数学分析 4-含参变量的积分

Интегралы, зависящие от параметров

组织：深北莫数学学社分析小组

时间：2023/2/13

宗旨：执象而求，咫尺千里

时间是个常数，但对勤奋者来说，是个‘变数’。用‘分’来计算时间的人比用‘小时’来计算时间的人时间多 59 倍——雷巴柯夫

目录

第 1 章 不定积分引论

例题 1.1 （1703）求积分

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

解 解一：

凑微分求积如下：

$$I=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

解 解二：（万能代换）

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则有

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

于是可求积如下：

$$I=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

注 答案还可有其他形式，几个常用答案如下：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C$$

例题 1.2 （1704）求

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

解 利用代换 $x+\frac{\pi}{2}=t$ 就有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)},$$

于是已将问题归结为例题 (1.1)

注 几个常用答案如下：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\ln\left|\frac{\cos x}{1-\sin x}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C$$

例题 1.3 （1820/分部积分循环现象）求

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

解 利用 $\mathrm{d}\left[\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]=3x\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$，由分部积分法

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}\left[\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\\&=\frac{1}{3}x\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}x\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int x^2\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

将右边第二项移到左边，对第三项利用公式即得

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{a^2}{8}x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

例题 1.4 （1886/部分分式分解）求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$$

解 将分母因式分解得

$$\begin{aligned} x^6+1 &= \left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right)^2-3x^2\right] \\ &= \left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right) \end{aligned}$$

于是被积函数有部分分式展开如下：

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1}$$

两边乘 x^2+1，然后令 $x\to \mathrm{i}$ 得 $\frac{1}{3}=a\mathrm{i}+b$ ，于是同时得到 $a=0, b=\frac{1}{3}$，然后有差

$$\frac{1}{x^6+1}-\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{-x^2+2}{3\left(x^4-x^2+1\right)}$$

接着计算展开式

$$\frac{-x^2+2}{3\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1}$$

利用 x 换 $-x$ 时左边不变，而右边分母对换，有 $A=-C$，$B=D$。又令 $x=0$ 代入，得 $B+D=\dfrac{2}{3}$，则 $B=D=\dfrac{1}{3}$。再令 $x=\mathrm{i}$ 代入，并利用 $B=D$ 得

$$\frac{1}{3}=\frac{A\mathrm{i}+B}{-\sqrt{3}\mathrm{i}}+\frac{C\mathrm{i}+D}{\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(C-A)$$

即可解出 $A=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=-C$

最后求积如下：

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{3\left(x^2+1\right)}+\int \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x+\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3})+\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})+C \end{aligned}$$

性质 基本积分公式：

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C; \\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C(\alpha\lessgtr 0) \end{aligned}$$

命题 1.1 (Euler 代换)

只考虑被积函数为有理函数（乘）除以二次无理式 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分问题。对于含有二次无理式的一般积分问题，即被积函数为 $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ 的不定积分，其中 $R(u,v)$ 是二元有理函数，则上述被积函数的不定积分一定是初等函数

注 欧拉代换有以下三种:

(1) 若 $a>0$, 则可用

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$$

(2) 若 $c>0$, 则可用

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$$

(3) 对于根号内为可约的二次三项式, 则可用

$$\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=t\left(x-x_1\right)$$

性质 基本积分公式:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C(a>0)$$
$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C(\alpha\neq 0)$$

定理 1.1 (Chebyshev 定理)

(Chebyshev 定理[a]) 设 m,n,p 都是有理数, 则二项式微分的不定积分

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p\,\mathrm{d}x$$

为初等函数的充要条件为有理数 m,n,p 满足以下三个条件之一:

(1) p 为整数

(2) $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数

(3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ 为整数

[a]切比雪夫 (ПафНутий Львович Чебышев,1821.5.26-1894.12.8) 俄罗斯数学家、力学家。一生发表了 70 多篇科学论文, 内容涉及数论、概率论、函数逼近论、积分学等方面。他证明了贝尔特兰公式, 自然数列中素数分布的定理, 大数定律的一般公式以及中心极限定理。

证明 证明:(仅充分性) 仅证明三个条件对可积性的充分条件

(1): p 为整数, 这时可设有理数 m,n 为具有公分母 N 的分数 $m=\dfrac{m_1}{N},n=\dfrac{n_1}{N}$, 其中 m_1,n_1,N 都是整数, 且 $N>0$。于是只要令 $x=t^N$, 就有 $\mathrm{d}x=Nt^{N-1}\,\mathrm{d}t,x^m=t^{m_1},x^n=t^{n_1}$, 满足有理化。

