1.10}$$

若和 $S(t_k, \tau_k)$ 当 $\delta \to 0$ 时存在极限，且与划分和在划分弧上介点 $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ 的选择无关，则称该和为函数 f（在给定方向上）沿曲线 L 的积分 (интеграл от функции f вдоль кривой L(в выбранном направлении))，称 f 沿 L 可积 (интегрируема по L)，记为

$$\int_L f(z)dz$$

♣

定理 1.17 (可求长充分条件/достаточное условие спрямляемости)

设 $\lambda(t)$ 为分段光滑曲线 (кусочно-гладкая кривая)，则 $x(t)$ 与 $y(t)$ 为分段光滑曲线，且 $\lambda(t)$ 可求长 ♡

定理 1.18

设 L 为无奇点的分段光滑曲线，若函数 $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 L 上定义且沿其连续，则函数 f 沿 L 可积且有

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy \tag{1.11}$$

♡

证明 将 $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k) = u_k + iv_k$ 代入积分和 (1.10) 有

$$S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)$$

该数的实部和虚部为第二类曲线积分 (криволинейный интеграл 2-го рода) $\int_L udx - vdy$ 与 $\int_L vdx + udy$ 的积分和，而由条件两个积分都存在，则由 $\delta \to 0$ 处的极限过程即得所需等式

性质 （复积分性质）

函数 $f_1(z), f_2(z)$ 在曲线 L 上连续，则路径积分满足下列性质：

1)（反向性）

$$\int_{-L} f(z)dz = -\int_L f(z)dz$$

其中 $-L$ 为 L 的反方向曲线

2)（线性性）

$$(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}) : \int_L (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)) = c_1\int_L f_1(z)dz + c_2\int_L f_2(z)dz$$

3)（分段求和性）设曲线 $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_q$，其中 L_j 为终点与 L_{j+1} 起点重合的弧 $(j = 1, 2, \ldots, q-1)$，则有

$$\int_{L_1+L_2+\cdots+L_q} f(z)dz = \sum_{j=1}^{q}\int_{L_j} f(z)dz$$

4)（积分不等式一）

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \leqslant \int_L |f(z)|d\sigma$$

其中右侧为第一类实曲线积分，σ 为曲线 L 的弧长

5)（积分不等式二）

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \leqslant M\ell$$

其中 $M=\sup\limits_{z\in L}|f(z)|$，$\ell$ 为 L 的长度

证明 （仅证明两个积分不等式）4) 令 $z=\lambda(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 为曲线 L 的参数方程，假设 $\lambda(t)$ 分段光滑，则有

$$\int_L f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[\lambda(t)]\lambda'(t)dt$$

5) 估计

$$|S(t_k,\tau_k)|\leqslant\sum_{k=1}^n|f(\zeta_k)||\Delta z_k|$$

将段 $|\Delta z_k|$ 的长度替换为 σ_k 的 k 阶部分弧的长度，则由 $\delta\to 0$ 极限过程即证

注 （长大不等式）

有时合并两个积分不等式，并称合并后的不等式为“长大不等式”，亦可直接由下面不等式取极限得到

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k\right|\leq\sum_{k=1}^n|f(\zeta_k)||\Delta z_k|\leq\sum_{k=1}^n|f(\zeta_k)|\Delta s_k\leq M\sum_{k=1}^n s_k=M\ell$$

其中 Δs_k 是小弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 之长

例题 1.13 （积分圆参数化）计算积分

$$I=\int_{|z-a|=\rho}\frac{dz}{z-a}$$

解 引入积分圆的参数化 $z=\lambda(t)=a+\rho e^{it},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 并由 $dz=i\rho e^{it}dt$ 得

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}}dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$$

注 该结果不依赖积分圆的半径 ρ 和圆心 a 的位置

定义 1.25 (闭曲线)

若曲线 $L:z=\lambda(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 的起点和终点全等，即 $\lambda(\alpha)=\lambda(\beta)$，则称曲线 L 为闭曲线 ♣

定义 1.26 (重点)

若点 $z_0\in L$ 满足

$$z_0=\lambda(t_1)=\lambda(t_2),\quad\{t_1,t_2\}\neq\{\alpha,\beta\}$$

则称 z_0 为曲线 L 的重点 (кратная точка кривая)

称没有多重点的曲线为单 (простая) 曲线或 Jordan 曲线 (жордановая кривая) ♣

定义 1.27 (路径积分)

称闭 Jordan 曲线为闭路 (контур)，称函数 $f(z)$ 沿闭路 Γ 的积分为路径积分 (контурный интеграл)，记为

$$\oint_\Gamma f(z)$$

♣

定理 1.19 (Jordan 定理)

任意闭 Jordan 曲线 Γ 分成两个不同的区域（即曲线为边界），且其中一个区域有限，另一个区域无穷 ♡

注 称其中有限的区域为 Γ 的内部 (interior)，记为 $\operatorname{int}\Gamma$，称其中无穷的区域为 Γ 的外部 (exterior)，记为 $\operatorname{ext}\Gamma$

定义 1.28 (方向)

设闭 Jordan 曲线 Γ 的外部为 $\operatorname{int}\Gamma$，若 $\operatorname{int}\Gamma$ 保持在沿 Γ 移动的观察者的左侧，则称该方向为绕闭路 Γ

的正方向 (положительное направление обхода контура)，记为

$$\oint_{\Gamma+} f(z)$$

若沿 Γ 的运动发生在相反的方向，则称该方向为负方向，记为

$$\oint_{\Gamma-} f(z)$$

♣

定义 1.29 (闭路连通性)

若对于任意属于区域 G 的闭路 γ，其内部都属于区域 G，则称区域 G 为单连通的 (односвязная)，反之则称区域 G 为多连通的 (многосвязная)

♣

1.6 Cauchy 积分定理与复合闭路路径积分

定理 1.20 (Green 定理)

设区域 D 以闭路 C 为边界，函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 连续且有连续偏导数 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则满足 Green 公式

$$\int_{C+} Pdx + Qdy = \iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{1.12}$$

当且仅当等式右边二重积分为反常二重积分时成立

♡

定理 1.21 (Cauchy 积分定理)

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in \mathcal{A}(G)$，若 C 为任意属于区域 G 及其内部的闭路，则有

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

♡

证明 由定理 (1.11) 有

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$$

若假设区域 D 在闭路 C 的内部，则右边两个公式由 Green 公式 (1.12) 有

$$\oint_C udx - vdy = \iint_{\bar{D}} \left(-v'_x - u'_y\right) dxdy, \oint_C vdx + udy = \iint_{\bar{D}} \left(u'_x - v'_y\right) dxdy$$

则由 D'Alembert-Euler 条件 (1.9)，二积分被积函数等于 0，则左侧复积分等于零

注 该定理证明的困难被浓缩在了 Green 公式中，而采用的解析函数的定义包括导数连续的要求，则是可行的。但若使用解析函数的“较弱”定义并且不需要导数的连续性，则 Cauchy 定理的证明变得更加复杂，可以利用 Goursat 定理来证明。

推论 1.9

设 G 为单连通区域且 $f(z) \in \mathcal{A}(G)$，则对任意闭路 $C \subset G$ 都有

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

♡

例题 1.14 （关于单连通性的反例）圆环 D: $1 < |z| < 3$ 为一个多连通区域，函数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 在其中解析。$f(z)$ 在环内的圆 $|z| = 2$ 上的积分为 $2\pi i$。同时，若忽略单连通性的条件，则根据 Cauchy 积分定理推论 (1.9) 的剩余陈述有 $\dfrac{1}{z}$ 的积分在属于 D 的每个闭路及其内部都为零，这将导出矛盾。

注 该例表明了推论中单连通性的陈述是有意义的

注 这里的 Cauchy 积分定理 (1.21) 及其推论 (1.9) 都经常被统称为 Cauchy 积分定理，另外下面将要给出的广义 Cauchy 积分定理 (1.26) 也经常被称为 Cauchy 积分定理

定义 1.30 (原函数)

若对于所有 $z \in G$ 有 $\Phi'(z) = f(z)$，则称函数 $\Phi \in \mathcal{A}(\mathrm{G})$ 为函数 f 在该区域上的原函数 (первообразная функция)。称函数 f 在给定区域上所有原函数的全体为函数 f 在该区域上的不定积分 (неопределенный интеграл)

♣

性质 （原函数基本性质）

设函数 F 为函数 f 原函数，函数 Φ 为函数 f 另一原函数，则有 $\Phi(z) = F(z) + C, C \in \mathbb{C}$

证明 设 $(\forall z \in G) : \omega(z) = \Phi(z) - F(z)$，则有

$$(\forall z \in \mathrm{G}) : \omega'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

则在表示 $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 中，函数 u 与 v 所有偏导数在区域 G 中全部等于零，因此 u 与 v 为实常数，而 $\omega(z) = C$ 为复常数，则有 $\Phi(z) = F(z) + C, C \in \mathbb{C}$

性质 （曲线积分与积分路径选择无关性）

设 G 为变量为 x 与 y 的 Descartes 平面上区域，其中函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 连续，则以下三个命题等价：

1) 对于任意闭曲线 $L \subset G$ 满足

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

2) 对于任意点 $A, B \in G$，积分

$$\int_L Pdx + Qdy$$

的值不依赖连接点 A 与 B 的（分段光滑）曲线 $L \subset \mathrm{G}$

3) 在 G 上存在连续可微函数 $U(x,y)$ 满足

$$dU = Pdx + Qdy$$

注 由上述命题等价有

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$$

则称函数 U 为势函数 (потенциальная) 或势 (потенциал)，并被定义为常数。特别地，可定义 $U(A) = 0$ 的势，然后积分变为点 B 的函数。一般情况下，该公式即为 Newton-Leibniz 公式的曲线形式

性质 （复变形式曲线积分与积分路径选择无关性）

设 G 为复平面 $\mathbb{C}$ 上区域，函数 $f \in \mathcal{C}(\mathrm{G})$，另有

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

则以下三个命题等价：

1) 对于任意闭路 $L \subset G$ 满足

$$\oint_L f(z)dz = 0$$

2) 积分

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

其中点 $z_0 \in G$ 固定，其变到 G 中 z 不依赖于连接 z_0 与 z 的路径的选择，仅需该路径位于 G

3) 在区域 G 上存在连续可微函数 $U(x,y)$ 与 $V(x,y)$ 满足

$$dU = udx - vdy, \quad dV = vdx + udy \tag{1.13}$$

特别地，可以选择点满足

$$U\left(x_0, y_0\right)=V\left(x_0, y_0\right)=0 \tag{1.14}$$

定理 1.22 (原函数存在充分条件)

设 $f \in \mathcal{C}(\mathrm{G})$，若 f 对任意闭路 $L \subset G$ 满足

$$\oint_L f(z) d z=0$$

则以下命题成立：

1) $F \in \mathcal{A}(\mathrm{G})$

2) $(\forall z \in G): F^{\prime}(z)=f(z)$

证明 设 $\zeta=\xi+i \eta$，$F(z)$ 积分的实部与虚部由公式 (1.14) 选择函数 $U(x, y)$ 与 $V(x, y)$ 得

$$\int_{z_0}^z u d \xi-v d \eta=U(x, y), \quad \int_{z_0}^z v d \xi+u d \eta=V(x, y)$$

根据公式 (1.13) 有

$$U_x^{\prime}=u, \quad U_y^{\prime}=-v, \quad V_x^{\prime}=v, \quad V_y^{\prime}=u$$

则函数 $U(x, y)$ 与 $V(x, y)$ 满足 Cauchy-Riemann 方程 (1.3)，此外这些函数连续可微，则满足 D'Alembert-Euler 条件 (1.9)，则 $F(z)$ 在 G 有连续导数，定理第一个命题得证

计算该导数有 $(\forall z \in G): F^{\prime}(z)=U_x^{\prime}+i V_x^{\prime}=u+i v=f(z)$ 定理第二个命题得证

注 回到 $\Phi(z)=F(z)+C, C \in \mathbb{C}$，由该定理可将 $F(z)$ 替换为原函数

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta) d \zeta+C$$

在等式两边设 $z=z_0$ 则有 $C=\Phi\left(z_0\right)$ 这时公式可以重写为

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d \zeta=\Phi(z)-\Phi\left(z_0\right)$$

这即为复变形式 Newton-Leibniz 公式

注 推广 Cauchy 积分定理 (1.21) 的一个方向为将其扩展到某些类别的非单连通区域，为此先引入复合闭路的概念

定义 1.31 (复合闭路)

若单闭路的并集 $C=C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ 满足：闭路 C_0 被称为外闭路，并包含其他所有内闭路 $C_1, \ldots, C_n$，且 $C_1, \ldots, C_n$ 中任意闭路位于其他任何内部闭路的外部

则称 $C=C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ 为复合闭路 (составный контур)

定义 1.32 (复合闭路方向)

若一个多连通区域 G 的边界为复合闭路 $C=C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ 则称该区域为 $(n+1)$ 连通区域，称当观察者沿边界移动时看到 G 在左方的方向为绕复合闭路边界的正方向 (положительное направление обхода составного граничного контура)，亦即以逆时针遍历外闭路 (обход внешнего контура в направлении против часовой стрелки)，以顺时针遍历内闭路 (обход внутренних контуров по часовой стрелке)

定理 1.23 (复合闭路路径积分)

设 G 为复合闭路 $C=C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ 的有界区域，若函数 $f(z) \in \mathcal{A}(G)$ 在区域边界连续，则有

$$\oint_{C^{+}} f(z) d z=\oint_{C_0^{+}} f(z) d z+\oint_{C_1^{-}} f(z) d z+\cdots+\oint_{C_n^{-}} f(z) d z=0 \tag{1.15}$$

证明 该定理利用 Green 公式 (1.12) 即证

注 式 (1.15) 经常被改写为

$$\oint_{C_0^+} f(z)dz = \oint_{C_1^+} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n^+} f(z)dz$$

例题 1.15 （复合闭路路径积分）设 Γ 为单闭路，包含点 $z_0 = 0$，求函数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 的积分

解 构造半径为 ρ 的圆周 $\gamma : |z| = \rho$，使 γ 属于闭路 Γ 的内部，对函数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 和带有 Γ 外边界的双连通区域以及 γ 内边界应用关于复合闭路路径积分的定理 (1.23)

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{dz}{z} = \oint_{\gamma^+} \frac{dz}{z}$$

其与前面计算的 $2\pi i$ 相同

1.7 Cauchy-Green 公式与 Cauchy 积分公式

定理 1.24 (Cauchy 积分公式)

设 $f \in \mathcal{A}(\mathrm{G})$，闭路 $L \subset G$，子区域 $\mathrm{D} \subset \mathrm{G}$ 以闭路 L 为边界，则对任意 $z_0 \in \mathrm{D}$ 成立公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

♡

证明 [证明一：利用复合闭路路径积分定理 (1.23)] 引入 L 内圆周 $\gamma_\rho : |z - z_0| = \rho$，设 E 为边界为复合闭路 $L \cup \gamma_\rho$ 的区域，由复合闭路路径积分的定理 (1.23) 有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \tag{1.16}$$

让 ρ 趋于零，并注意由公式 (1.16)，右端积分值不依赖于 ρ。另一方面，欲证当 $\rho \to 0$ 时该积分有极限 $f(z_0)$，由此则有 (1.16) 中二积分都等于 $f(z_0)$

下估计差

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0)$$

利用

$$\oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

则有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 1$$

两边同乘 $f(z_0)$ 则有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)\, dz}{z - z_0}$$

进而记 γ_ρ 的长度为 l_γ 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \gamma_\rho} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} l_\gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \gamma_\rho} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{\rho} 2\pi\rho = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z) - f(z_0)| \end{aligned}$$

由函数 f 在子区域 D 中解析，在点 z_0 处连续，则由 $\rho \to 0$ 有右侧最大值趋于零。则 Cauchy 积分公式得证

证明 [证明二：利用 Cauchy 积分定理 (1.21)] 取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $\overline{D(z, \varepsilon)} \subset G$，令 $D = G - \overline{D(z, \varepsilon)}$，下面

固定 z，令 w 作为 D 的变量，对 D 利用 Cauchy 积分定理 (1.21) 有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=0$$

但 $\partial D=\partial G\cup\{-\partial D(z,\varepsilon)\}$，则有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{a}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|w-z|=\varepsilon}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$$

由于 $f(w)$ 在 z 点可导，则有 $f(w)=f(z)+f'(z)(w-z)+\rho(w,z)(w-z)$，其中函数 $\rho(w,z)$ 满足 $\lim\limits_{w\to z}\rho(w,z)=0$。上式两边同乘 $\dfrac{1}{w-z}$ 后积分即得

$$\oint_{|w-z|=\varepsilon}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\oint_{|w-z|=\varepsilon}\frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w+\oint_{|w-z|=\varepsilon}f'(z)\mathrm{d}w+\oint_{|w-z|=\varepsilon}\rho(w,z)\mathrm{d}w \tag{1.17}$$

注意到

$$\oint_{|w-z|=\varepsilon}\frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w=2\pi\mathrm{i}f(z),\oint_{|w-z|=\varepsilon}f'(z)\mathrm{d}w=0$$

而当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\oint_{|w-z|=\varepsilon}\rho(w,z)\mathrm{d}w\to 0$$

另一方面，由式 (1.17) 得积分

$$\oint_{|w-z|=\varepsilon}\rho(w,z)\mathrm{d}w$$

为不依赖 ε 的常数，因此它必须等于零。由此即得

$$\oint_{|w-z|=\varepsilon}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=2\pi\mathrm{i}f(z)$$

这即是 Cauchy 积分公式

定义 1.33 (Cauchy 积分)

设 $f\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$，闭路 $L\subset G$，子区域 $\mathrm{D}\subset\mathrm{G}$ 以闭路 L 为边界，则由定理 (1.24) 有对任意 $z_0\in\mathrm{D}$ 都有 Cauchy 积分公式：

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

称公式右端积分为 Cauchy（型）积分。除特别指出之外，约定绕闭路方向为正方向 ♣

注 (Cauchy 积分公式)

Cauchy 积分公式表达了解析函数最重要的性质：给定 f 在闭路 L 上取值，可以唯一确定该函数在 L 所所在区域任意点的值（L 为区域边界）

推论 1.10 (平均值公式/формула среднего значение)

设 G 为以点 z_0 为圆心半径为 R 的圆，$f\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$，闭路 $L\subset G$，子区域 $\mathrm{D}\subset\mathrm{G}$ 以闭路 L 为边界。若对 L 参数化 $z=z_0+Re^{i\phi}$，则有公式

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+Re^{i\phi}\right)}{Re^{i\phi}}iRe^{i\phi}d\phi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+Re^{i\phi}\right)d\phi$$

♡

证明 由 Cauchy 积分公式 (1.24) 即证

注 该公式名称的由来：沿闭区间的积分值（该段的长度）为有限数集的算术平均值的连续情形类比

例题 1.16 (Cauchy 积分公式) 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

解 考虑区域 $D = D(0,2) - D(\mathrm{i}, \frac{1}{2}) - D(-\mathrm{i}, \frac{1}{2})$，显然函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$ 在 D 上解析，在 $\bar{D}$ 上连续，则由 Cauchy 积分定理 (1.21) 得

$$\oint_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

但 $\partial D = \partial D(0,2) - \partial D(\mathrm{i}, \frac{1}{2}) - \partial D(-\mathrm{i}, \frac{1}{2})$，因此则有

$$\oint_{|z|=2} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{|z-\mathrm{i}|=1/2} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{|z+\mathrm{i}|=1/2} f(z)\mathrm{d}z$$

若令 $f_1(z) = \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}$，则 $f_1(z)$ 在圆 $D(\mathrm{i}, \frac{1}{2})$ 的邻域上解析，因此由 Cauchy 积分公式 (1.24) 得

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}} f_1(z)\frac{1}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{\sin\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \pi\sin\mathrm{i}$$

同理有

$$\oint_{|z+\mathrm{i}|=1/2} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{\sin(-\mathrm{i})}{-2\mathrm{i}} = \pi\sin\mathrm{i}$$

因此得

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\sin\mathrm{i}$$

注 下面考虑引入更现代化的记号来揭示前面证明的本质。下记

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z},$$

视 $z, \bar{z}$ 为独立变量，定义微分外乘积满足

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z = 0, \quad \mathrm{d}\bar{z}\wedge\mathrm{d}\bar{z} = 0, \quad \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z} = -\mathrm{d}\bar{z}\wedge\mathrm{d}z$$

其中 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$, $\quad \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y$ ，则有

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z = (\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) = -\mathrm{i}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 2\mathrm{i}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 2\mathrm{i}\mathrm{d}A$$

其中 $\mathrm{d}A$ 为二维面积元

定义零次外微分形式为函数 $f(z,\bar{z})$，一次外微分形式为 $\omega_1\,\mathrm{d}z + \omega_2\,\mathrm{d}\bar{z}$，其中 ω_1, ω_2 为 $z, \bar{z}$ 的函数；二次外微分形式为 $\omega_0\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}$，其中 ω_0 为 $z, \bar{z}$ 的函数；定义外微分算子 d，它作用在外微分形式 ω 上，定义为

$$\mathrm{d}\omega = \partial\omega\wedge\mathrm{d}z + \bar{\partial}\omega\wedge\mathrm{d}\bar{z}$$

显然也可以证明 $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$ 对任意外微分形式 ω 都成立，则有复形式的 Green 公式如下：

（复形式的 Green 公式）若 $\omega = \omega_1\,\mathrm{d}z + \omega_2\,\mathrm{d}\bar{z}$ 为区域 Ω 上的一次外微分形式，其中 $\omega_1 = \omega_1(z,\bar{z}), \omega_2 = \omega_2(z,\bar{z})$ 均为 $z, \bar{z}$ 的可微函数，d 为外微分算子，即 $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$，记 Ω 的边界为 $\partial\Omega$，则有

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \iint_{\Omega}\mathrm{d}\omega$$

定理 1.25 (Cauchy-Green 公式/Pompeiu 公式)

若 $U \subseteq \mathbb{C}$ 为有界区域，有 C^1 边界，即边界为光滑曲线，$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \in C^1(\bar{U})$，即 $u(x,y), v(x,y)$ 在 $\bar{U}$ 上有一阶连续偏导数，则有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_U \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_U \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

证明 在 z 点附近作一个以 z 为中心，$\varepsilon(\varepsilon > 0)$ 为半径的小圆 $D(z,\varepsilon)$，且 $D(z,\varepsilon) \subset U$，记 $U_{z,\varepsilon} = U \backslash D(z,\varepsilon)$。在 $U_{z,\varepsilon}$ 中考虑微分形式 $\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$

则由复形式的 Green 公式得

$$\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}-\int_{\partial D_{z,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}=\iint_{U_{z,\varepsilon}}\mathrm{d}_\zeta\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right)$$

由 d_ζ 的定义，得

$$\iint_{U_{z,\varepsilon}}\mathrm{d}_\zeta\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right)=\iint_{U_{z,\varepsilon}}(\partial+\bar\partial)\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right)=\iint_{U_{z,\varepsilon}}\partial\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right)+\iint_{U_{z,\varepsilon}}\bar\partial\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right)$$

由

$$\partial\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta=0$$

以及

$$\bar\partial\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right)=\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}+f\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta$$

而 $\dfrac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)=0$，则有

$$\bar\partial\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right)=\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$$

则有

$$\iint_{U_{z,\varepsilon}}\mathrm{d}_\zeta\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{z}\right)=\iint_{U_{z,\varepsilon}}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar\zeta\Lambda\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$$

另一方面，由

$$\int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}=\int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

以及假设 $f(\zeta)\in C^1(\bar U)$，则存在常数 c，使得

$$|f(\zeta)-f(z)|<c|\zeta-z|$$

在 $\partial D(z,\varepsilon)$ 上成立，则有

$$\left|\int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right|<c\int_{\partial D(z,\varepsilon)}\left|\frac{\zeta-z}{\zeta-\bar z}\right||\mathrm{d}\bar\zeta|=2\pi\varepsilon c$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，上述积分趋于零，而当 $\zeta\in\partial D(z,\varepsilon)$ 时，ζ 可表示为 $\zeta=z+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，则有

$$\int_{\partial D(z,\epsilon)}\frac{f(z)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}=f(z)\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta}}=2\pi\mathrm{i}f(z)$$

则有

$$\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}-2\pi\mathrm{i}f(z)=\iint_{U_{z,\varepsilon}}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}+O(\varepsilon)$$

其中，$O(\varepsilon)$ 表示 ε 的一阶无穷小量，当 $\varepsilon\to0$ 时，定理得证

注 （Cauchy 积分公式与 Cauchy 积分定理等价性）由 Cauchy-Green 公式 (1.25) 即推得 Cauchy 积分公式 (1.24)，而由 Cauchy 积分公式 (1.24) 可以直接推得 Cauchy 积分定理 (1.21)。由此 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式其实是等价的

定理 1.26 (广义 Cauchy 定理/обобщённа тророема Коши)

设 G 为由闭路 C 界定的区域，若函数 $f(z)\in\mathcal{A}(G)$ 在区域边界上连续，可形式化记为区域 $G\subset\mathbb{C}$ 有界且有 C^1 边界 ∂G，函数 $f(z)\in\mathcal{A}(G)$ 且 $f(z)\in C^1(\overline{G})$，则有

$$\oint_C f(z)dz=\oint_{\partial G}f(z)dz=0$$

♡

注 该陈述为 Cauchy-Green 公式 (1.25) 的推论

1.8 Leibniz 法则与解析函数导数 Cauchy 积分表示

定理 1.27 (Leibniz 法则/правила Лейбница)

设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续，且在其上有连续导数 $f'_y(x,y)$，则有积分

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

为 在 $[c;d]$ 上可微函数，且满足 Leibniz 法则：

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx$$

♡

定理 1.28 (多元形式 Leibniz 法则)

设函数 $f(x,y_1,\ldots,y_m)$ 在平行六面体 (параллелепипед)$\Pi_m=\{a\leqslant x\leqslant b, c_i\leqslant y_i\leqslant d_i(i=1,2,\ldots,m)\}$ 上连续，且在其上有连续导数 $f'_{y_i}(x,y_1,\ldots,y_m), i=1,2,\ldots,m$，则有积分

$$I(y_1,\ldots,y_m)=\int_a^b f(x,y_1,\ldots,y_m)\,dx$$

对变量 $y_1,\ldots,y_m$ 在区域 $c_i\leqslant y_i\leqslant d_i(i=1,2,\ldots,m)$ 有连续偏导数，且满足 Leibniz 法则：

$$l'_{y_i}(y_1,\ldots,y_m)=\int_a^b f'_{y_i}(x,y_1,\ldots,y_m)\,dx, i=1,2,\ldots,m.$$

♡

定理 1.29 (曲线积分形式 Leibniz 法则)

设函数 $P(x,y,z_1,\ldots,z_m)$ 与 $Q(x,y,z_1,\ldots,z_m)$ 在集合 $\{(x,y)\in L, \quad c_i<z_i<d_i(i=1,2,\ldots,m)\}$ 上连续，且在其上有连续导数

$$P'_{z_i}(x,y,z_1,\ldots,z_m), Q'_{z_i}(x,y,z_1,\ldots,z_m), i=1,2,\ldots,m$$

则有曲线积分

$$I(z_1,\ldots,z_m)=\int_L Pdx+Qdy$$

对变量 $z_1,\ldots,z_m$ 在区域 $c_i<z_i<d_i(i=1,2,\ldots,m)$ 有连续偏导数，且满足 Leibniz 法则：

$$I'_{z_i}(z_1,\ldots,z_m)=\int_L P'_{z_i}(x,y,z_1,\ldots,z_m)\,dx+Q'_{z_i}(x,y,z_1,\ldots,z_m)\,dy, i=1,2,\ldots,m$$

♡

定理 1.30 (复变形式 Leibniz 法则)

设积分

$$F(z)=\int_L \phi(z,\zeta)d\zeta$$

满足下列条件：

1) L 为变量 $\zeta=\xi+i\eta$ 的平面上的曲线，而 z 在变量 $z=x+iy$ 的平面的某区域 G 上变化

2) $(\forall\zeta\in L):\phi(z,\zeta)\in\mathcal{A}(G)$

3) 函数 $\phi(z,\zeta)$ 与 $\phi'_z(z,\zeta)$ 在 z 与 ζ 的变集上连续

则有下列命题成立：

1)$F(z)\in\mathcal{A}(G)$

2) 导数 $F'(z)$ 满足 Leibniz 法则：

$$F'(z)=\int_L \phi'_z(z,\zeta)d\zeta$$

♡

证明 以代数形式表示 $\phi(z,\zeta)$ 与 $F(z)$ 得

$$\begin{aligned}\phi(z,\zeta)&=u(x,y,\xi,\eta)+iv(x,y,\xi,\eta)\\ F(z)&=U(x,y)+iV(x,y)\\ &=\int_L u(x,y,\xi,\eta)d\xi-v(x,y,\xi,\eta)d\eta+i\int_L v(x,y,\xi,\eta)d\xi+u(x,y,\xi,\eta)d\eta\end{aligned}$$

则由条件有 u 与 v 在四个实参数集上连续。且有 x 与 y 有偏导数，也在所有四个实参数集上连续。由此有 $U(x,y)$ 与 $V(x,y)$ 连续且在区域 G 上有连续偏导数，则由 Leibniz 法则得

$$\begin{aligned}U_x'(x,y)&=\int_L u_x'd\xi-v_x'd\eta,\quad U_y'(x,y)=\int_L u_y'd\xi-v_y'd\eta\\ V_x'(x,y)&=\int_L v_x'd\xi+u_x'd\eta=\int_L -u_y'd\xi+v_y'd\eta=-U_y'(x,y)\\ V_y'(x,y)&=\int_L v_y'd\xi+u_y'd\eta=\int_L u_x'd\xi-v_x'd\eta=U_x'(x,y)\end{aligned}$$

则函数 $U(x,y)$ 与 $V(x,y)$ 的连续偏导数在区域 G 上满足 Cauchy-Riemann 方程 (1.3) 。则由 D'Alembert-Euler 条件 (1.9) 有 $F(z)\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$，第一个命题得证

下求导数 $F'(z)$

$$F'(z)=U_x'+iV_x=\int_L u_x'd\xi-v_x'd\eta+i\int_L v_x'd\xi+u_x'd\eta$$

同时有 $\phi_z'(z,\zeta)=u_x'+iv_x'$ ，即得

$$\int_L \phi_z'(z,\zeta)d\zeta=\int_L u_x'd\xi-v_x'd\eta+i\int_L v_x'd\xi+u_x'd\eta$$

第二个命题公式即证

定义 1.34

若解析函数 f 满足

$$(\forall z_1,z_2\in D\subset\mathbb{C}):[(z_1\neq z_2)\Rightarrow(f(z_1)\neq f(z_2))]$$

则称该解析函数为单叶解析函数，简称为单叶函数 (univalent function)

♣

定理 1.31

若 $f(z)$ 为开集 G 上的单叶解析函数，则 $f(G)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的开集，$f'(z)$ 在 Ω 上处处不为零

♡

证明 由开映射定理 (3.1) 得 $f(G)$ 为开集，因此仅需证 $f'(z)$ 在 G 上处处不为零。假设存在 $z_0\in G:f'(z_0)=0$。若 z_0 为 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 阶零点，则 $m>1$，因此局部 f 为 m 对 1 的映射，与 f 的单叶性矛盾

定理 1.32 (解析函数导数 Cauchy 积分表示)

设 $f\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$，函数在每个点 $z\in G$ 都有任意阶导数。若闭路 L 与其内部都属于 G，且 z 为该闭路内点，则导数 $f^{(n)}(z)$ 满足公式

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \tag{1.18}$$

♡

证明 在区域 G 中引入点 z 的邻域，即开圆 $K_\rho:|\zeta-z|<\rho$，其中邻域半径 ρ 可选择使其小到边界圆 γ_ρ 也属于区域 G，该圆满足定理对闭路 L 的要求。

将 $f(z)$ 写为沿闭路 L 的 Cauchy 积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta$$

若假设 ζ 沿 L 变化，且 z 在 L 内部变化，则该 Cauchy 积分满足复变形式 Leibniz 法则 (1.30) 中条件，则有

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

则得导数 $f^{(n)}(z)$ 的积分表示，而其右端 Cauchy 积分仍然满足复变形式 Leibniz 法则 (1.30) 中条件，则有二阶导数 $f''(z)$ 存在且有等式

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta$$

重复上述步骤即得

$$f'''(z)=\frac{3!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^4}d\zeta$$

以此类推，则由归纳法即得定理中公式

注 若 Γ 为区域 G 的边界（简单或复合）闭路且函数 $f\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$ 在 Γ 上保持连续性，则可以利用 Γ 作为闭路 L 用在定理公式中

推论 1.11 (解析函数导数解析性)

解析函数的导数也为解析函数 ♡

证明 设 $f\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$，则由解析函数导数计算公式 (1.18) 即得其导数 $f'(z)$ 在区域 G 上有任意阶导数

推论 1.12 (Morera 定理/теорема Морера)

(Morera[a]定理/теорема Морера) 设 $f\in\mathcal{C}(\mathrm{G})$，若 f 对任意闭路 $L\subset G$ 满足

$$\oint_L f(z)dz=0$$

则有 $f\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$

[a]莫雷拉 (Giacinto Morera,1856.7.18-1909.2.8) 意大利数学家。以在复变函数论中 Morera 定理和在线性弹性理论方面的工作而闻名 ♡

证明 由原函数存在充分条件 (1.22) 有 G 上存在解析函数 F 满足

$$(\forall z\in G):F'(z)=f(z)$$

由推论 (1.11) 有 $f(z)$ 本身必为 G 中的解析函数

注 该定理实际上为 Cauchy 积分定理 (1.21) 的逆定理

推论 1.13 (Liouville 定理/теорема Лиувилля)

整函数 f 若在复平面上有界，则 f 为常数 ♡

证明 设 z_0 为复平面任意点，γ_R 为以 z_0 为圆心半径 R 的圆周。记 $f'(z_0)$ 为 Cauchy 积分形式

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta \tag{1.19}$$

由 $f(z)$ 为整函数，则该等式中半径 R 可以取任意大。令 M 为正常数且有 $(\forall z\in G):|f(z)|\leqslant M$，则由公式 (1.19) 有 $|f'(z_0)|$：

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\max_{\zeta\in\gamma_R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^2}l_\gamma\leqslant\frac{M}{R^2}R=\frac{M}{R}$$

其中 l_γ 为圆周的长度。当 $R\to\infty$ 时有 $f'(z_0)=0$，而由 z_0 为复平面上任意点，则函数 f 为一个常数

推论 1.14 (代数基本定理/основная теорема алгебры)

任意正次数 n 多项式 $P(z)$ 存在根 ♡

证明 反证：设 $P(z)$ 没有根。则函数 $f(z)\equiv\dfrac{1}{P(z)}$ 为定义在复平面上的整函数。由当 $z\to\infty$ 时有 $P(z)\to\infty$，则有当 $z\to\infty$ 时有 $f(z)\to 0$。由此即有 $f(z)$ 在复平面上有界，则由 Liouville 定理 (1.13) 有 $f(z)$ 为常数，但

这时有 $P(z)$ 为常数，矛盾

例题 1.17 （Cauchy 积分公式求导）设

$$f(z)=\oint_{|\xi|=3}\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

求 $f'(1+i)$

解 设 $g(z)=3z^2+7z+1$，显然其在整个复平面上解析，则由 Cauchy 积分公式 (1.24) 有

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=3}\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}f(z)$$

则由 $f(z)=2\pi i g(z)$ 有 $f'(z)=2\pi i g'(z)$，而 $g'(1+i)=6(1+i)+7=13+6i$，则有 $f'(1+i)=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i)$

第 2 章 Weierstrass 级数理论

2.1 Taylor 定理与唯一性定理

定义 2.1 (正规收敛)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$，若该级数在每个紧集 (компакт)$\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ 上一致收敛到 f，则称级数在区域 G 上正规收敛 (сходится нормально) 到 f ♣

定理 2.1 (Weierstrass 第一定理/первая теорема Вейерштрасса)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$，其中 $u_n(z) \in \mathcal{A}(G), n = 1, 2, \ldots$，且在区域 G 上正规收敛到 f，则下列命题成立：

1) $f \in \mathcal{A}(G)$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 可以任意次逐项微分，即

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z), z \in G \tag{2.1}$$

3) 公式 (2.1) 中级数在区域 G 上正规收敛 ♡

证明 （仅证前两个命题）1) 欲证级数和 f 在每个点 $z_0 \in \mathrm{G}$ 的某个邻域内解析。固定任意点 $z_0 \in G$，由解析函数 Cauchy 积分表示定理 (1.32) 可设 $\overline{\mathrm{K}}$ 为以 z_0 为圆心的闭圆。由条件有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在圆 $\overline{\mathrm{K}}$ 上一致收敛，由一致收敛级数的连续性定理有级数和 f 在 $\overline{\mathrm{K}}$ 上连续

设 L 位于 $\overline{\mathrm{K}}$ 内任意闭路（不接触边界），由一致收敛级数的可积性定理，有逐项积分

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_L u_n(z)dz$$

在简单连通区域中（在圆 $\bar{K}$ 的内部）解析函数 $u_n(z)$ 的路径积分为零，即

$$\oint_L f(z)dz = 0$$

则在圆 $\overline{\mathrm{K}}$ 上连续的函数 f 在该圆内满足对任意闭路 L 满足

$$\oint_L f(z)dz = 0$$

由 Morera 定理 (1.12) 有 f 在 $\bar{K}$ 内解析，则第一个命题得证

2) 固定任意点 $z_0 \in G$。设 γ_ρ 以 z_0 为圆心的属于区域 G 圆周。在该圆周上如在紧集上，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 一致收敛到 f。若级数每一项都乘上以 γ_ρ 为界的函数，则一致收敛性不变。固定任意 $k \in \mathbb{N}$，并把它当作一个有界函数 $\dfrac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$，因此有等式