(2): $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数, 先令 $x^n=u$, 则有

$$x=u^{\frac{1}{n}},\ \mathrm{d}x=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$$
$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int u^{\frac{m}{n}}(a+bu)^p u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}}(a+bu)^p u^{-1}\,\mathrm{d}u$$

若设 $p=\dfrac{M}{N},M,N$ 为整数, 且 $N>0$, 则再令 $a+bu=t^N$ 就可实现有理化。

(3): $\frac{m+1}{n}+p$ 为整数, 与情况 (2) 一样, 先令 $x^n=u$, 则积分变换为

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int u^{\frac{m}{n}}(a+bu)^p u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}+p}\left(\frac{a+bu}{u}\right)^p u^{-1}\,\mathrm{d}u$$

若设 $p=\dfrac{M}{N},M,N$ 为整数, 且 $N>0$, 则再令 $\dfrac{a+bu}{u}=t^N$ 就可实现有理化。

注 需要注意三种可积情况的条件, 除此之外的二项式微分都不可积

注 合并以上陈述可知, 情况 (1) 有理化代换为 $x=t^N$

情况 (2) 有理化代换为 $a+bx^n=t^N$, 其中 $N>0$ 是有理分数 p 的分母

情况 (3) 有理化代换为

$$\frac{a+bx^n}{x^n}=\frac{a}{x^n}+b=t^N$$

其中 $N(>0)$ 是有理分数 p 的分母

命题 1.2 (三角函数万能代换)

由于三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的有理式可写成为 $R(\cos x, \sin x)$, 其中 $R(u,v)$ 是二元有理函数，因此只考虑 $\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ 求积。利用所谓的万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$，则能够同时将 $\sin x, \cos x$ 实现有理化

证明 设 $t=\tan\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$，则有

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x &= \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}(2\arctan t)=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

则可以将有理三角函数的积分归结为有理函数的不定积分：

$$I=\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

注 万能代换缺点是可能引入繁复的计算，在几种特殊情况中，往往用下列有理化代换

(1) 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可用代换 $t=\cos x$，其特例为 $R(\cos x)\sin x$

(2) 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可用代换 $t=\sin x$，其特例为 $R(\sin x)\cos x$

(3) 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则可用代换 $t=\tan x$，其特例为 $R(\tan x)$

若被积表达式为 $P\left(\cos^2 x,\cos x\sin x,\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$, 其中 $P(u,v,w)$ 是 u,v,w 的有理函数, 由 $t=\tan x$ 可计算得到 $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\cos x\sin x=\frac{t}{1+t^2},\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ 因此已经将积分 $\int P\left(\cos^2 x,\cos x\sin x,\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$ 实现了有理化

性质 若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C$$

若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则

$$\begin{aligned}\int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x=&\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]\\&+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C\\ \int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x=&-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]\\&+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C\end{aligned}$$

第 2 章 常义参变积分

定义 2.1 (依赖于参数 y 的常义参变积分)

设函数 f 在矩形区域 $\Pi = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 上给定。若 $\forall y \in [c;d]$ 存在沿 x 的积分 $\int_a^b f(x,y)dx$，即在 $[c;d]$ 上给定了函数

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

则称该积分为依赖于参数 y 的常义参变积分 (собственный интеграл,зависящим от параметра y) ♣

定理 2.1 (常义参变积分连续性)

设 $I_1 = [a;b], I_2 = [c;d]$，若函数 f 在矩形区域 $\Pi = I_1 \times I_2$ 上连续，则参变积分在 $[c;d]$ 上连续 ♡

证明 显然有 $f \in \mathrm{C}(\Pi) \Rightarrow f \in \mathrm{C}[c;d]$，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in I_1)(\forall y_1, y_2 \in I_2)\left[|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right]$$

令 $(\forall y_1, y_2 \in I_2) : |y_1 - y_2| < \delta$，则有

$$|J(y_1) - J(y_2)| = \left|\int_a^b (f(x,y_1) - f(x,y_2))\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x,y_1) - f(x,y_2)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

即得 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上连续（一致连续）

注 实际上由 Cantor 定理，结论可强化为一致连续

注 由定理可知，函数 $J(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，则有等式

$$\lim_{y \to y_0} J(y) = J\left(\lim_{y \to y_0} y\right) = J(y_0)$$

其中 $y_0 \in [c,d]$

例题 2.1 （3712/常义参变积分连续性）研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x$$

的连续性，其中 $f(x)$ 为闭区间 $[0;1]$ 上的正连续函数

解 利用常义参变积分连续性定理 (2.1) 即得 $F(y)$ 在 $y \neq 0$ 时连续，因此仅需讨论在点 $y = 0$ 处的情况，这时有 $F(0) = 0$，下面讨论 $y \to +0$ 时的情况

由 $f(x)$ 在 $[0;1]$ 上为正连续函数，因此存在最小值 $m > 0$，于是当 $y > 0$ 时有估计：

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x \geqslant m \int_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = m \arctan \frac{x}{y}\bigg|_{x=0}^{x=1} = m \arctan \frac{1}{y}$$

令 $y \to +0$ 有 $\varliminf_{y \to +0} F(y) \geqslant \dfrac{m\pi}{2} > 0$，由 $F(0) = 0$ 得 $F(y)$ 于点 $y = 0$ 处不连续

注 实际上，$f(x)$ 为正的条件是多余的。题设中 $f(x)$ 在 $[0;1]$ 上正连续的条件可以减弱为在 $[0;1]$ 上连续且存在极限 $f(+0)$。在此条件下可以通过估计 $|F(y) - F(y_0)|$ 来证明函数 $F(y)$ 于 $y \neq 0$ 时均连续，余下的主要问题仍为讨论 F 在点 $y = 0$ 处的性态

下面计算 $F(+0)$。任意取定 $\delta \in (0,1)$，将定义 $F(y)$ 的积分分拆如下：

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\delta \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \int_\delta^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x$$

这时右边的第一个积分的极限可用积分第一中值定理计算如下：

$$\int_0^\delta \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_0^\delta \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x = f(\xi) \arctan \frac{x}{y}\bigg|_{x=0}^{x=\delta} = f(\xi) \arctan \frac{\delta}{y} \xrightarrow[y \to +0]{} f(+0)\frac{\pi}{2}$$

而第二个积分的极限可利用函数 $f(x)$ 在 $[0;1]$ 上有界而计算如下：

$$\left|\int_\delta^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\cdot\frac{y}{\delta^2+y^2}\xrightarrow[y\to+0]{} 0$$

综上即得 $F(+0)=f(+0)\frac{\pi}{2}$。由 $F(y)$ 为奇函数，因此又有 $F(-0)=-f(+0)\frac{\pi}{2}$，则 $F(y)$ 于该点有第一类不连续点

例题 2.2 (3713/连续化应用常义参变积分连续性) 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

解 将参数 n 的倒数 $\frac{1}{n}$ 连续化，仅需计算参变量 y 的积分

$$F(y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}(0<y\leqslant 1)$$

当 $y\to+0$ 时的极限。由被积函数当 $y\to+0$ 时的极限为 $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$，则被积函数在延拓至 $y=0$ 后即为在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数，则由定理 (2.1) 得积分 $F(y)$ 于 $y=0$ 处右侧连续，则有

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x\right)}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=\left[\ln t-\ln(1+t)\right]\Big|_1^{\mathrm{e}}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$$

注 由此可见，用级数计算定积分的问题，可以看成为以 n 为离散参数的含参变量积分的极限问题

例题 2.3 (3714/积分形式 Newton-Leibniz 公式) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A;B]$ 上连续. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a)(A<a<x<B)$$

解 由函数连续则存在原函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$，由 Newton-Leibniz 公式即得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F(t+h)-F(t)\right]\Big|_a^x\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)-F(a+h)+F(a)]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=f(x)-f(a)\end{aligned}$$

注 若 f 连续可微，则应用极限与积分交换顺序的定理即有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^x\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,\mathrm{d}t=\int_a^x\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right]\mathrm{d}t=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

而本题表明只需 f 连续已可得到相同结论

定理 2.2 (常义参变积分可积性)

若 $f=f(x,y)$ 在矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，则参变积分 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上可积且有

$$\int_c^d J(y)dy:=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \tag{2.1}$$

注 该定理为在 Lebesgue 可积分的意义下，Fubini 定理的强化。Fubini 定理只要求函数 fLebesgue 可积而非连续

证明 由 $J(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续性得 $[c,d]$ 上可积性。则公式可以写为二重积分的形式