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \tag{2.2}$$

且右侧级数在 γ_ρ 上一致收敛

沿 γ_ρ 由等式 (2.2) 并两边同乘 $\dfrac{k!}{2\pi i}$ 则有

$$\frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

则有 $f^{(k)}(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0)$，而由点 $z_0 \in \mathrm{G}$ 任意性，第二个命题得证

引理 2.1

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$，其收敛半径为 $R>0$，则幂级数在圆 K_R 上正规收敛

证明 考虑关系 $\mathrm{K} \subset \overline{\mathrm{K}}_r \subset \mathrm{K}_R$，若 $R=+\infty$ 显然。下设 R 为有限数，不交闭集 K 与 $\gamma_R : |z-z_0| = R$ 距离为 δ ，则对于所需圆 $\overline{\mathbf{K}}_r$ ，可取一个半径为 $r = R-\delta$ 的圆

由 Cauchy-Hadamard 定理 (??)，则幂级数在圆 K_R 的内点 z_0+r 绝对收敛，即非负级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 收敛，而该级数可作为圆 $\overline{\mathbf{K}}_r$ 中考虑的幂级数的在紧集 K 上强级数，由 Weierstrass 强级数判别法 (??)，则幂级数一致收敛于任意这样的紧集，引理得证

注 将 Weierstrass 第一定理 (2.1) 应用于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$，则幂级数的和 $f(z)$ p 在其收敛圆 K_R 上解析，且幂级数可以多次逐项微分，并给出

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$

应用 Cauchy-Hadamard 公式可知所有微分后级数与原始幂级数有相同的收敛半径

定理 2.2 (Taylor 定理)

设 $f \in \mathcal{A}(\mathrm{G})$ 和 $z_0 \in G$ 为与区域 G 边界 Γ 间距离为 r 的点，则在圆盘 $\mathrm{K}_r : |z-z_0| < r$ 上函数 f 可用 $z-z_0$ 的幂级数表示，且这种表示唯一

证明 唯一性：类似实情形的命题 (??) 即证

存在性：固定圆盘 K_r 上任意点 z 并构造一个辅助圆周 $\gamma_\rho : |\zeta - z_0| = \rho$ 使得 $\gamma_\rho \subset K_r$ 与 $z \in \operatorname{int} \gamma_\rho$。由 Cauchy 积分公式 (1.24) 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

由对任意 $\zeta \in \gamma_\rho$ 有 $\dfrac{|z-z_0|}{|\zeta - z_0|} < 1$，则被积函数 $\dfrac{1}{\zeta - z}$ 可以替换为无穷几何级数

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

将关系式两端乘上 $f(\zeta)$ 则有

$$\frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \tag{2.3}$$

而由强级数

$$\max_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$$

与 Weierstrass 强级数判别法 (??) 即有等式 (2.3) 右端级数一致收敛到圆周 γ_ρ 上，则由幂级数逐项积分定理 (??) 有等式 (2.3) 在圆周 γ_ρ 上可逐项积分：

$$\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

再两边除以 $2\pi i$，左边积分变为 Cauchy 积分，则得 $f(z)$。假设

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

该积分为 Cauhcy 积分，其值为

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

另有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$$

而系数 c_n 不依赖于 z。因此对于圆盘 K_r 任意点 z 有该等式给出了 f 关于 $z-z_0$ 的幂级数表示，定理即证

例题 2.1 （幂级数展开）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 沿幂级数展开：(A) z (B) $z-1$

解 函数 $f(z)$ 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上解析，除点 $z=\pm i$，该两点为其解析域边界

(A) 点 $z=0$ 到函数 $f(z)$ 的奇点的距离为 $1 f(z)$，由 Taylor 定理 (2.2)，$f(z)$ 可在圆盘 $|z|<1$ 中展开为 z 的幂级数，则函数为无穷级数的和：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$

(B) 点 $z=1$ 到函数 $f(z)$ 的奇点的距离为 $\sqrt{2}$，由 Taylor 定理 (2.2)，$f(z)$ 可在圆盘 $|z-1|<\sqrt{2}$ 上展开为 $z-1$ 的幂级数。为此，将 $f(z)$ 表示为最简分数线性组合，则有

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$$

将函数 $\dfrac{1}{z-i}$ 变为乘积

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{1-i}}$$

则可用无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-i)^n}$$

替换 $|z-1|<|1-i|=\sqrt{2}$ 处的真分数，则有

$$\frac{1}{z-i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}},\quad |z-1|<\sqrt{2}$$

同理，对于 $|z-1|<|1+i|=\sqrt{2}$ 可得分解

$$\frac{1}{z+i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

将这些级数代入函数 $f(z)$ 表示中得

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n \tag{2.4}$$

使用常量 $1+i$ 与 $1-i$ 的极坐标形式 $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$，$\quad 1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 计算得级数 (2.4) 系数为实数，即有

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{4}\right]}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n \tag{2.5}$$

由 Cauchy-Hadamard 公式 (??) 则有级数 (2.5) 收敛半径为 $\sqrt{2}$

定理 2.3 (唯一性定理/теорема единственности)

若函数 $\varphi\in\mathcal{A}(\mathbf{G})$ 在子集 $E\subset G$ 上趋近于零，则在区域 $\mathbf{G}$ 中 $\varphi\equiv 0$

证明 1) 欲证函数 $\varphi(z)$ 在圆盘 $K_r:|z-z_0|<r$ 中恒等于零，其中 r 为点 z_0 到 $\mathbf{G}$ 的距离。从子集 E 中挑选出一个收敛到 z_0 的子序列 z_k，这时没有点 $z_k, k>0$ 与 z_0 重合。由 Taylor 定理 (2.2)，在圆盘 K_r 中解析函数 $\varphi(z)$ 可用 $z-z_0$ 的幂级数表示：

$$\varphi(z)=c_0+c_1\left(z-z_0\right)+c_2\left(z-z_0\right)^2+\cdots$$

下归纳证明该级数所有系数为零。

对系数 c_0 有 $c_0=\varphi\left(z_0\right)=\lim\limits_{z_k\to z_0}\varphi\left(z_k\right)=0$，因此，归纳基础得证。现假设已经证明系数 $c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}$

等于零，则展开式可记为

$$\varphi(z)=c_n\left(z-z_0\right)^n+c_{n+1}\left(z-z_0\right)^{n+1}+\cdots$$

设其中 $z=z_k$，则有

$$0=\varphi\left(z_k\right)=c_n\left(z_k-z_0\right)^n+c_{n+1}\left(z_k-z_0\right)^{n+1}+\cdots$$

将两端除以非零数 $\left(z_k-z_0\right)^n$ 则有

$$0=c_n+c_{n+1}\left(z_k-z_0\right)+c_{n+2}\left(z-z_0\right)^2+\cdots$$

当 $z_k\to z_0$ 时有 $c_n=0$，归纳得证

2) 欲证 $\varphi(z)$ 在 $\mathbf{G}$ 处处为零。在圆盘 K_r 外取任意点 $z^*\in G$，再取连接 z_0 的位于 G 的连续曲线 $L:z=\varphi(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$。该曲线与 G 的边界为二不交闭点集，其中至少一个有界（即 L）。因此二者间的距离 δ 为正，并且以曲线 L 的任意点为圆心的半径为 δ 的开圆盘全部属于 G。

设对于圆盘 $K_0:|z-z_0|<\delta$ 有 $(\forall z\in K_0):\varphi(z)\equiv 0$，下描述从点 z_0 到点 z^* 沿曲线 L 移动圆盘 K_0 的过程。在曲线 L 上取一个与点 z_0 距离 $\dfrac{\delta}{2}$ 的点 z_1，并构造一个圆盘 $K_1:|z-z_1|<\delta$。用 E_1 表示圆盘 K_0 与 K_1 的交。将 K_1 作为唯一性定理的基本区域，将 E_1 作为该定理的子集 E，则由 $(\forall z\in E_1):\varphi(z)\equiv 0$ 得 $(\forall z\in K_1):\varphi(z)\equiv 0$；在该过程第二步，点 z_2 位于曲线 L 上，在参数 t 得递增方向上与 z_1 距离 $\dfrac{\delta}{2}$，构建一个圆周 $K_2:|z-z_2|<\delta$。将新圆盘与圆盘 K_1 的交 E_2 视为唯一性定理的子集 E，定理基础区域为 K_2，推导出则 $(\forall z\in K_2):\varphi(z)\equiv 0$，以此类推。

在该过程的每一步，结果表明 $\varphi(z)$ 在新的圆盘中也恒等于零。在有限步骤内，将到达包含点 z^* 的下一个圆盘 K_m。因此 $\varphi\left(z^*\right)=0$，由 z^* 任意性，该定理得证

注 定理也可以改述为至多有一个函数 $f\in\mathcal{A}(\mathbf{G})$ 在子集 $E\subset G$ 上取给定值；或者改述为设函数 $f_1(z),f_2(z)\in\mathcal{A}(\mathbf{G})$ 且点集 $E\subset$ G 有一个属于 G 的极限点 a，若 $f_1(z)=f_2(z)$ 在 E 上恒成立，则 $f_1(z)=f_2(z)$ 在 G 内恒成立

注 唯一性定理通常用于表明实变量函数的某些性质在扩展到复平面时保持不变

推论 2.1 (非零解析函数零点孤立性)

若非零函数 $f(z)\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$，则 $f(z)$ 在 G 内的零点孤立。即若 $f\left(z_0\right)=0$，则存在邻域 $B\left(z_0,\delta\right)(\delta>0)$ 使得 $f(z)$ 在 $B\left(z_0,\delta\right)$ 只有 z_0 一个零点

♡

定义 2.2 (解析函数重点与零点)

称在解析函数 $f(z)$ 取给定值 A 的点为该解析函数的 A-点。特别地，当 $A=0$，称点为零点。若在 A-点 z_0 处函数 $f(z)$ 的 $1,2,\ldots,k-1$ 阶导数为零，但 $f^k\left(z_0\right)\neq 0$，则称该点的阶 (порядок) 或重数 (кратность) 为 k。若 $k=1$，则称 A-点为单点 (простая)，而称 $k>1$ 相反的情况为重点 (кратная)

♣

推论 2.2

设函数 $f(z)\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$ 且其不为常数，则对任意 A，任意紧集 $F\subset G$ 仅能包含该函数的有限 A-点集

♡

证明 若假设对于某个 A，紧集 F 包含函数 $f(z)$ 的无穷 A-点集，则该（有界）集合必有极限点 z_0。由集合 F 为闭集，$z_0\in F$，则有 $z_0\in G$。由唯一性定理 (2.3)，与条件相反，与 A-点集重合且包含常数 A 的函数 $f(z)$，在 G 中任意处都必等于该常数，矛盾

注 在无界区域或非闭集上，除常数之外的解析函数可具有无穷 A-点集。同样，在这种情况下，可能存在各种分析函数，其值在无限的点集上重合。例如，函数 $\sin z,\sin^2 z,\sin 2z$，它们在点 $z_k=k\pi$ 处为零。但这与唯一性定理 (2.3) 并不矛盾，因为序列 z_k 没有有限极限点

推论 2.3

设在 $(a;b)\subset\mathbb{R}$ 定义了实变函数 $\varphi(x)$，并令 $\mathrm{G}\subset\mathbb{C}$ 满足 $(a;b)\subset\mathrm{G}$，则在区域 $\mathbf{G}$ 至多有一个解析函数与 $\varphi(x), x\in(a;b)$ 重合

注 若这样的函数 $f(z)$ 存在,则称其为函数 $\varphi(x)$ 从区间 $(a;b)$ 到区域 $\mathbf{G}$ 的解析延拓 (аналитическое продолжение)。例如复变函数 $\sin z$ 为同名实变函数从实轴到整个复平面的解析延拓

例题 2.2 （唯一性定理）证明：没有在圆盘 $\mathrm{K}:|z|<1$ 上解析的函数 f，其取值 $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}, n=2,3,\ldots$

解 序列 $z_n=\frac{1}{n}$ 有极限点 $z_0=0$，它不属于该序列本身而属于圆周 。考虑 $\{z_n\}$ 作为唯一性定理 (2.3) 中子集 E，则得所需的与解析函数 $g\equiv z$ 在该点上重合的函数 f，必定在 K 上与 g 处处重合。但在序列 $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ 的点上，函数 g 取值 $\left(-\frac{1}{n}\right)$，而不是 $\frac{1}{n}$。则所需函数 f 不存在

推论 2.4

设在实数轴上有恒等式 $f(x)=g(x)$，$f(z),g(z)\in\mathcal{A}(\mathbb{C})$ 且在实轴上分别与 $f(x),g(x)$ 相一致，则对一切复数 z 有 $f(z)=g(z)$

例题 2.3 （唯一性定理）对于任意复数 z 与 w 满足公式

$$\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w$$

解 固定任意实值 w，之后把公式两端都视为 z 的函数，显然，函数都是整函数。由实三角函数得它们在实轴上重合，由唯一性定理 (2.3) 也必在 $\mathbb{C}$ 上重合。则公式对所有实值 w 与所有复数 z 都成立；再固定任意复数 z，之后把公式两端都视为 w 的函数，显然，函数都是整函数。由上述证明得，它们与所有实值 w 重合，同样由唯一性定理 (2.3)，它们必须与所有复数 w 重合

2.2 Laurent 级数与 Laurent 定理

幂级数为理论研究和计算的理想工具，但在许多情况下，函数不能用所需形式的幂级数来表示。例如 $f\in\mathcal{A}(\mathrm{K})$，其中 K 为点 z_0 的去心邻域 (проколотая окрестность)，即形式为 $0<|z-z_0|<R$ 的集合。这时 f 一般不能用 $z-z_0$ 的幂级数来表示。这时 Laurent 级数经常被用作幂级数的替代品。一个函数的特性，除了解析部分外，是由它的奇点特性所决定的. 而用来刻画和研究函数奇性的有力工具就是 Laurent 级数. 复变函数级数理论与实变级数理论最大的不同之处即为：除了 Taylor 级数外，还有 Laurent 级数

定义 2.3 (Laurent 级数)

称形如

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n, \quad c_n, z_0\in\mathbb{C}$$

的级数为在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数 (Ряд Лорана)

而在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数可分为两个部分，称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 为在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数的解析部分（或正则部分 (правильная часть)），称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 为在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数的奇异部分（或主要部分 (главная часть)）

定义 2.4 (Laurent 级数收敛)

当且仅当在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数的解析部分与奇异部分同时在点 $z=z_0$ 处时，称在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数在点 $z=z_0$ 处收敛 ♣

定义 2.5 (收敛半径)

设在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数的解析部分 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$，记其收敛半径为 R_1

而在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数的奇异部分 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$，换元 $\zeta=\frac{1}{z-z_0}$ 后变为幂级数，记幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{-n}\zeta^n$ 收敛半径为 R_2^{-1} ♣

定理 2.4 (Laurent 级数收敛性)

设在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数，则仅有三种情况：

(1) 若 $R_1<R_2$，则解析部分与奇异部分不相交，Laurent 级数不在任何地方收敛

(2) 若 $R_1=R_2\equiv R$，则公共收敛点仅可能在圆周 $|z-z_0|=R$ 上存在

(3) 若 $R_1>R_2$，则解析部分与奇异部分在圆环 $D: R_2<|z-z_0|<R_1$ 中收敛，并且 Laurent 级数在其上绝对且正规收敛到解析函数 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$，其中解析部分绝对且正规收敛到解析函数 $f_1(z)$，奇异部分绝对且正规收敛到解析函数 $f_2(z)$ ♡

证明 设在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数的解析部分 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$，若其收敛半径为 $R_1=0$，则解析部分仅在零处收敛，而在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数处处不收敛。若 $R_1>0$，则在圆盘 $k_1:|z-z_0|<R_1$ 上解析部分绝对且正规收敛到解析函数 $f_1(z)$

设在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数的奇异部分 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$，换元 $\zeta=\frac{1}{z-z_0}$ 后变为幂级数，则若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{-n}\zeta^n$ 收敛半径为零，则奇异部分与 Laurent 级数处处不收敛。若收敛半径为正数，记为 R_2^{-1}，则在圆盘 $k_2:|\zeta|<R_2^{-1}$ 上幂级数绝对且正规收敛。而考虑变量 z，在区域 $K_2:|z-z_0|>R_2$ 上奇异部分绝对且正规收敛某个解析函数 $f_2(z)$

注 该定理表明，对于收敛的 Laurent 级数，典型的收敛区域为以点 z_0 为中心的圆环 (也经常称其为 Laurent 级数地、的收敛圆环)，其边界圆的半径可以使用 Cauchy-Hadamard 公式 (??) 由级数系数中计算

定理 2.5 (收敛 Laurent 级数系数表示唯一性)

设在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数在圆环 $D: R_2<|z-z_0|<R_1$ 上收敛到函数 $f(z)$，则 Laurent 级数系数由 $f(z)$ 唯一地确定，即

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

♡

证明 观察在点 $z=z_0$ 处的 Laurent 级数在圆周 $\gamma:|z-z_0|=\rho$ 上的点，其中 $R_2<\rho<R_1$。在该圆周上 Laurent 级数一致收敛 (圆周为紧集)，若序列每一项都乘上在 γ 上有界的函数，一致收敛性不变。固定整数 k 并取函数

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$$

则有等式

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^{n-k-1}$$

由一致收敛性可沿 γ 逐项积分得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}(z-z_0)^{n-k-1}dz \tag{2.6}$$

其中

$$\oint_{|z-z_0|=\rho}(z-z_0)^m dz=\begin{cases}2\pi i, & m=-1\\ 0, & m\neq -1\end{cases}$$

则仅当 $n=k$ 时，等式 (2.6) 右侧积分非零且等于数 $2\pi i$。因此，等式 (2.6) 实际上简化为

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

其中 k 可为任意整数，则所有系数 c_k 都由函数 $f(z)$ 唯一确定

定理 2.6 (Laurent 定理)

若函数 f 在圆环 $D: R_2<|z-z_0|<R_1$ 上解析，则函数可以表示为在 z_0 点处的 Laurent 级数，其系数为

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

且该表示唯一

♡

证明 存在性：固定环 D 上任意点并构造一个具有相同圆心 z_0 的辅助环 D' 使得 $D'\subset D$ 且 $z\in \operatorname{int} D'$。令 $\Gamma_1':|\zeta-z_0|=R_1'$ 与 $\Gamma_2':|\zeta-z_0|=R_2'$ 为环 D' 的内边界与外边界。将 $f(z)$ 的值写为该环的复合边界上的 Cauchy 积分：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \tag{2.7}$$

由于 $(\forall\zeta\in\Gamma_1'):\dfrac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}<1$，则被积函数分母 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ 可被一个无穷几何级数替换：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

两端乘上 $f(\zeta)$ 则有

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \tag{2.8}$$

由收敛数值级数

$$\max_{\zeta\in\Gamma_1'}|f(\zeta)|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-z_0|^n}{(R_1')^{n+1}}$$

作强函数，则由 Weierstrass 强函数判别法有等式 (2.8) 右端级数在圆周 Γ_1' 上一致收敛，则等式 (2.8) 在圆周 Γ_1' 上可逐项积分得

$$\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

两边除以 $2\pi i$ 并设

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots$$

则有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{2.9}$$

下计算公式 (2.7) 中第二个积分。对于点 $\zeta\in\Gamma_2'$ 有 $\mu=\dfrac{|\zeta-z_0|}{|z-z_0|}<1$，则被积函数分母 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ 有与第一个

积分不同的无穷几何级数表示：

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-z_0-(\zeta-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}$$

同理则有级数在圆周 Γ_2' 上一致收敛，而其序列在每项乘上 $\dfrac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ 后有

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n} \tag{2.10}$$

且其保持一致连续性不变，则等式 (2.10) 在圆周 Γ_2' 上可逐项积分得

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n}$$

并设

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}},\quad n=1,2,\ldots$$

则有

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{2.11}$$

于是将式 (2.9) 与式 (2.11) 代入式 (2.7) 即得所需 Laurent 级数，存在性得证

唯一性：由定理 (2.5) 已证

例题 2.4 (Laurent 级数) 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在 $1<|z|<2$ 及 $2<|z|<\infty$ 的 Laurent 级数

解 [方法一：利用幂级数展开] 函数可以分解如下

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}$$

当 $1<|z|<2$ 时

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}\quad(1<|z|<2)\end{aligned}$$

当 $2<|z|<\infty$ 时

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}$$

则有

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{-m}}{z^m}$$

其中

$$c_{-m}=\begin{cases}2^{2n}, & m=2n+1\\ 2^{2n-1}+2(-1)^n, & m=2n\end{cases}$$

即为仅有奇异部分的 Laurent 级数

解 [方法二：利用 Laurent 定理 (2.6)] 当 $2<|z|<\infty$ 时，由 Laurent 定理 (2.6) 有其在 0 处的 Laurent 级数系数为

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

代入即得

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho>2}\frac{z^2-2z+5}{z^{n+1}(z-2)\left(z^2+1\right)}dz$$

当 $n \geqslant 0$ 时，$c_n = o\left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\right) \underset{\rho\to+\infty}{\to} 0$，则 $c_n=0$；当 $n \leqslant -1$ 时，记 $m=-n\geqslant 1$，则有

$$c_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho>2}\frac{z^{m-1}\left(z^2-2z+5\right)}{(z-2)\left(z^2+1\right)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho>2}\left(\frac{z^{m-1}}{z-2}-\frac{2z^{m-1}}{z^2+1}\right)dz$$

其中积分中第一部分由 Cauchy 积分公式 (1.24) 即可计算得

$$\oint_{|z|=\rho}\frac{z^{m-1}}{z-2}dz = 2^{m-1}$$

对于积分中第二部分，当 $|z|>1$ 时，

$$\frac{z^{m-1}}{z^2+1} = \frac{z^{m-3}}{1+\frac{1}{z^2}} = z^{m-3}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots\right)$$

则当 $m=2k+1$ 时，

$$\oint_{|z|=\rho>2}\frac{z^{m-1}}{z^2+1}dz = 0$$

当 $m=2k$ 时，

$$\oint_{|z|=\rho>2}\frac{z^{m-1}}{z^2+1}dz = (-1)^{k-1}\cdot 2\pi i$$

则有

$$c_{-m} = \begin{cases} 2^{2k}, & m=2k+1, \\ 2^{2k-1}+2(-1)^k, & m=2k \end{cases}$$

得到与方法一相同答案

2.3 孤立奇点与 Sokhotsky-Casorati-Weierstrass 定理

本节研究孤立奇点附近的性质，给出了三类孤立奇点中可去奇点充要条件 (2.7)，极点充要条件 (2.8) 以及很好地刻画了本性奇点附近性质的 Sokhotsky-Casorati-Weierstrass 定理 (2.10)，其为 Weierstrass 定理 (2.9) 的推论。另外不加证明地给出中重要的 Picard 大定理 (2.11) 与 Picard 小定理 (2.12)

尽管 Picard 大定理 (2.11) 与 Picard 小定理 (2.12) 为复分析尤其是值分布理论中最为重要的定理之一，但是这些定理的证明要用到椭圆模函数，比较困难，不过自从 Picard 定理证明后，已经有了不少简化的证明

定义 2.6 (孤立奇点及其分类)

设 $D: 0<|z-z_0|<R$ 为点 z_0 去心邻域 (проколотая окрестность) 与 $f\in\mathcal{A}(D)$，则称 z_0 为 f 的孤立奇点 (изолированной особой точкой)

区域 D 为一个以 z_0 为圆心圆环，则根据 Laurent 定理有 f 可以在区域 D 中用在 z_0 处的 Laurent 级数表示：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n}, \quad z\in D$$

若在 z_0 处的 Laurent 级数没有负指数幂项，则称 z_0 为函数 f 的可去奇点 (устранимая особая точка)；若在 z_0 处的 Laurent 级数仅有有限数目负指数幂项，则称 z_0 为函数 f 的极点 (полюс)；若在 z_0 处的 Laurent 级数有无穷多复指数幂项，则称 z_0 为函数 f 的本性奇点 (существенно особая точка) ♣

定理 2.7 (可去奇点充要条件)

下列三个命题等价：

(A) z_0 为函数 f 的可去奇点

(B) 存在一个有限极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

(C) 函数 f 在点 z_0 某个邻域有界

证明 (A) $\Rightarrow$ (B)：由条件设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n, \quad z\in D$$

右端幂级数的和 $g(z)$ 显然在点 z_0 连续，其在该点的值等于该级数的自由项。由函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 之外重合，则存在 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$

(B) $\Rightarrow$ (C)：显然在点 z_0 处具有有限极限的函数在该点某个邻域中有界

(C) $\Rightarrow$ (A)：由假设，在点 z_0 处某个邻域 U 中有 $(\forall z\in U):|f(z)|\leqslant M$，设 $\gamma_\rho:|z-z_0|=\rho$ 为属于该邻域的一个圆周，由 Laurent 定理 (2.6)，级数系数 c_n 为

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}$$

从中估计 $|c_n|\leqslant M\rho^{-n}$，则对于负的 n，当 $\rho\to 0$ 时，该估计右侧趋向于零。因此在级数中所有负指数 c_n 都等于零，则 z_0 为函数 f 可去奇点

注 由于存在有限极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$，因此函数 f 在 z_0 处解析性丧失可以解释在 f 在此处未定义，即 $f(z_0)\neq c_0$。若在 z_0 定义或重新定义 f 使得 $f(z_0)=c_0$，则 f 已经在圆周 $\mathrm{K}:|z-z_0|=R$ 上处处可表示为幂级数，即为 中一个解析函数，这即为“可去奇点”名字的来由

定义 2.7 (极点阶数)

极点在 z_0 处 Laurent 级数可记为

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{\left(z-z_0\right)^m}+\frac{c_{-m+1}}{\left(z-z_0\right)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1\left(z-z_0\right)+\cdots$$

其中 $c_{-m}\neq 0$

则称数 m 为极点 z_0 的阶数 (порядок)（或重数 (кратность)）

定理 2.8 (极点充要条件)

z_0 为函数 f 极点的充要条件为 $f\underset{z\to z_0}{\longrightarrow}\infty$

证明 必要性：设 z_0 为函数 f 的 m 阶极点，则有极点在 z_0 处的邻域中成立

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{\left(z-z_0\right)^m}+\frac{c_{-m+1}}{\left(z-z_0\right)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1\left(z-z_0\right)+\cdots, \quad c_{-m}\neq 0$$

从右端提出因子 $\dfrac{1}{\left(z-z_0\right)^m}$ 并设 $\phi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n-m}\left(z-z_0\right)^n$ 则有

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{\left(z-z_0\right)^m}$$

当 $z\to z_0$ 时，分子有一个非零极限 c_{-m}，而分母趋向于零，则 $f\underset{z\to z_0}{\longrightarrow}\infty$，由此有在点 z_0 的某个去心邻域 U（可能邻域半径比 D 更小）中函数 f 均不为零，因此 U 上可定义函数

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{\left(z-z_0\right)^m}{\phi(z)}$$

显然 $g\underset{z\to z_0}{\longrightarrow}0$。若设 $g(z_0)=0$，则 z_0 为函数 g 的 m 零点

充分性：设 $f\underset{z\to z_0}{\longrightarrow}\infty$，则函数 f 在 z_0 的某个去心邻域 U 中处处不为零，且定义了解析函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，

其中若 $z \neq z_0$，则 $g(z_0)=0$。若函数 g 在 z_0 处有 m 阶零点，则有展开式

$$g(z)=d_m(z-z_0)^m+d_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots=(z-z_0)^m(d_m+d_{m+1}(z-z_0)+\cdots)$$

其中 $d_m \neq 0$，记幂级数 $d_m+d_{m+1}(z-z_0)+\cdots$ 的和为 $\psi(z)$，则有

$$(\forall z \in \mathrm{U}): g(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

且函数 g 和 ψ 在任意点 $z \in U$ 不为零（否则 $f(z)=\infty$），则幂级数 $\phi(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$ 在 U 上解析，并有幂级数表示

$$\phi(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

其中系数 a_0 由 $a_0=\phi(z_0)=\dfrac{1}{\psi(z_0)}=\dfrac{1}{d_m}$ 即得其不为零，由此综上即得

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=(z-z_0)^{-m}\phi(z)=\frac{a_0}{(z-z_0)^m}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots$$

则函数 f 在点 z_0 邻域中得到的该 Laurent 级数的形式证明了该点为 f 的 m 阶极点

推论 2.5

点 z_0 为函数 f 的 m 阶极点当且仅当 z_0 为函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点

♡

定理 2.9 (Weierstrass 定理)

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则 $\forall \varepsilon>0, f(D_0(z_0,\varepsilon))$ 均为 $\mathbb{C}$ 中的稠密子集，其中 $D_0(z_0,\varepsilon)$ 为 z_0 的邻域 ♡

证明 由定义，集合 $f(D_0(z_0,\varepsilon))$ 在 $\mathbb{C}$ 中稠密等价于 $\overline{f(D_0(z_0,\varepsilon))}=\mathbb{C}$。若结论不成立，则存在 $z^* \in \mathbb{C}-\overline{f(D_0(z_0,\varepsilon))}$，但是由 $\mathbb{C}-\overline{f(D_0(z_0,\varepsilon))}$ 为开集，则有

$$(\exists \delta>0): D(z^*,\delta) \cap \overline{f(D_0(z_0,\varepsilon))}=\varnothing$$

则有

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-z^*}, \quad |g(z)|=\frac{1}{|f(z)-z^*|} \leqslant \frac{1}{\delta}$$

因此 $g(z)$ 在 z_0 邻域上有界，则由可去奇点充要条件 (2.7) 得 z_0 为 $g(z)$ 的可去奇点，而由

$$f(z)=z^*+\frac{1}{g(z)}$$

则 z_0 仅能为 $f(z)$ 的可去奇点或极点，矛盾

定理 2.10 (Sokhotsky-Weierstrass 定理)

(Sokhotsky[a]-Casorati[b]-Weierstrass 定理）设 z_0 为函数 f 的本性奇点，则对于任意有限或无穷的数 A，都有序列 z_n 满足 $z_n \to z_0$ 与 $f(z_n) \to A$，形式化记为

$$\left(\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)\right) \Rightarrow [(\exists\{z_n\}):(z_n \to z_0) \wedge (f(z_n) \to A)]$$

对于给定数 A，称序列 z_n 为 A -Sokhotsky 序列 (A-последовательность Сохоцкого)

[a]索霍茨基（Yulian-Karl Vasilievich Sokhotsky 1842.2.2-1927.12.14）波兰数学家。出生于俄罗斯帝国华沙（今波兰华沙），卒于苏联列宁格勒（今俄罗斯圣彼得堡）。Sokhotsky 的硕士论文为首篇以俄语发表的复分析研究论文。Sokhotsky-Casorati-Weierstrass 定理由 Sokhotsky（在他的硕士论文中）和 Casorati 于 1868 年发表，而 Weierstrass 在 1876 年发表了它。1892 年 Sokhotsky 担任圣彼得堡数学学会主席

[b]费利斯 · 卡索拉蒂（Felice Casorati，1835.12.17-1890.9.11）意大利数学家。帕维亚大学数学研究所以他的名字命名

♡

证明

由可去奇点充要条件 (2.7)，则在本性奇点 z_0 任意邻域中，函数 f 无界。则存在序列 z_n' 满足 $|z_n'-z_0|<\dfrac{1}{n}$ 与 $|f(z_n')|>n$，该序列即为 ∞ -Sokhosky 序列

下反证有限数 A 的 A-Sokhosky 序列存在性。假设这样的序列不存在，则存在一个邻域 $\mathbf{U}_\delta : 0 < |z - z_0| < \delta$ 与一个正数 α 满足

$$(\forall z \in U_\delta) : |f(z) - A| > \alpha$$

设 $\phi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$，函数 $\phi(z)$ 在 U_δ 定义且解析，则有

$$(\forall z \in U_\delta) : |\phi(z)| < \frac{1}{\alpha}$$

由可去奇点充要条件 (2.7) 有 z_0 为 ϕ 的可去奇点。则有有有限极限 $\lim\limits_{z \to z_0} \phi(z)$。利用 ∞ -Sokhosky 序列 z'_n 计算 c_0

$$c_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{f(z'_n) - A} = 0$$

因此

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z) - A} = 0$$

仅在 $f \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} \infty$ 时可能，但这意味着 z_0 为函数 f 的极点，矛盾。则得证有限数 A 的 A -Sokhosky 序列存在性

注 Sokhotsky-Casorati-Weierstrass 定理实际为 Weierstrass 定理 (2.9) 的直接推论

注 由可去奇点充要条件 (2.7) 与极点充要条件 (2.8) 得 f 在本性奇点 z_0 处不存在极限

例题 2.5 （A - Sokhotsky 序列）点 $z_0 = 0$ 为函数 $f(z) = \exp \dfrac{1}{z}$ 的本性奇点，则对于序列 $z'_n = \dfrac{1}{n}$ 与 $z''_n = -\dfrac{1}{n}$ 有 $f(z'_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty, f(z''_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ 则 f 在 0 处没有极限。而序列 z'_n 与 z''_n 可以被认为是 $A = \infty$ 与 $A = 0$ 的 A -Sokhotsky 序列

设 A 为有限的非零数，由方程 $\exp \dfrac{1}{z} = A$ 满足 $\dfrac{1}{z} = \operatorname{Ln} A$ 则有

$$z = \frac{1}{\operatorname{Ln} A} = \frac{1}{\ln A + 2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

若取点列

$$z_n = \frac{1}{\ln A + 2n\pi i}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

则其为 A - Sokhotsky 序列

定理 2.11 (Picard 大定理/Большая теорема Пикара)

设 z_0 为函数 $f(z)$ 的本性奇点，则对于任意有限数 A，除了 $A = A_0$，函数 $f(z)$ 的 A -点收敛到 z_0 ♡

注 Picard 大定理 (2.11) 为 Weierstrass 定理 (2.9) 的深化

定理 2.12 (Picard 小定理)

若整函数 $w = f(z)$ 将 $\mathbb{C}$ 映为 U，而 $\mathbb{C} \backslash U$ 至少包含两点，则 $f(z)$ 必为常数 ♡

注 若 $f(z)$ 为整函数且 $f(z)$ 在无穷远点处为极点，则 $f(z)$ 为多项式。由代数基本定理 (1.14)，$f(z)$ 可以取 $\mathbb{C}$ 中任何值。若 $f(z)$ 在无穷远点处为可去奇点，则 $f(z)$ 为有界整函数，由 Liouville 定理 (1.13)，$f(z)$ 必为常数。若 $f(z)$ 在无穷远点处为本性奇点，则由 Picard 大定理 (2.11)，$f(z)$ 在无穷远点附近可以取 $\mathbb{C}$ 中的任何值，最多除去一个例外点，这就导出了 Picard 小定理。因此，Picard 小定理为 Picard 大定理 (2.11) 的推论

定义 2.8 (无穷远处孤立奇点)

设函数 $f(z)$ 在无穷远点的邻域 $D : |z| > R$ 中解析，定义辅助函数 $g(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ 并点 $\zeta_0 = 0$ 邻域定义 $0 < |\zeta| < \dfrac{1}{R}$。则若 $\zeta_0 = 0$ 为函数 $g(\zeta)$ 的可去奇点，极点或本性奇点，称 $z_0 = \infty$ 为函数 f 的可去奇点，极点或本性奇点 ♣

定义 2.9 (无穷远处孤立奇点部分)

称在无穷远处 $z_0=\infty$ 的 Laurent 级数中正指数幂项为 Laurent 级数在无穷远的主要部分，称在无穷远处 $z_0=\infty$ 的 Laurent 级数中非正指数幂项为 Laurent 级在无穷远处的正则部分 ♣

定义 2.10 (无穷远处孤立奇点形式)

1° 若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点，则

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots$$

特别地，若

$$c_0=f(\infty)=c_{-1}=\cdots=c_{-(m-1)}=0, c_{-m}\neq 0$$

则称 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的一个 m 级零点，这时有

$$f(z)=\frac{1}{z^m}\left(c_{-m}+c_{-(m-1)}\frac{1}{z}+\cdots\right)=\frac{1}{z^m}f_1(z)$$

其中 $f_1(z)$ 在 $z=\infty$ 解析且 $f_1(\infty)\neq 0$

2° 若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_mz^m, c_m\neq 0$$

$$f(z)=z^m\left(c_m+\frac{c_{m-1}}{z}+\frac{c_{m-2}}{z^2}+\cdots\right)=z^mf_2(z)$$

其中 $f_2(z)$ 在 $z=\infty$ 解析，且 $f_2(\infty)\neq 0$

3° 若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$$

♣

定理 2.13 (无穷远处孤立奇点性质)

下列命题成立：

1)$z_0=\infty$ 为函数 f 的可去奇点的充要条件为存在有限极限 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$，或者等价地 f 在无穷远点的某个邻域内有界

2)$z_0=\infty$ 为函数 f 的极点的充要条件 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$

3)$z_0=\infty$ 为函数 f 的本性奇点的充要条件为不存在有限或无穷极限 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ ♡

例题 2.6 （无穷远处可去奇点）研究函数 $f(z)=\sin^2\dfrac{1}{z}$ 在 $z_0=\infty$ 的奇性

解 由 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，则 $z_0=\infty$ 为函数 f 的可去奇点，因为对于辅助函数 $g(\zeta)=\sin^2\zeta$ 点 $\zeta_0=0$ 为二重零点，$z_0=\infty$ 则可认为为 f 的二重零点

2.4 留数与积分计算

若函数 $f(z)$ 在 a 点解析，则对于 a 点邻域中的任意闭路 γ 由 Cauchy 积分定理 (1.21) 有 $\oint_\gamma f(z)dz=0$，若 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点且 γ 包含 a 在内，则上述积分不一定总等于零，且积分值只与 f 和 a 有关而与 γ 无关。该积分引出了所谓“留数”的概念。

下指出两个不同的留数定义，本质上二者相同，但第一定义更直接得到所需结论，第二定义则揭示了留数的来历与本质

注 本节约定在区域 **G** 中定义了一个函数 f，除有限数量的孤立奇点外，函数解析。并约定下面考虑的所有闭路

都不通过函数 f 的奇点

定义 2.11 (留数第一定义)

设 z_0 为函数 f 的孤立奇点，在 z_0 某个去心邻域 D 中函数 f 表示为 Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$$

则称系数 c_{-1} 为函数 f 在点 z_0 的留数 (Вычет)，记为 $\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right]$

设 $\gamma:\left|z-z_0\right|=\rho$ 为 D 上圆周，则留数 c_{-1} 可以写为积分

$$\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right]=\frac{1}{2 \pi i} \oint_{\gamma^{+}} f(z) d z$$

设 f 在区域 $D:|z|>R, R>0$ 上解析，则 ∞ 为 f 孤立奇点，在 D 中函数表示为 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

则称带负号的系数 c_{-1} 为函数 f 在 ∞ 的留数。其积分可以表示为

$$\operatorname{res}[f(z), \infty]=\frac{1}{2 \pi i} \oint_{\gamma^{-}} f(z) d z$$

其中 γ 为任意圆周 $|z|=\rho$，其中 $\rho>R$ ♣

定义 2.12 (留数第二定义)

设函数 $f(z)$ 在 $0<\left|z-z_0\right|<R$ 内解析，即 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则称

$$\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right]=\frac{1}{2 \pi i} \oint_{\left|z-z_0\right|=r} f(z) d z,$$

为函数在孤立奇点 z_0 的留数，记为 $\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right]$

若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，即 $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 内解析，则称

$$\operatorname{res}[f(z), \infty]=-\frac{1}{2 \pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) d z,$$

为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数 ♣

注 (留数第二定义与第一定义等价性)

设函数 $f(z)$ 在 $0<\left|z-z_0\right|<R$ 内解析，即 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则有函数在孤立奇点 z_0 的留数

$$\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right]=\frac{1}{2 \pi i} \oint_{\left|z-z_0\right|=r} f(z) d z$$

其中 $0<r<R$，而 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内可展为 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2 \pi i} \oint_{\left|z-z_0\right|=r} \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}} d z$$

因此

$$\operatorname{res}[f(z), a]=\frac{1}{2 \pi i} \oint_{\left|z-z_0\right|=r} f(z) d z=c_{-1}$$

若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 孤立奇点，即 $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 内解析，则 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 留数为

$$\operatorname{res}[f(z), \infty]=-\frac{1}{2 \pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) d z$$

其中 $R < \rho < \infty$，$f(z)$ 在 $z = \infty$ 的 Laurent 级数为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

因此

$$\operatorname{res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz = -c_{-1}$$

定理 2.14 (留数定理)

设闭路 Γ 过含 f 孤立奇点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 的区域 G，则

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right]$$

♡

证明 以点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 为中心分别在 Γ 内画圆 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 使每个圆都出现在其他圆的外部。对于以 $\Gamma \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$ 为界的 $(n+1)$ 连通区域 K，函数 f 运用关于复合闭路积分的定理 (1.23) 即得

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z) dz + \cdots + \oint_{\gamma_n^+} f(z) dz$$

右边的每个积分等于对于留数乘 $2\pi i$，用留数替换积分即得所需等式

注 该定理表明，因为在可去奇点相应 Laurent 级数中没有 $z - z_k$ 的复指数幂项，则利用定理中公式计算留数时可以忽略可去奇点。不过不幸的是，暂时还没有简便的方法找到所有奇点的残差，但对于应用中最常用的奇点——极点，有计算其留数的简单公式

注 在函数整个区域 **G** 上可以有无穷多孤立奇点，但仅有有限数量孤立奇点可以在 Γ 内，否则在 Γ 内的无穷奇点集将有一个极限点，该极限点也为奇点，但不是孤立奇点。本节开篇的约定排除了这种非孤立奇点的存在性

命题 2.1 (极点留数计算公式)

设 $z_0 \neq \infty$ 为 $f(z)$ 的 $m(\geqslant 1)$ 阶极点，则

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]$$

特别地，当 $m = 1$ 时有

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

♠

证明 由条件在 z_0 点邻域中有 $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^m} \varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0) \neq 0$，则 $\varphi(z)$ 在 z_0 点邻域内可展开为 Taylor 级数 $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$，代入即得

$$(z - z_0)^m f(z) = \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

则有

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = c_{-1} = b_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]$$

公式即证

例题 2.7 (极点留数计算公式) 计算 $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$ 在其奇点处的留数

解 显然 $z = -1$ 为 $f(z)$ 的 3 阶极点，$z = \infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。则由极点留数计算公式 (2.1) 有

$$\operatorname{res}[f(z), -1] = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (\sin 2z) \bigg|_{z=-1} = -2\sin(-2) = 2\sin 2$$

由本性奇点第二定义则有

$$\operatorname{res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho\gg 1}\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}dz=-\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(\sin 2z)\bigg|_{z=-1}=-2\sin 2$$

命题 2.2 (一阶极点留数计算公式)

设 $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$，而 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都在 z_0 处解析，且 $p(z_0)\neq 0$，$q(z_0)=0,q'(z_0)\neq 0$，则有

$$\operatorname{res}[f(z),z_0]=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

♠

证明 由条件，z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，故由命题 (2.1) 得

$$\operatorname{res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0)}(z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{\dfrac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

公式即证

注 函数关于可去奇点 z_0 的留数等于 0。但一般来说，在无穷远处的可去奇点的情况下，情况并非如此。例如，对于在无穷远处为一阶零点的函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$，在 ∞ 的留数为 -1，而不是零。

定理 2.15 (留数和基本定理/теорема о полной сумме вычетов)

设函数 f 在 $\mathbb{C}$ 仅有有限数量奇点 $z_1,z_2,\ldots,z_n$，设 $z_0=\infty$，则有

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{res}[f(z),z_k]=0$$

♡

证明 构造一个圆周 $\gamma:|z|=\rho$ 使得所有有限数量奇点 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 位于其内，则由留数定理 (2.14) 有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^+}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[f(z),z_k]\tag{2.12}$$

另一方面，圆周 γ 位于无穷远点附近，其中函数 f 由 Laurent 级数 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$ 表示，则有留数 $[f(z),\infty]$。将

$$\operatorname{res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^-}f(z)dz$$

与 (2.12) 相加即得所需等式

例题 2.8 （留数和基本定理）计算积分

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$$

解 被积函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$$

有五次单位根 $z_1,\ldots,z_5$ 与点 $z_6=3$ 为函数 f 的一阶极点，另外有可去奇点 $z_0=\infty$

利用一阶极点留数计算公式 (2.2) 来计算 $z_1,\ldots,z_5$ 的留数 $\operatorname{res}[f(z),z_k]$，则令 $\varphi(z)=\dfrac{1}{z-3},\psi(z)=z^5-1$ 就有

$$\operatorname{res}[f(z),z_k]=\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}=\frac{1}{(z_k-3)\,5z_k^4}=\frac{z_k}{5(z_k-3)},k=1,2,3,4,5$$

则由留数定理 (2.14) 有

$$\frac{1}{2\pi i}I=\sum_{k=1}^{5}\operatorname{res}[f(z),z_k]\tag{2.13}$$

再由留数和基本定理 (2.15) 即得

$$\sum_{k=1}^{5} \operatorname{res}[f(z), z_k] = -\operatorname{res}[f(z), z_6] - \operatorname{res}[f(z), \infty] \tag{2.14}$$

仍用一阶极点留数计算公式 (2.2) 计算 $\operatorname{res}[f(z), z_6]$ ，令 $\varphi(z) = \dfrac{1}{z^5-1}, \psi(z) = z-3$ 则有

$$\operatorname{res}[f(z), z_6] = \frac{\varphi(z_6)}{\psi'(z_6)} = \varphi(3) = \frac{1}{242}$$

为计算 $\operatorname{res}[f(z), \infty]$ ，变换 f 并认为 $|z|>3$，则有

$$f(z) = \frac{1}{z^6} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} \frac{1}{1-\frac{1}{z^5}} = \frac{1}{z^6}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}+\cdots\right) = \frac{1}{z^6}+\frac{3}{z^7}+\cdots$$

由级数在 $|z|>3$ 上绝对收敛，则 Laurent 级数的乘法合理。得到 f 在无穷远点附近的 Laurent 级数，由不包含 z^{-1} 的项，则 $\operatorname{res}[f(z), \infty]=0$，再利用式 (2.13) 与 (2.14) 则有

$$I = -2\pi i \operatorname{res}[f(z), 3] = -\frac{\pi i}{121}$$

并由此简化了计算

注 （留数计算实变函数积分）

对于 $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi$ 型积分，设 $z = e^{i\varphi}$，则有

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

则积分变为

$$\frac{1}{i}\oint_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{z}$$

积分符号下变量为 z 的有理函数在整个复平面上具有有限数量的极点，因此总可以使用留数定理 (2.14) 与留数和基本定理 (2.15)

例题 2.9 （留数计算实变函数积分）计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta + a^2} d\theta (0<a<1)$$

解 由 $0<a<1$，不难看出 $1-2a\cos\theta+a^2$ 在 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 内不为零，则积分有意义，令 $z=e^{i\theta}$，即得

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+e^{-\overline{2}i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z^2+z^{-2}\right)$$

代入原积分则得

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2+z^{-2}}{2} \frac{1}{1-2a\frac{z+z^{-1}}{2}+a^2} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{1+z^4}{2iz^2(1-az)(z-a)} dz = \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

显然 $z=0, z=a, z=\dfrac{1}{a}$ 为被积函数 $f(z)$ 的 3 个极点，但由条件仅有 $z=0$ 和 $z=a$ 在 $|z|<1$ 内。则由极点留数计算公式 (2.1) 计算得

$$\operatorname{res}[f(z), 0] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{1+z^4}{2i(1-az)(z-a)}\right] = -\frac{1+a^2}{2ia^2}$$

$$\operatorname{res}[f(z), a] = \lim_{z\to a}\left[\frac{1+z^4}{2iz^2(1-az)}\right] = \frac{1+a^4}{2ia^2(1-a^2)}$$

则由留数定理 (2.14) 得

$$I = 2\pi i\left[-\frac{1+a^2}{2ia^2}+\frac{1+a^4}{2ia^2(1-a^2)}\right] = \frac{2\pi a^2}{1-a^2}$$

注 对于 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 型积分，假设函数 f 解析延拓到复平面上半平面或下半平面，下记复平面上半平面为 π_+ : $\operatorname{Im} z > 0$，包含实轴的闭上半平面为 $\bar{\pi}_+$

定理 2.16 (留数计算无穷上下限积分)

设从实轴延伸到复平面上半平面的函数满足下列条件:

1) f 在 π_+ 中具有有限数量奇点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 且在实轴上连续

2) 对于 $\overline{\pi}_+$ 中所有充分大的 z, 成立估计

$$|f(z)| \leqslant \frac{M(z)}{|z|} \tag{2.15}$$

其中 $M(z)$ 为复变量 z 的非负函数, 当 $z \to \infty$ 时趋于零并保持在闭上半平面中

则积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

至少在 Cauchy 主值意义下存在且

$$\text{(v.p.)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right]$$

♡

证明 选择足够大的 $R > 0$ 使得 $|z_j| < R, j = 1, 2, \ldots, n$。从实轴的闭区间 $[-R, R]$ 与半圆周 $\gamma_R : |z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0$ 组成闭路 Γ_R, 对该闭路与函数 f 由留数定理 (2.14) 有

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right]$$

考虑到闭路的构造, 可以将等式改写为

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right] \tag{2.16}$$

左端的第二个加数估计为

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \frac{\max\limits_{z\in\gamma_R} M(z)}{R} \cdot \pi R = \pi \cdot \max_{z\in\gamma_R} M(z)$$

由定理关于函数 $M(z)$ 的条件即有当 $R \to \infty$ 时 $\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0$, 而关系 (2.16) 的右侧不依赖于 R, 因此当 $R \to \infty$ 时左边第一个加数存在极限, 该极限即为积分或其 Cauchy 主值

注 条件中 (2.15) 的意义为当 $z \to \infty$ 时并保持在闭上半平面内的函数 f 的下降速度至少比函数 $\dfrac{1}{z}$ 快

例题 2.10 (留数计算无穷上下限积分) 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

解 函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ 在 π_+ 上有唯一三重极点 $z_0 = i$, 由定理 (2.16) 与极点留数计算公式 (2.1) 即有

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{res}[f(z), i] = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \lim_{z\to i} \frac{d^2\left[f(z)(z-i)^3\right]}{dz^2}$$

由 $g(z) \equiv f(z)(z-i)^3 = (z+i)^{-3}$, 即有 $g''(z) = 12(z+i)^{-5}$ 则得

$$I = 12\pi i(2i)^{-5} = \frac{12}{32}\pi = \frac{3}{8}\pi$$

引理 2.2 (Jordan 引理/лемма Жордана)

设函数 f 在闭区域 $|z| \geqslant R_0, \operatorname{Im} z \geqslant 0$ 中连续, 且 $f \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$ 并保持在复平面上半平面 $\overline{\pi}_+$, 则对于所有 $a > 0$, 积分

$$J = \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z)dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

其中 γ_R 为半圆周 $|z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0$

♡

证明 设 $\mu_R = \max\limits_{z\in\gamma_R}|f(z)|$ ，而由条件有 $\mu_R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$，则估计积分 J 有

$$|J| \leqslant \int_{\gamma_R} \left|e^{iaz}\right| |f(z)| d\sigma \leqslant \mu_R \int_{\gamma_R} \left|e^{iaz}\right| d\sigma \tag{2.17}$$

在 γ_R 上引入参数化 $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi), 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$，则有

$$d\sigma = Rd\varphi, \quad iaz = -aR\sin\varphi + iaR\cos\varphi, \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{-aR\sin\varphi}$$

则式 (2.17) 最后一个积分写为

$$\mu_R R \int_0^\pi e^{-aR\sin\varphi} d\varphi \tag{2.18}$$

在闭区间 $[0;\pi]$ 上的被积函数关于中线 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 对称，因此积分等于闭区间 $[0;\dfrac{\pi}{2}]$ 上两倍，在该区间上有估计

$$\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$$

因此

$$-aR\sin\varphi \leqslant -\frac{2aR}{\pi}\varphi$$

因此积分 (2.18) 满足上界估计

$$\mu_R R \int_0^\pi e^{-aR\sin\varphi} d\varphi \leqslant 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi}\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{a}\mu_R \left(e^{-aR} - 1\right)$$

该表达式也为 $|J|$ 的上界估计，当 $R\to\infty$ 时趋于零，引理得证

定理 2.17

设从实轴延拓到复平面上半平面的函数 f 在闭区域 $|z| \geqslant R_0, \operatorname{Im} z \geqslant 0$ 中连续，且 $f \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$，则对于所有 $a > 0$ 积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$$

至少在 Cauchy 主值意义上存在，且

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right]$$

♡

证明 类似 Jordan 引理 (2.2) 的证明选取 $R > 0$ 与闭路 Γ_R ，由留数定理 (2.14) 有

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x) dx + \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\left[e^{iaz} f(z), z_k\right]$$

由 Jordan 引理 (2.2)，左端第二项当 $R\to\infty$ 时趋于零。右端不依赖于 R，因此当 $R\to\infty$ 时左边第一项有一个极限，该极限即为积分 I（或其 Cauchy 积分主值）

例题 2.11 （Jordan 引理/Laplace 积分）计算 Laplace 积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^2 + a^2} dx$$

设常数 α 为正，函数 $\cos\alpha x$ 为复变函数 $e^{i\alpha x}$ 的实部。因此，积分 I 可作为积分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + a^2} dx$$

的实部。函数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ 满足定理 (2.17) 的条件在 π_+ 有唯一奇点 $z = ia$，则由定理 (2.17) 有

$$J = 2\pi i \cdot \operatorname{res}\left[e^{i\alpha z}, ia\right] = 2\pi i \left.\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\right|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$$

因此 $I = \operatorname{Re} J = J = \dfrac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$

2.5 对数留数定理与 Rouché 定理

注 在本节再增加两个限制条件：

1) f 在区域 G 中奇点仅能为极点

2) 闭路不仅经过极点，且经过函数 f 的零点

另外，在在区域 G 中闭路 Γ 内，函数 f 的零点数量必须有限（Γ 中包含的无穷的零必须有一个属于 G 的极限点，但根据唯一性定理 (2.3)，函数 f 在区域 G 中必须恒等于零）

定义 2.13 (极点与零点符号约定)

固定闭路 $\Gamma \subset G$，本节约定记号：$z_1, \ldots, z_p$ 为函数 f 在 Γ 内的极点；$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ 为极点的重数；$\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ 为函数 f 在 Γ 内的零点；$\beta_1, \ldots, \beta_n$ 为零点的重数

并称

$$N_f(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k, \quad P_f(\Gamma) = \sum_{m=1}^{p} \alpha_m$$

为零点的总数与极点的总数

定理 2.18 (对数留数定理)

零点总数与极点总数之差满足

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

证明 设 $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$，函数 $\varphi(z)$ 的奇点为函数 f 的零点和极点。下证对于 f 无论其零点与极点重数如何，均为函数 $\varphi(z)$ 的一阶极点

设在点 ζ_k 的邻域中函数 f 可以表示为

$$f(z) = (z - \zeta_k)^{\beta_k} g(z) \tag{2.19}$$

其中 $g(z)$ 为一个在点 ζ_k 处不为零的解析函数，由此有

$$f'(z) = \beta_k (z - \zeta_k)^{\beta_k - 1} g(z) + (z - \zeta_k)^{\beta_k} g'(z) = \beta_k (z - \zeta_k)^{\beta_k - 1} h(z) \tag{2.20}$$

其中 $h(z) = g(z) + \dfrac{1}{\beta_k} (z - \zeta_k) g'(z)$，由 $h(\zeta_k) = g(\zeta_k) \neq 0$，并用 (2.20) 除以 (2.19) 则有

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\beta_k}{z - \zeta_k} \cdot \frac{h(z)}{g(z)} \tag{2.21}$$

其中解析函数 $\dfrac{h(z)}{g(z)}$ 可表示为 $z - \zeta_k$ 的幂级数

$$\frac{h(z)}{g(z)} = a_0 + a_1 (z - \zeta_k) + a_2 (z - \zeta_k)^2 + \cdots$$

其中 $a_0 = \dfrac{h(\zeta_k)}{g(\zeta_k)} = 1$，并将该幂级数代入式 (2.21) 得

$$\varphi(z) = \frac{\beta_k}{z - \zeta_k} + \beta_k (a_1 + a_2 (z - \zeta_k) + \cdots)$$

即为 $\varphi(z)$ 在点 ζ_k 附近的 Laurent 级数，这表明 β_k 为该函数的一个一阶极点，而数 β_k 最初定义为函数 f 的零点重数

对函数 f 的极点 z_m 进行类似计算，在该极点的邻域中，f 可以表示为

$$f(z) = \frac{r(z)}{(z - z_m) \alpha_m} \tag{2.22}$$

其中 $r(z)$ 为一个在 z_m 处不为零的解析函数，由 (2.22) 推出

$$f'(z)=-\frac{\alpha_m}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}}\cdot r(z)+\frac{r'(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}}=-\frac{\alpha_m}{(z-z_m)_m+1}\cdot s(z) \tag{2.23}$$

其中 $s(z)=r(z)-\dfrac{1}{\alpha_m}(z-z_m)\,r'(z)$ ，由 $s(z_m)=r(z_m)\neq 0$ 并将式 (2.23) 除以式 (2.22) 有

$$\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-\alpha_m}{z-z_m}\cdot\frac{s(z)}{r(z)} \tag{2.24}$$

其中解析函数 $\dfrac{s(z)}{r(z)}$ 可表示为 $z-z_m$ 的幂级数:

$$\frac{s(z)}{r(z)}=b_0+b_1(z-z_m)+b_2(z-z_m)^2+\cdots$$

其中 $b_0=\dfrac{s(z_m)}{r(z_m)}=1$ ，将该幂级数代入式 (2.24) 则有

$$\varphi(z)=\frac{-\alpha_m}{z-z_m}-\alpha_m(b_1+b_2(z-z_m)+\cdots)$$

即为函数 $\varphi(z)$ 在点 z_m 附近的 Laurent 级数，这表明 z_m 为该函数的一个一阶极点。此外，数 α_m 最初定义为函数 f 的极点重数

最后对积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\varphi(z)dz$$

应用留数定理 (2.14) 即得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\varphi(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[\varphi(z),\zeta_k]+\sum_{m=1}^{p}\operatorname{res}[\varphi(z),z_m]=\sum_{k=1}^{n}\beta_k-\sum_{m=1}^{p}\alpha_m=N_f(\Gamma)-P_f(\Gamma)$$

定理即证

注 称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

为函数 f 关于闭路的对数留数 (логарифмический вычет)

注 对数留数这个名称来源于

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d}{dz}[\operatorname{Ln}f(z)]$$

事实上对数留数为函数 f(z) 的对数的导数 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在它位于 Γ 内的孤立奇点处的留数的代数和

Newton-Leibniz 公式的原始推导在这时不适用，因为原函数情形的推导的被积函数须满足 (1.6) 中性质的要求。该定理的对数导数的路径积分很可能非零，而所需恰为其非零值。不过 Newton-Leibniz 公式可对小部分运算，使得对数导数在闭路 z_1 和 z_2 之间的部分上的积分为函数 $F(z)$ 在其上增量，其值连续变化，同样的规则也适用于整个闭路，因此表述为下面的定理

注 (多值原函数情形 Newton-Leibniz 公式/обобщение формулы Ньютона Лейбница на случай многозначной первообразной функции)

在闭路 Γ 中固定某个点 z_0 与函数 $F(z)$ 在该点的值 $F_1(z_0)$，随着闭路遍历，原函数连续变化，设 $F_2(z_0)$ 为 $F(z)$ 的值，设在遍历结束后返回点 z_0，则有

$$\oint_\Gamma\varphi(z)dz=F_2(z_0)-F_1(z_0)$$

在对数留数情况下

$$F(z)=\operatorname{Ln}f(z)=\ln|f(z)|+i\operatorname{Arg}f(z)$$

则数 $F_1(z_0)$ 和 $F_2(z_0)$ 仅能在赋予 f 的在遍历的开始与结束的参数上取值 (могут различаться только значениями, которые мы приписываем аргументу f в начале обхода и по его окончании)

记这些参数为 Φ_1 和 Φ_2，而称差 $\Phi_2-\Phi_1$ 为函数 f 绕闭路 Γ 的点 z 的参数增量，并记为

$$\mathrm{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$$

将积分替换为使用广义 Newton-Leibniz 公式的表达式，则得到了一种新形式的对数留数定理，称为辐角原理

定理 2.19 (辐角原理/принцип аргумент)

$$N_f(\Gamma)-P_f(\Gamma)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$$

♡

注 几何意义为：映射 $w=f(z)$ 把闭路 γ 映为 w 平面上逐段光滑闭曲线 $\Gamma: w=\Gamma(t)=f[\gamma(t)],\alpha\leqslant t\leqslant\beta$。由 $(\forall z\in\gamma): f(z)\neq 0$，则 Γ 不过原点，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dw}{w}$$

已知当 Γ 为一条闭路时，在 Γ 内部含有原点的情况下，右边积分为 1；而在内部不含有原点的情况下，积分为零。一般当 Γ 为一条不过原点的任意逐段光滑闭曲线时，$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dw}{w}$ 等于 Γ 绕原点的圈数，称为 Γ 关于原点的环绕次数，亦即当 w 沿 Γ 连续变化时等于它的辐角增量除以 2π，即

$$\nu=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi}(Var)_\Gamma \operatorname{Arg} w$$

因此，若让 z 在平面上沿闭路 γ 正向走一圈，则由对数留数定理 (2.18) 有

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} w=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$$

该式说明，若函数 $f(z)$ 在 γ 上没有零点，则当 z 沿着 γ 正方向转一圈时，函数 $f(z)$ 在相应的曲线 Γ 上绕原点转动的总圈数恰好等于 $f(z)$ 在 γ 内部的零点总个数与极点总个数之差，亦即

$$N_f(\Gamma)-P_f(\Gamma)=\nu$$

推论 2.6

设 $f(z)\in\mathcal{A}(G)$，闭路 Γ 及其内部属于 G，则在 G 内函数 f 的零点总数等于向量 $w=f(z)$ 围绕点 $w_0=0$ 旋转数，当点 z 绕 Γ 时

♡

注 该命题为辐角原理的直接推论，因为 f 在 Γ 内没有奇点

定理 2.20 (Rouché 定理/теорема Руше)

(Rouché[a]定理/теорема Руше) 设 $f,\varphi\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$，闭路 Γ 连同其内部属于区域 G，若在该闭路的点处均满足不等式

$$|f(z)|>|\varphi(z)| \tag{2.25}$$

则函数 $F(z)=f(z)+\varphi(z)$ 在 Γ 内部的零点与函数 f 的零点数量一样多

[a]鲁歇 (Eugène Rouché,1832.8.18-1910.8.19) 法国数学家，最出名的成果为于 1862 年在母校机构期刊上发表的复分析中的 Rouchet 定理，另外还有线性代数中的 Roucher-Capelli 定理

♡

证明 由不等式 (2.25) 有 f 在闭路上不为零，则在闭路上 $F(z)$ 可表示为

$$F(z)=f(z)\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] \tag{2.26}$$

假设 $g(z)=1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$，则由式 (2.26) 得

$$\operatorname{Arg} F(z)=\operatorname{Arg} f(z)+\operatorname{Arg} g(z)$$

因此当点 z 绕闭路 Γ 时，有数 $F(z)$ 获得的参数增量为数 f 与 $g(z)$ 的和，然而

$$|g(z)-1|=\frac{|\varphi(z)|}{|f(z)|}<1,z\in\Gamma$$

则点 $w=g(z)$ 描绘的曲线不超出以点 1 为中心的半径为 1 的圆，因此该点的径向量不能围绕零点旋转一整圈，因此 $\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} g(z)=0$，则有 $\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} F(z)=\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$。则由辐角原理 (2.19) 及其推论 (2.6)，定理得证

推论 2.7

设函数 $f(z)\in\mathcal{A}(\mathrm{G}), z_0\in\mathrm{G}$，记 $w_0=f(z_0)$，若 z_0 为 $f(z)-w_0$ 的 m 阶零点，则对于充分小的 $\rho>0$，必存在 $\delta>0$，使得对于圆 $|w-w_0|<\delta$ 内的每一点 A，函数 $f(z)-A$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 内恰有 m 个零点 ♡

证明 由条件 z_0 为函数 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 阶零点，由非零解析函数零点孤立性 (2.1)，必存在 $\rho>0$ 使得 $f(z)-f(z_0)$ 在属于 D 的闭圆 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 上除 z_0 外没有其他零点. 取 $\delta>0$ 使得在 $|z-z_0|=\rho$ 上

$$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta$$

则对使 $|A-w_0|<\delta$ 的任意 A，当 $|z-z_0|=\rho$ 时有 $|A-w_0|<|f(z)-f(z_0)|$ ，即

$$|f(z)-f(z_0)-(f(z)-A)|<|f(z)-f(z_0)|$$

由 Rouché 定理 (2.20)，$f(z)-A$ 和 $f(z)-f(z_0)$ 在圆 $|z-z_0|<\rho$ 内有相同个数的零点，$f(z)-f(z_0)$ 在圆 $|z-z_0|<\rho$ 内恰有 m 个相重的零点，因此 $f(z)-A$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 内也有 m 个零点

注 若取 ρ 充分小使得在 $|z-z_0|<\rho$ 内，除点 z_0 外 $f'(z)\neq0$，则 $f(z)-A\,(A\neq w_0)$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 内的 m 个零点仅能为一阶零点，因为对于这些零点 $(f(z)-A)'=f'(z)\neq0$

例题 2.12 （Rouché 定理）求方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆 $|z|<1$ 内与圆环 $1<|z|<2$ 内的零点个数

解 设 $f(z)=-6z, g(z)=z^4-6z+3$ ，在圆周 $|z|=1$ 上注意到 $\left|z^4+3\right|<|-6z|$ 即 $|g(z)-f(z)|<|f(z)|$ ，则由 Rouché 定理 (2.20) 有 $g(z), f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内有相同个数的零点。$f(z)=-6z$ 在圆 $|z|<1$ 内只有一个零点，则 $g(z)=z^4-6z+3$ 在圆 $|z|<1$ 内也只有一个零点

又设 $f_1(z)=z^4$，在圆周 $|z|=2$ 上注意到 $|-6z+3|<\left|z^4\right|$，即 $|g(z)-f_1(z)|<|f_1(z)|$ ，则 $g(z)$ 在圆 $|z|<2$ 内有 4 个零点，又由在 $|z|=1$ 上，$|g(z)-f(z)|<|f(z)|$，则在圆周 $|z|=1$ 上，$g(z)\neq0$，则由 Rouché 定理 (2.20) 有 $g(z)$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内有三个零点

推论 2.8 (代数基本定理/теорема алгебры)

任意次数为 $n\geqslant1$ 的多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 在 $\mathbb{C}$ 恰好有 n 个零点（计算重数） ♡

证明 设 $f(z)=a_0z^n, \varphi(z)=a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，显然有 $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\underset{z\to\infty}{\longrightarrow}0$ ，则有

$$(\exists R_0>0)(\forall|z|>R_0):\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$$

在圆 $\gamma_R:|z|=R$ 上应用 Rouché 定理 (2.20)，其中 $R>R_0$。则圆 $|z|<R$ 中多项式 $P(z)$ 与 f 有相同零点。但多项式 $f(z)=a_0z^n$ 在点 $z_0=0$ 处有唯一的 n 重零点。因此在任意半径足够大的圆 $|z|<R$ 中，多项式 $P(z)$ 恰好有 n 个零点（计算重数），而这不依赖于 R

第 3 章 Riemann 映射理论

复变函数论的另一个重要组成部分为 Riemann 共形映射理论，该理论的基本观为将全纯函数 $w=f(z)$ 看做从 z 平面上的区域到 w 平面上的区域的映射，亦即从几何的观点来看待与处理全纯函数

3.1 共形性与局部共形性

定理 3.1 (开映射定理)

若函数 $f(z)$ 为区域 G 上不恒为常数的解析函数，则 $f(z)$ 将 G 中开集映为开集 ♡

证明 仅需证 $f(G)$ 为开集。取 $w_0=f(z_0)\in f(G)$，设 z_0 为 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 阶零点，则存在 w_0 的邻域 O，使对其中每一个点 $w\in O$，其逆像 $f^{-1}(w)$ 在 z_0 的邻域都有 m 个点。特别地 $w\in f(G)$，得 $O\subset f(G)$，则 w_0 为 $f(G)$ 的内点。由 w_0 任意性得 $f(G)$ 为开集

定理 3.2 (非常数解析函数保域性/теорема об образе области)

设区域 G，$f\in\mathcal{A}(\mathrm{G})$ 且 $f(z)$ 不恒为常数，则 $\mathrm{D}=f(\mathrm{G})$ 也为区域 ♡

证明 需证两个命题：(1) 任意两点 $w_1,w_2\in\mathbf{D}$ 可由区域 D 中的一条连续曲线连接

(2) D 中任意点均为该集合的内点

1) 设 z_1 和 z_2 为 w_1 和 w_2 在 $\mathbf{G}$ 中原像，即 $w_1=f(z_1),w_2=f(z_2)$。由 $\mathbf{G}$ 为区域，则点 $z_1,z_2\in\mathbf{G}$ 可由连续曲线 $z=\phi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 连接，其位于 G 上，随后曲线 $w=f[\phi(t)](\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 连续，连接 w_1 与 w_2 且位于区域 D

2) 设 w_0 为 D 中任意点，下证它和它的邻域 $\mathrm{K}_\mu:|w-w_0|<\mu$ 均在 D 上。设 z_0 为点 w_0 在 G 中的原像，即 $w_0=f(z_0)$。反证：在该圆中有一个函数 f 的点 w_0。事实上，若这样的圆不存在，则就可构造一个属于 $\mathbf{G}$ 的函数 f 的 w_0 的序列，收敛到 z_0。将此序列作为唯一性定理 (2.3) 中 $\mathbf{E}$ 的子集，则有 f 在 $\mathbf{G}$ 必处处和常数 w_0 全等，由条件矛盾。因此存在圆 $\overline{\mathbf{C}}_\rho$，在其边界圆 $\gamma_\rho:|z-z_0|=\rho$ 上函数 $f(z)-w_0$ 不为零。

设 $\mu=\min\limits_{z\in\gamma_\rho}|f(z)-w_0|$，下证数 μ 为点 w_0 的邻域所需半径，即任意点 $w'\in\mathbf{K}_\mu$ 在 $\mathbf{G}$ 都有原像 z'。甚至可以指定圆内的原像 $\overline{\mathbf{C}}_\rho$。对于 $z\in\gamma_\rho$，差 $f(z)-w'$ 可表示为

$$f(z)-w'=(f(z)-w_0)-(w'-w_0)$$

此外在圆周 γ_ρ 上满足不等式 $|f(z)-w_0|\geqslant\mu$，而 $|w'-w_0|<\mu$。由 Rouché 定理 (2.20) 有，函数 $f(z)-w_0$ 与 $f(z)-w'$ 在 γ_ρ 内部有相同零点个数。由 z_0 为方程 $f(z)=w_0$ 的解，则方程 $f(z)=w'$ 在 γ_ρ 内部存在解

定理 3.3 (最大模原理/принцип максимума модуля)

设 f 为区域 G 上非常数解析函数，则在 G 上函数模不能达到最大值；但若 G 为有界区域并且函数 f 在其边界上连续，则在 $\partial\mathbf{G}$ 上可达到最大模 ♡

证明 假设函数 f 得模在某个点 $z_0\in\mathrm{G}$ 上达到最大值。令 $w_0=f(z_0)$，由非常数解析函数保域性 (3.2) 有，点 w_0 与其一些邻域 $K:|w-w_0|<r$ 被包含在几何 $f(\mathbf{G})$ 中。若画一条射线 $\operatorname{Arg}w=\operatorname{Arg}w_0$，则该射线在 K 内部得所有点都在 w_0 间的开区间上并且与圆边界相交的第二个点的模大于 $|w_0|$，由此产生的矛盾证明了定理的第一个断言

在有界区域 $\mathbf{G}$ 情况下，根据 Weierstrass 定理，连续函数 f 的最大模必在闭区域 $\bar{G}$ 中获得。由于在 $\mathbf{G}$ 内部无法到达，则必在该区域边界到达

命题 3.1 (最小模原理/принцип минимума модуля)
设 f 在区域 $\mathbf{G}$ 上解析且函数不恒为常数，$(\forall z \in \mathbf{G}): f(z) \neq 0$，则在 $\mathbf{G}$ 中该函数模不能达到最小值 ♠

证明 在 G 上正确定义了解析函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，则由对 $g(z)$ 最大模原理 (3.3) 即证

定理 3.4 (Weierstrass 第二定理/вторая теорема Вейерштрасса)
设函数 $u_n(z), n=1,2,\ldots$ 在区域 $\mathbf{G}$ 上解析，其边界为（简单或复合）闭路 Γ。若函数在边界闭路 Γ 上连续，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 Γ 上一致收敛，则级数在闭区域 $\overline{\mathbf{G}}=\mathbf{G}\cup\Gamma$ 上一致收敛 ♡

证明 函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 满足 Γ 上函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (??)，则有

$$(\exists \varepsilon>0)(N=N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n>N)(\forall p>0)(\forall z \in \Gamma):\left|u_{n+1}(z)+\cdots+u_{n+p}(z)\right|<\varepsilon \tag{3.1}$$

对于满足指定条件的固定的 n 与 p，设 $\phi_{n,p}(z)=u_{n+1}(z)+\cdots+u_{n+p}(z)$ 作为有限数量函数的总和 $u_k(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{G}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathrm{G}})$，函数 $\phi_{n,p}(z)$ 本身在 G 中和解析且在闭区域 $\overline{\mathrm{G}}$ 中连续。根据最大模原理 (3.3)，由不等式 (3.1) 有

$$(\forall n>N)(\forall p>0)(\forall z \in \overline{\mathrm{G}}):\left|u_{n+1}(z)+\cdots+u_{n+p}(z)\right|<\varepsilon$$

因此函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在闭区域 $\overline{\mathrm{G}}$ 上满足函数级数一致收敛 Cauchy 准则 (??)

注 某些情况下 Weierstrass 第二定理简化了对 Weierstrass 第一定理的条件的验证

定义 3.1 (全纯切映射)
设 $\lambda(t)=x(t)+iy(t)$，L 为 $z=\lambda(t)$ 的连续参数曲线，其中 $t \in \mathbb{E}=[\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$，并给定

$$\frac{\lambda(t)-\lambda\left(t_0\right)}{t-t_0}=\frac{x(t)-x\left(t_0\right)}{t-t_0}+i \frac{y(t)-y\left(t_0\right)}{t-t_0}$$

当 $t \to t_0, t \in E$ 时有导数 $\lambda'\left(t_0\right)$ 存在等价于两个实导数 $x'\left(t_0\right)$ 与 $y'\left(t_0\right)$ 存在。这时有

$$\lambda'\left(t_0\right)=x'\left(t_0\right)+i y'\left(t_0\right)$$

若导数 $\lambda'\left(t_0\right)$ 存在且非零，则称参数值 t_0 与点 $z_0=\lambda\left(t_0\right)$ 正则 (регулярные)
若 t_0 为正则参数值 (регулярное значение параметра)，则对于所有足够接近 t_0 且不同于 t_0 的 $t \in E$ 有 $z=\lambda(t)$ 在参数曲线 L 上不同于 $z_0=\lambda\left(t_0\right)$ 且有数

$$\frac{\lambda(t)-\lambda\left(t_0\right)}{t-t_0}=\frac{z-z_0}{t-t_0}$$

被视为复平面上的向量位于连接点 z_0 和 z 的直线上，即在切线上。该切线相对于实轴倾斜的角度为

$$\operatorname{Arg} \frac{z-z_0}{t-t_0}$$

令 $t \to t_0, t \in E$，则有

$$\operatorname{Arg} \lambda'\left(t_0\right)$$

因此，若当 $t=t_0$ 时函数 $z=\lambda(t)$ 有非零导数 $\lambda'\left(t_0\right)$，则通过点 z_0 和 z 的参数曲线 L 当 $t \to t_0$ 时有一个极限位置，这个极限位置为参数曲线 L 在点 z_0 的切线 (касательная к кривой L в точке z_0)，该切线相对于实轴倾斜的角度为 (наклонена к действительной оси под углом) $\operatorname{Arg} \lambda'\left(t_0\right)$
一般地，取一条通过 z_0 的光滑曲线 $\gamma: z=\lambda(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$，为了 $z_0=\lambda\left(t_0\right)$ 为该曲线正则点则有 $\lambda'\left(t_0\right) \neq 0$。考虑函数 $w=f(z)$，曲线 γ 被变换为在变元 w 的平面的曲线 $w=f[\lambda(t)] \equiv \mu(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$。这时有 $w_0=f\left(z_0\right)$ 为曲线 的正则点且

$$\mu'\left(t_0\right)=f'\left(z_0\right) \lambda'\left(t_0\right)$$

当复数相乘时从参数相加的法则推导出 $\lambda'(t_0)$ 与 $\mu'(t_0)$ 可以选择参数使得它们的差等于数 $\arg f'(z_0)$。考虑到将前两个参数解释为对应曲线与实轴的夹角，则有数 $\arg f'(z_0)$ 的几何意义：数 $\arg f'(z_0)$ 为任意过点 z_0 的平滑曲线从平面 z 到平面的 w 旋转角 (угол поворота)，这种旋转依赖于 f

若记 $z(0)=z_0$，则称

$$T'_{z_0}=\left\{\frac{\mathrm{d}z(0)}{\mathrm{d}t}\mid z(t)\text{ 为过 } z_0 \text{ 的光滑（即可微）曲线}, z(0)=z_0\right\}$$

为 z_0 点的全纯切面。若 f 为解析函数，称

$$f^*: T'_{z_0}\to T'_{f(z_0)},\quad \alpha\mapsto f'(z_0)\alpha\quad (\alpha\in T_{z_0})$$

为解析映射 $w=f(z)$ 诱导的全纯切映射

♣

注 （保角性）实际上，由上面的推导还可以得出

$$\left|\frac{\mathrm{d}f[z(0)]}{\mathrm{d}t}\right|=|f'(z_0)|\left|\frac{\mathrm{d}z(0)}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$\operatorname{Arg}\frac{\mathrm{d}f[z(0)]}{\mathrm{d}t}=\operatorname{Arg}f'(z_0)+\operatorname{Arg}\frac{\mathrm{d}z(0)}{\mathrm{d}t}$$

其中 $|f'(z_0)|$ 表示切映射 f^* 对向量长度的伸缩，而 $\operatorname{Arg}f'(z_0)$ 表示切映射对向量的旋转。即 f^* 将 z_0 点的全纯切面作 $|f'(z_0)|$ 的伸缩后，再按逆时针方向旋转 $\operatorname{Arg}f'(z_0)$，然后映为 $f(z_0)$ 点的全纯切面。特别地，若定义 G 中过 z_0 的两条曲线 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 在 z_0 的夹角为其在 z_0 的切向量之间的夹角，则关系表示 $z_1(t)$ 与 $z_2(t)$ 的夹角等于 $f[z_1(t)]$ 与 $f[z_2(t)]$ 的夹角，即

$$\operatorname{Arg}\frac{\mathrm{d}z_1(0)}{\mathrm{d}t}-\operatorname{Arg}\frac{\mathrm{d}z_2(0)}{\mathrm{d}t}=\operatorname{Arg}\frac{\mathrm{d}f[z_1(0)]}{\mathrm{d}t}-\operatorname{Arg}\frac{\mathrm{d}f[z_2(0)]}{\mathrm{d}t}$$

同时向量 $\frac{\mathrm{d}f[z_1(0)]}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}f[z_2(0)]}{\mathrm{d}t}$ 之间的旋转关系与向量 $\frac{\mathrm{d}z_1(0)}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}z_2(0)}{\mathrm{d}t}$ 之间的旋转关系相同。称保持夹角不变和旋转不变的映射为第一类保角映射；若一映射 g 在 z_0 点仅保持过 z_0 的曲线间的夹角，但改变了曲线间的旋转关系，则称 g 在 z_0 为第二类保角映射。综上，解析函数 f 在其导数不为零的点上为第一类保角映射。另外，导数不为零为切映射的保角的充分条件

定义 3.2 (局部共形性)

称保持通过给定点的曲线之间的角度的连续函数的映射为在该点的共形映射 (конформное отображение)，即称给定点的连续保角映射为在该点的共形映射。这时称该点在映射下有局部共形性 (локальная конформность)

♣

定理 3.5 (局部共形性充分不必要条件)

函数 $f(z)$ 在所有 $f'(z_0)\neq 0$ 的点上共形

♡

注 导数为零局部共形性不一定被破坏，例如定义在一个平面上的极坐标函数 $f(z)=r^2(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 与点 $z_0=0$

定义 3.3 (全局共形性)

设函数 f 为区域 G 到区域 D 的双射，若 f 在 $z\in\mathbf{G}$ 的每个点共形，则称 f 共形地将 G 映到 D(отображает G в D конформно)，也称区域 G 到区域 D 在映射下具有全局共形性 (глобальная конформность)

♣

3.2 分式线性函数与 Möbius 变换群

命题 3.2 (整线性函数必要条件)

设整线性函数 $w = L(z) = \alpha z + \beta, \alpha \neq 0, \operatorname{dom} L = \mathbb{C}, \operatorname{im} L = \mathbb{C}$，则有函数将复平面 $\mathbb{C}$ 共形映到自身

证明 由对于任意 w 方程 $w = \alpha z + \beta$ 相对于 z 可解 (разрешимо относительно)，则有任意 $w \in \mathbb{C}$ 都有原像 z。另外由 $(\forall z): L'(z) = \alpha \neq 0,$ ，则由局部共形性充分条件 (3.5)，映射 $w = L(z)$ 在每个点 $z \in \mathbb{C}$ 处共形。由该 L 为双射，则 L 有全局共形性，L 将有限复平面 $\mathbb{C}$ 共形映到自身。

命题 3.3 (整线性函数充分条件)

若解析函数 $w = f(z)$ 将复平面 $\mathbb{C}$ 共形映到自身，则 f 为整线性函数

注 (整线性函数不动点)

若 $\alpha = 1$，即若 $w = z + \beta$，则整个复平面被剪切，剪切向量的数量表达为数 β，解释为自由向量；若 $\alpha \neq 1$ ，则映射 $w = L(z)$ 有一个不动点 (неподвижная точка)γ (即满足 $L(\gamma) = \gamma$ 的点)，则有

$$\gamma = \alpha\gamma + \beta \tag{3.2}$$

亦即

$$\gamma = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

由 $w = \alpha z + \beta$ 与等式 (3.2) 则有 $w - \gamma = \alpha(z - \gamma)$ 。把 $z - \gamma$ 与 $w - \gamma$ 的差视为从原点附加到点 γ 的向量，记 α 为指数形式 $\alpha = re^{i\varphi}$ ，分两个阶段从第一个向量过渡到第二个向量，首先乘 r:

$$z - \gamma \longrightarrow r(z - \gamma)$$

然后乘 $e^{i\varphi}$。因此对于 $\alpha \neq 1$ ，线性函数给定了相对于点 γ 带有系数 r 的位似 (гомотетия с коэффициент r относительно точки γ)，伴随着复平面在同一点的角度为 φ 的旋转 (сопровождаемый поворот комплексной плоскости на угол φ вокруг той же точки)。这些变换 (преобразование) 也可以反序进行，即先旋转再位似

对于 $z \to \infty$ 有 $L(z) \to \infty$，若需要把线性函数定义延拓到扩充直线 $\overline{\mathbb{C}}$，则自然取 $L(\infty) = \infty$ ，这导致 L 在无穷远处 (бесконечно удалённой) 出现第二个不动点。特别地，若 $\alpha = 1$，则 ∞ 为唯一不动点，但这时也可以认为为二阶不动点，预定义的线性函数仍然以一一对应的方式将 $\overline{\mathbb{C}}$ 映到自身

注 (行列式引入)

设函数 $w = L(z) = \alpha z + \beta, \alpha \neq 0, \operatorname{dom} L = \mathbb{C}, \operatorname{im} L = \mathbb{C}$，在变量 z 与 w 的平面中换元

$$z = \frac{1}{\xi}, w = \frac{1}{\zeta}$$

把原来平面的无穷远点 (бесконечно удалённые точка) 对应地变换为 $\xi_0 = 0$ 与 $\zeta_0 = 0$。在新变量中函数 $w = L(z)$ 记为

$$\zeta = \frac{1}{\dfrac{\alpha}{\xi} + \beta} = \frac{\xi}{\beta\xi + \alpha}$$

该函数导数为

$$\frac{\alpha}{(\beta\xi + \alpha)^2}$$

它不会在任何地方无定义，包括 $\xi_0 = 0$，则变换后函数在点 $\xi_0 = 0$ 处共形，这时原函数 $w = L(z)$ 被认为在无穷远处共形，考虑

$$w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

则下面的数不等于零

$$\Delta = ad - bc = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

称该数为函数 L 的行列式。特别地，当 $c = 0$ 时，分式线性函数退化为整线性函数

分子分母同乘上 $\lambda \neq 0$ 则有 L 的新表示：

$$w = L(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$$

则该表示的行列式为 $\tilde{\Delta} = \lambda^2 \Delta$

由此对于分式线性函数选择行列式为 1 的即可

注 假设

$$L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \equiv L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

由函数相等即得

$$(\forall z) : (a_1 z + b_1)(c_2 z + d_2) = (c_1 z + d_1)(a_2 z + b_2)$$

从等式有 $a_1 c_2 = a_2 c_1, b_1 d_2 = b_2 d_1, a_1 d_2 + b_1 c_2 = a_2 d_1 + b_2 c_1$ ，而这些关系等价于等式

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

则将函数 L 定义为分数时，除了将分子分母同乘任意非零数之外，没有其他可能

注 设分式线性变换 $w = L(z)$ 为非整线性函数，则有 $c \neq 0$，这时有

$$\operatorname{dom} L = \left\{ z \neq \delta = -\frac{d}{c} \right\}$$

称 δ 为变换 L 的奇点。由 $w = L(z)$ 存在反函数则有

$$z = L^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

则有

$$\operatorname{im} L = \operatorname{dom} L^{-1} = \left\{ w \neq \frac{a}{c} \right\}$$

函数 L 在每个点 $z \in \operatorname{dom} L$ 的导数存在且等于

$$\frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{\delta}{(cz + d)^2}$$

即使在零处也不消失。每个点的局部共形性和反函数的存在性意味着任意分式线性函数都将其定义域保形地映射到值域

注 （分式线性函数不动点）设

$$w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

其中 $c \neq 0$。变换 $w = L(z)$ 的不动点由条件

$$z = L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

定义，则有二次方程

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

考虑到关于整线性函数不动点的已知信息，则有任意分式线性函数最多有两个不动点（唯一的反例为为恒等变换 $I(z) = z$，其对于 $z \in \overline{\mathbb{C}}$ 的所有点都不动）

例题 3.1 （分式线性函数不动点）求满足下列条件的分式线性映射：

1) 点 $1, i$ 为不动点，点 0 变换到 -1

2) 点 i 为二重不动点，点 1 变换到 ∞

解

1) 分式线性映射 w 满足 $\frac{w-1}{w-\mathrm{i}}=k\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}$。由 $0\mapsto -1$，则有 $\frac{-1-1}{-1-\mathrm{i}}=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{k}{\mathrm{i}}$，因此 $k=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\frac{w-1}{w-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}$，即有 $w=\frac{(3+\mathrm{i})z-1-\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}+1}$

2) 分式线性映射 w 满足 $\frac{1}{w-\mathrm{i}}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}+h=\frac{1+h(z-\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}}$，则有 $z-\mathrm{i}=(w-\mathrm{i})(1+hz-\mathrm{i}h),w=\frac{z(1+\mathrm{i}h)+h}{hz+1-\mathrm{i}h}$。由 $1\mapsto\infty$，则有 $h+1-\mathrm{i}h=0,h=\frac{1}{-1+\mathrm{i}}=-\frac{(1+\mathrm{i})}{2}$，计算即得 $w=\frac{z(3-\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-z)}$

定义 3.4 (Möbius 变换)

设 a,b,c,d 为复数，且满足 $ad-bc\neq 0$，则称有理分式函数

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

为分式线性变F (дробно-линейная функция) 或 Möbius 变换。

特别地，当 $c=0$ 时，分式线性变换退化为整线性函数。当 $z\to\infty$ 时有 $w=L(z)\to\infty$，定义 $L(\infty)=\infty$；若 $c\neq 0$，则当 $z\neq -\frac{d}{c}$ 时，分式线性变换显然解析，当 $z\to -\frac{d}{c}$ 时，$w=L(z)\to\infty$，而当 $z\to\infty$ 时，$w=L(z)\to\frac{a}{c}$，定义 $L\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty,L(\infty)=\frac{a}{c}$

♣

性质 （Möbius 变换复合封闭性）

Möbius 变换叠置 (суперпозиция)（或称复合）封闭

证明 考虑分式线性变换 L_1 与 L_2 的复合

$$L_1(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\text{ и }L_2(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

记为 $L=L_2L_1$

$$w=L(z)=L_2\left[L_1(z)\right]=\frac{a_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}+b_2}{c_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}+d_2}=\frac{a_3z+b_3}{c_3z+d_3}$$

其中

$$a_3=a_2a_1+b_2c_1,b_3=a_2b_1+b_2d_1,c_3=c_2a_1+d_2c_1,d_3=c_2b_1+d_2d_1 \tag{3.3}$$

若将 L_1,L_2 和 L 与矩阵相关联

$$L_1\longrightarrow A_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix},L_2\longrightarrow A_2=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix},L\longrightarrow A_3=\begin{pmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{pmatrix}$$

则式 (3.3) 得分式线性函数 L_1 与 L_2 的复合对应于矩阵 A_3，其为矩阵 A_1 与 A_2 的积 A_2A_1。由 $\Delta_3=\Delta_1d_2\neq 0$，则 L_2L_1 也为分式线性变换，则分式线性函数的复合在集合内封闭

注 由证明过程显然得分式线性变换的结合性

性质 （Möbius 变换中性元存在性）

Möbius 变换存在中性元 I

证明 注意到

$$I(z)=\frac{1\cdot z+0}{0\cdot z+1}$$

行列式为

$$l_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

则该分式线性变换满足 $I(z)\equiv z$ 且对任意分式线性变换有 $(\forall L):LI=IL=L$，则该分式线性变换即为 Möbius 变换中性元

性质 （Möbius 变换对称元存在性）

任一 Möbius 变换均有对称元，即

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I$$

证明 设 L 表示为 $L(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 且行列式为 1，对应矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

则根据逆矩阵有 L^{-1}

$$L^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

需证等式表达为 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$

推论 3.1 (Möbius 变换群)

Möbius 变换集合与其上复合运算为结合群，且该群同构于行列式为 1 的二阶复矩阵群 $SL_2(\mathbb{C})$（即域 $\mathbb{C}$ 上的二阶特殊线性群）

注 称 Möbius 变换集合与其上复合运算构成的群为 Möbius 变换群或分式线性变换群

定义 3.5

称下面的分式线性变换为基本分式线性变换：

(1) 旋转（поворот）：$L(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z, \theta \in \mathbb{R}$

(2) 伸缩（гомотетия）：$L(z) = rz, r \in \mathbb{R}^+$

(3) 平移（сдвиг）：$L(z) = z + a, a \in \mathbb{C}$

(4) 反转（инверсия）：$L(z) = \dfrac{1}{z}$

定理 3.6

任意分式线性变换都可分解为有限个基本分式线性变换的复合

证明 设

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

当 $c = 0$ 时，分解显然。设 $c \neq 0$，则有

$$L(z) = \frac{a}{c} + \frac{cb-ad}{c(cz+d)}$$

分解也是显然的

注 该定理表明基本分式线性变换构成分式线性变换群的生成元，且要得到一般分式线性变换的性质，仅需考虑基本分式线性变换

定理 3.7 (三点确定唯一的分式线性函数)

若分式线性函数 L 与 $\wedge$ 的值在三个不同点 z_1, z_2, z_3 处值相等，则函数相等

证明 定义分式线性函数 $U = \Lambda^{-1}L$，则由定理条件有

$$L(z_i) = \Lambda(z_i), \quad i = 1,2,3,$$

则可记为

$$U(z_i) = z_i, \quad i = 1,2,3$$

这时 U 有三个不动点，z_1, z_2, z_3，则其为恒等变换 I，则由 $\Lambda^{-1}L = I$ 即有 $L \equiv \Lambda$

定义 3.6 (交比关系)

设 a,b,c,d 为有限且成对不同的复数，则称数

$$(a,b,c,d)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$$

为它们的二重 (двойное) 关系或交比 (ангармоническое) 关系 ♣

定理 3.8 (三点确定分式线性函数)

对于扩充复平面中任意三个不同点 z_1,z_2,z_3 与三个不同点 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$，则存在唯一的分式线性变换 $\omega=L(z)$ 满足

$$\omega_i=L(z_i),i=1,2,3,\cdots$$

♡

证明 存在性：不失一般性，设 $w_1=0,w_2=1,w_3=\infty$，令

$$L(z)=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

则 $w_i=L\left(z_i\right),i=1,2,3$ 得存在性

唯一性：若 $L_1(z)$ 也满足 $L_1\left(z_i\right)=w_i,i=1,2,3$，则 ${L_1}^{-1}L(z)$ 满足 ${L_1}^{-1}L\left(z_i\right)=z_i$ ，但对于分式线性变换

$$L(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

其不动点为方程

$$z=\frac{az+b}{cz+d}$$

的解，若 $L(z)$ 不为恒等映射，则其最多有两个不动点，但 z_1,z_2,z_3 都为 $L_1^{-1}L(z)$ 的不动点，则 $L_1^{-1}\circ L(z)=z$，即 $L_1(z)=L(z)$

注 函数保留了有限情形下 z_1,z_2,z_3,z 的谐波关系：

$$(w_1,w_2,w_3,w)=(z_1,z_2,z_3,z)$$

定理 3.9 (交比关系不变性)

设 $w=L(z)$ 为任意分式变换，而 a,b,c,d 为任意有限且成对不同的复数，而 A,B,C,D，为它们在 $L(z)$ 的像，则有

$$(a,b,c,d)=(A,B,C,D) \tag{3.4}$$

♡

证明 在定理 (3.8) 中考虑函数 $L(z)$ 对于 (a,b,d) 与 (A,B,D) 的解，即根据

$$\frac{w_1-w}{w_2-w}:\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}=\frac{z_1-z}{z_2-z}:\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \tag{3.5}$$

则有

$$\frac{w-A}{w-B}:\frac{D-A}{D-B}=\frac{z-a}{z-b}:\frac{d-a}{d-b} \tag{3.6}$$

由 $C=L(c)$，则 (3.6) 必满足 (c,C)，将其代入 (3.6) 则有等式 (3.4)

注 假设任意数 z_i 或 w_j 可以为 ∞，则弱化了有限性条件。若用单位替换所有包含 z_i 或 w_j 的差，则公式 (3.5) 仍然适用

注[复平面上直线与圆的表示] 在 Euclid 平面上找到一个方程，其可以在适当系数下描述任意直线或圆，即

$$A\left(x^2+y^2\right)+2Bx+2Cy+D=0 \tag{3.7}$$

若 $A=0,B^2+C^2\neq 0$，则 (3.7) 为描述直线的一次方程。若 $A\neq 0,B^2+C^2-AD>0$，则 (3.7) 可以写为等价形式

$$\left(x^2+2\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{A^2}\right)+\left(y^2+2\frac{C}{A}y+\frac{C^2}{A^2}\right)=\frac{B^2+C^2-AD}{A^2}\equiv R^2$$

其为圆心在点 $(-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A})$ 半径为 R 的圆的方程。反之，用标准方程定义任意圆

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

并展开其中括号，则形式上为方程 (3.7)

把方程 (3.7) 转换为复平面上方程，设其中

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

并引入复系数 $E=B+iC$，则有 $Az\bar{z}+\bar{E}z+E\bar{z}+D=0$，若 $A=0, E\neq 0$，则该方程为直线；若 $A\neq 0, |E|^2-AD>0$，则该方程为圆

定理 3.10 (Möbius 变换保圆性)

分式线性变换将直线或圆映为直线或圆

证明 对于整线性函数，从定义的保角映射的几何解释（复平面的平移、位似和关于固定点的旋转）中显然。此外，对于整线性函数，直线仍然为直线，圆仍然为圆。因此，只考虑如下形式的线性函数：

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}, c\neq 0$$

下证对如下反转函数，定理成立

$$w=\frac{1}{z}$$

设 γ 为平面 z 上任意直线或圆，将 γ 记为方程 (3.7)，将 (3.7) 中的 z 替换为 $\frac{1}{w}$ 得到反转作用下图像的方程：

$$Dw\bar{w}+Ew+\bar{E}\bar{w}+A=0 \tag{3.8}$$

D 与 A 有如下四种可能：

1.$D=0, A=0$ 且 $E\neq 0$，则方程 (3.8) 定义了一条直线

2.$D=0, A\neq 0$ 且 $|E|^2-AD=|E|^2>0$，则 $E\neq 0$，则方程 (3.8) 定义了一条直线

3.$D\neq 0, A=0$ 且 $E\neq 0$，由 $|E|^2-AD=|E|^2>0$，则 $E\neq 0$ 则方程 (3.8) 定义了一个圆

4.$D\neq 0, A\neq 0$ 且 $|E|^2-AD>0$，则 $E\neq 0$ 则方程 (3.8) 定义了一个圆

因此，在所有四种情况下都会得到一条直线或圆。

一般情况下 $L(z)$ 记为

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

数 $\Delta=ad-bc$ 为 $L(z)$ 行列式，$L(z)$ 可表示为三个分式线性变换的复合 $L=L_2\wedge L_1$，其中

$$z_1=L_1(z)=cz+d, z_2=\Lambda(z_1)=\frac{1}{z_1}, w=L_2(z_2)=\frac{a}{c}-\frac{\Delta}{c}z_2$$

其中两个变换为整线性函数，第三个为反转，由上述讨论得，命题对 $L(z)$ 成立

注 若直线或圆（不）经过一个分式线性函数 $L(z)$ 的奇点 $\delta=-d/c$ ，则它在这个函数作用的像（不）必须包含点 $\infty=L(\delta)$，则为直线（圆）

定义 3.7 (对称几何定义)

若通过点 z_1 和 z_2 的直线与任意通过点 z_1 和 z_2 的圆与 γ 正交，则称点 z_1 和 z_2 相对于圆 γ 对称

注 （对称几何定义）

设 γ 由方程 $|z-a|=R$ 给出。由相对于 γ 的对称性定义有 z_1 和 z_2 必位于从圆心 出发的射线上，且其中一个点在内部，另一个点在 γ 外部。设 Γ 为任意通过 z_1 和 z_2 的圆。由从 a 到曲线 Γ 的切割线定理，则从 a 到 z_1 与 z_2 的距离的乘积等于半径 R 的平方

由此，若相对于圆 $|z-a|=R$ 的对称点 z_1 和 z_2 位于自圆心 a 出发的同一条射线上且它们到圆心距离的

积等于该圆周半径的平方 R^2，则有

$$\arg(z_1-a)=\arg(z_2-z_0),|z_1-a||z_2-a|=R^2$$

$$z_1-a=\frac{R^2}{|z_1-a|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z_1-a)}=\frac{R^2}{|z_1-a|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg(z_1-a)}}=\frac{R^2}{\overline{z_1-a}}$$

则有对称点的计算公式

$$z_2=a+\frac{R^2}{\overline{\overline{z_1-a}}}$$

例题 3.2 (关于圆对称/Apollonius 圆) 求圆周 $\gamma'=\{z\in\mathbb{C}|(|z-a_2|=R_2)\}$ 关于圆周 $\gamma=\{z\in\mathbb{C}|(|z-a_1|=R_1)\}$ 的对称像，其中 R_1,R_2 为实数且 $|a_1-a_2|=1$

解 关于圆周 γ 的对称变换可由函数 $w=1+\frac{R_1^2}{\overline{z-a_1}}$ 给出，由此则有 $z=a_1+\frac{R_1^2}{\overline{w-1}}$，因此对称点满足 $|a_1+\frac{R_1^2}{\overline{w-1}}-a_2|=R_2$，整理得

$$|(\overline{a_1}-\overline{a_2})w+R_1^2-\overline{a_1}+\overline{a_2}|=R_2|w-1|$$

由 $|a_1-a_2|=1$，则点到二定点间距离比为常数，其为关于两点的 Apollonius 圆（周）

定义 3.8 (对称解析定义)

设 $Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$ 为一给定的圆或直线 γ 的方程，z_1,z_2 为 $\mathbb{C}$ 中的点，若

$$Az_1\bar{z}_2+\bar{B}z_1+B\bar{z}_2+C=0$$

则称 z_1,z_2 相对于 γ 对称

♣

定理 3.11 (Möbius 变换在复平面保对称性)

若分式线性变换 $w=L(z)$ 将直线或圆 γ 变为直线或圆，则分式线性变换将相对于 γ 对称的点 z_1 与 z_2 变为相对于直线或圆 $\Gamma=L(\gamma)$ 对称的点 w_1 与 w_2

♡

证明 [证明一：几何证明] 设 γ_2 为通过 w_1 与 w_2 的直线或圆，该曲线的原像 $\gamma_1=L^{-1}\gamma_2$ 为通过点 z_1 与 z_2 的直线或圆。由 z_1 与 z_2 相对于 γ 对称，则 γ_1 与 γ 正交。由分式线性变换 $w=L(z)$ 共形，则 γ_2 与 Γ 正交，则 w_1 与 w_2 相对于 Γ 对称

证明 [证明二：解析证明] (仅需考虑积分分式线性变换，仅证反转情形) 设 γ 由方程 $Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$ 给出，则 Γ 由方程 $A+\bar{B}\bar{w}+Bw+Cw\bar{w}=0$ 给出。若 z_1,z_2 为关于 γ 的对称点，则 $Az_1\bar{z}_2+\bar{B}z_1+B\bar{z}_2+C=0$，这时 z_1,z_2 的像为 $w_1=\frac{1}{z_1},w_2=\frac{1}{z_2}$，显然满足 $A+\bar{B}\bar{w}_2+Bw_1+Cw_1\bar{w}_2=0$，则 w_1,w_2 相对于 Γ 对称

命题 3.4

$\mathbb{C}$ 中的四个点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆的充要条件为其交比 (z_1,z_2,z_3,z_4) 为实数

♠

证明 设 K 为由 z_2,z_3,z_4 确定的圆，$L(z)$ 为将 K 变为实轴的一个分式线性变换，则 z_1 在 K 上等价于 $L(z_1)$ 在实轴上，而这等价于 $(L(z_1),L(z_2),L(z_3),L(z_4))$ 为实数，但交比在分式线性变换下不变即证

例题 3.3 (Rokovsky[1]函数 функция Жуковского)

$$w=\lambda(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\operatorname{dom}\lambda=\{z|z\neq0\}$$

对于给定的 w 可以看作关于 z 的方程：

$$z^2-2wz+1=0 \tag{3.9}$$

该方程在 $\mathbb{C}$ 上可解，由此有 $\operatorname{im}\lambda=\mathbb{C}$

[1]尼古拉 · 叶戈罗维奇 · 茹科夫斯基 (Николай Егорович Жуковский,1847.1.17-1921.3.17) 俄罗斯数学家，力学家，1868 年毕业于莫斯科大学，被列宁称为“俄罗斯航空之父”

在 $\lambda(z)$ 定义域处处有连续导数

$$\lambda'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$$

因此 $\lambda(z)$ 在 $z\neq 0$ 时解析。在除 $z=\pm 1$ 外的任何地方导数均非零，且由局部共形性充分条件 (3.5) 有 $\lambda(z)$ 具有局部共形性。可以证明在 $z=\pm 1$ 处失去共形性。对于全局共形性，由函数 $\lambda(z)$ 的非双射而失去。另外，方程 (3.9) 表明，在典型情况下每个 w 都有两个原像 z_1 和 z_2，且有 $z_1z_2=1$

从函数的定义看 Rokovsky 函数在自身定义域中为双叶的，它的单叶域为单位圆 $|z|<1$, 区域 $|z|>1$ 以及半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 与 $\operatorname{Im} z<0$。在扩充复平面 (расширенная комплексная плоскость) 上延拓 Rokovsky 函数的定义域 $\lambda(0)=\lambda(\infty)=\infty$

将单位圆 k 视为一个圆族 (семейство) 的并集

$$\gamma_r : z=r(\cos t+i\sin t), 0\leqslant t\leqslant 2\pi \tag{3.10}$$

其中 r 在 $(0,1)$ 内变化。圆 γ_r 的像的方程通过将 $\lambda(z)$ 应用于方程 (3.10) 的两个部分得到

$$\Gamma_r : w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)\cos t-i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\sin t \tag{3.11}$$

这即为具有半轴的椭圆的参数方程

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$$

虚单位前面的减号表示若点 z 沿正方向绕圆 γ_r，则其图像 w 沿负方向绕椭圆 Γ_r

椭圆 Γ_r 的焦距 (фокальное расстояние) 等于 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$ 且与 r 无关，因此族 (3.11) 的所有椭圆在点 1 与 -1 处都有共同焦点（称这样的椭圆共焦 (софокусны)）。若 $r\to 0$，则有 $a,b\to\infty$，即 Γ_r 无界扩展，当 $r\to 1$ 时有 $a\to 1, b\to 0$，则 Γ_r 被压平，在极限处趋近于实轴的闭区间 $[-1;1]$ （该闭区间即单位圆 $|z|=1$ 的像）

对 $r\in(0,1)$ 取所有椭圆 Γ_r 的并集，则得区域 G，其为变量 $w=u+iv$ 的平面，从 $-1\leqslant u\leqslant 1, v=0$ 被删除得。由于 $\lambda(z)$ 在单位圆 k 中单叶且在该圆每个点上都局部共形，则有一般结论

$$|z|<1\xrightarrow[\text{共形}]{\lambda(z)}G$$

用 k_1 表示单位圆的上半部分，即区域 $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$，并通过 k_2 表示下半部分。$|z|>1, \operatorname{Im} z<0$ 记为 K_1，而区域 $|z|>1, \operatorname{Im} z>0$ 记为 K_2。注意到，点 ω 的两个原像 z_1 与 z_2 满足 $z_1z_2=1$，则有

$$\lambda\left(k_1\right)=\lambda\left(K_1\right), \lambda\left(k_2\right)=\lambda\left(K_2\right) \tag{3.12}$$

若在前面分析中考虑的是它们的上半部分（不包括其中的点 $-r$ 与 r），而不是完整的圆 γ_r，则它们将被映射到下半部分椭圆 Γ_r 的一半。这些半椭圆的并集为半平面 $\operatorname{Im} w<0$，则有

$$k_1\xrightarrow[\text{共形}]{\lambda(z)}\operatorname{Im} w<0$$

类似有 $k_2\xrightarrow[\text{共形}]{\lambda(z)}\operatorname{Im} w>0$，由式 (3.12) 有 $K_1\xrightarrow[\text{共形}]{\lambda(z)}\operatorname{Im} w<0$ 且 $K_2\xrightarrow[\text{共形}]{\lambda(z)}\operatorname{Im} w>0$

现在利用表示 $P_+=k_1\cup K_2\cup\gamma_1$ ，找到上半平面 $P_+=\operatorname{Im} z>0$ 的像，表示中 γ_1 为上单位半圆 $|z|=1, \operatorname{Im} z>0$, Rokovsky 函数映射到实轴区间 $-1<u<1$。由区域 k_1 与 K_2 的像已知，则有 P_+ 在 $\lambda(z)$ 作用下的上半平面共形像为变量 w 的平面，沿射线 $(\infty,-1]$ 和 $[1,\infty)$ 的实轴有凹，同一区域为下半平面 $\operatorname{Im} z<0$ 的图像

对于同心圆 (концентрическая окружность) 族 $\gamma_r, 0<r<1$。单位圆的半径族正交。欲找到这样一个半径的像

$$r_\alpha : z=t(\cos\alpha+i\sin\alpha), 0<t<1$$

首先设 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$R_\alpha : w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right)\cos\alpha-i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\sin\alpha$$

用两个实方程替换参数方程

$$u=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right)\cos\alpha, v=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\sin\alpha \tag{3.13}$$

对两个等式平方，然后将第一个除以 $\cos^2\alpha$，将第二个除以 $\sin^2\alpha$，将这些比率相互减去则有

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=1 \tag{3.14}$$

这即为具有半轴 $|\cos\alpha|$ 和 $|\sin\alpha|$ 的双曲线的标准方程。由式 (3.13) 有，当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时 u 的值为正，而 v 的值为负。因此，半径 r_α 的像为位于第四象限的双曲线 (3.14) 的半分支 (полу-ветвь)，其余三个半分支为对应于角度 $\pi-\alpha,\pi+\alpha$ 和 $2\pi-\alpha$ 的半径图像。这些半径与初始半径 r_α 相对于坐标轴与原点对称

双曲线 (3.14) 的的焦距为 $c=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$ 且其不依赖于 α，即该族所有双曲线 (3.14) 均共焦 (它们在 1 与 -1 处有共同焦点，此外它们与族 (3.11) 的椭圆共焦

由映射 $w=\lambda(z)$ 在单位圆内每个内点处共形，则 (3.11) 与 (3.14) 正交，如图 (3.1) 所示

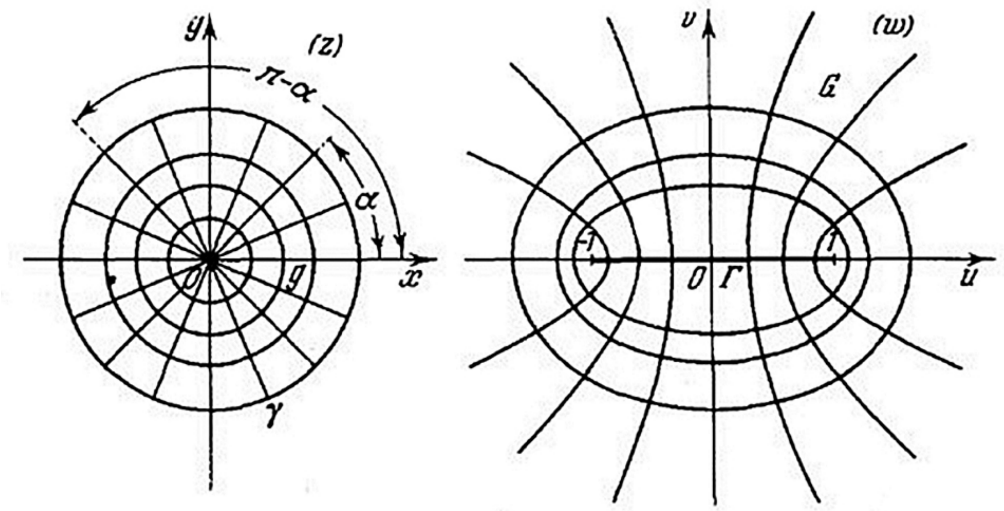

图 3.1: Rokovsky 函数在单位圆共形作用

3.3 正规族与 Riemann 映射定理

定义 3.9 (正规族)

设区域 U 上函数族 $\mathfrak{F}$，若 $\mathfrak{F}$ 中任意序列中必有子序列在 U 的任意紧子集上一致收敛，则称函数族 $\mathfrak{F}$ 为区域 U 上正规 (函数) 族

定理 3.12 (Ascoli-Arzela 定理)

设 K 为 R^n 中的紧集，若函数族 $\mathfrak{F}=\{f_\nu\}$ 在 K 上等度连续且一致有界的，则 $\mathfrak{F}$ 中必有子函数序列在 K 上一致收敛

定理 3.13 (Montel 定理)

设区域 $U\subset\mathbb{C}$，$\mathfrak{F}$ 为 U 上的全纯函数族，若

$$(\exists M>0)(\forall z\in U)(\forall f\in\mathfrak{F}):|f(z)|\leqslant M$$

则 $\mathfrak{F}$ 为正规族

证明 显然有

$$(\forall z_0 \in U)(\exists R) : \overline{D}\left(z_0, R\right) \subset U$$

由 U 为开集，则 U^c 为闭集。由 $\overline{D}\left(z_0, R\right)$ 与 U^c 不交，则在该二闭集之间有一正距离，即

$$(\exists c > 0)(\forall z \in \bar{D}\left(z_0, R\right))(\forall u \in U^c) : |z - u| > c$$

对任意 $z \in \overline{D}\left(z_0, R\right)$，任意 $f \in \mathfrak{F}$。在圆 $\overline{D}(z, c)$ 上用 Cauchy 不等式即得 $|f'(z)| \leqslant \dfrac{M}{c}$。记 $\dfrac{M}{c} = C$，则有

$$(\forall z, w \in \overline{D}(z_0, R)) : |f(z) - f(w)| \leqslant C|z - w|$$

这表明 $\mathfrak{F}$ 在 $\bar{D}\left(z_0, R\right)$ 上等度连续，对固定 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ 即可

若 K 为 U 上任意紧子集，则由 Bolel 引理，可用有限个 $\overline{D}\left(z_0, R\right)$ 覆盖，则 $\mathfrak{F}$ 在 K 上也等度连续。由 Ascoli-Arzela 定理 (3.12)，对 $\mathfrak{F}$ 中任一序列 $\{f_v\}$，可找到一个子序列 $\{f_{v_k}\}$ 在 K 上一致收敛，则可利用对角线方法证明在 $\{f_\nu\}$ 中存在这样的子序列 $\{f_{\nu_k}\}$，在 U 中所有紧集上一致收敛

定理 3.14 (Riemann 映射定理)

若 $U \subseteq C$ 为单连通区域，其边界点多于一点，z_0 为 U 中任意一点，则在 U 上存在唯一的一个单叶全纯函数 $f(z)$ 将 U 映到单位圆 $D(0,1)$ 上，且 $f\left(z_0\right) = 0, f'\left(z_0\right) > 0$