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\iint_\Pi f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

注 同理可得 $\forall y_0: c<y_0\leqslant d$ 都满足 $J(y)$ 沿 $[c,y_0]$ 可积且满足公式

$$\int_c^{y_0}J(y)dy=\int_c^{y_0}\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^{y_0}f(x,y)dy\right)dx$$

定理 2.3 (常义参变积分可微性/Leibniz 法则)

若函数 $f=f(x,y)$ 在矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，且偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_y(x,y)$ 在矩形区域 Π 上连续，则 $J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上可微且满足公式：

$$J'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx$$

♡

证明 假设

$$K(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\int_a^b f_y(x,y)dx$$

则有

$$\frac{\partial f}{\partial y}\in \mathrm{C}(\Pi)\Rightarrow K(y)\in \mathrm{C}[c;d]\text{常义参变积分连续性定理}$$

根据常义参变积分的可积性定理 (2.2)，该函数在 $[c,d]$ 上可积，由此沿任意子闭区间 $[c,y],c<y\leqslant d$ 也可积。固定 $y\in(c,d]$ 并利用公式 (2.1) 则有：

$$\int_c^y K(t)dt=\int_c^y\left(\int_a^b f_t(x,t)dx\right)dt=\int_a^b\left(\int_c^y f_t(x,t)dt\right)dx$$

这里后一个等式由正常参变积分的可积性定理 (2.2) 给出。又由 Newton-Leibniz 公式有：

$$\int_a^b\left(\int_c^y f_t(x,t)dt\right)dx=\int_a^b(f(x,y)-f(x,c))dx=J(y)-J(c)$$

对 y 求导

$$\int_c^y K(t)dt=J(y)-J(c)$$

由可变上限的积分的可微性定理则有

$$K(y)=J'(y)$$

则定理得证

例题 2.4 （3726/Bessel 方程/常义参变积分 Leibniz 法则）证明阶数 $n\in\mathbb{N}$ 的 Bessel 函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)=0$$

解 由 Leibniz 法则有

$$J_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n\varphi-x\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad J_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

注意到 $J_n''(x)$ 与 $J_n(x)$ 的被积函数都有因子 $\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$，而 $J_n'(x)$ 的被积函数有因子 $\sin(n\varphi-x\sin\varphi)$，因此利用分部积分法计算 $x^2J_n''+\left(x^2-n^2\right)J_n$。显然有

$$-x^2\sin^2\varphi+\left(x^2-n^2\right)=x^2\cos^2\varphi-n^2=(x\cos\varphi+n)(x\cos\varphi-n)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(n\varphi-x\sin\varphi)=n-x\cos\varphi$$

则可计算得

$$x^2J_n''(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x\cos\varphi+n)\mathrm{d}[\sin(n\varphi-x\sin\varphi)]$$

$$=-\frac{1}{\pi}[\sin(n\varphi-x\sin\varphi)(x\cos\varphi+n)]\Big|_0^\pi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)(-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=-xJ_n'(x)$$

移项即得所求证的微分方程

例题 2.5 （3737）设 $a>0,b>0$，计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$$

解 方法一：定理 (**2.2**) 积分号下积分

将被积函数记为 $f(x)$，函数在 $x=0,1$ 处无定义，但有 $f(+0)=0$ 及用 L'Hospital 法则得 $f(1-0)=b-a$，因此可将 $f(x)$ 延拓为 $[0,1]$ 上的连续函数，则积分为常义参变积分。不妨设 $0<a<b$，则可将被积函数记为

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\ \mathrm{d}y$$

则由定理 (2.2)，积分号下积分如下

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\ \mathrm{d}x=\int_0^1\ \mathrm{d}x\int_a^b x^y\ \mathrm{d}y=\int_a^b\ \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\ \mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

由对称性，显然对 $0<a<b$ 之外的其他情况也成立

解 方法二：定理 (**2.3**) 积分号下求导

将 b 看为参变量，a 固定，积分记为 $I(b)$，则由 Leibniz 法则有

$$I'(b)=\int_0^1 x^b\ \mathrm{d}x=\frac{1}{b+1}$$

利用 $I(a)=0$ 即得

$$I(b)=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\ \mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

解 方法三：定理 (**3.1**)**Frullani** 积分

代换 $t=\ln x$ 即可化为后文的 Frullani 积分 (3.1)

命题 2.1

设 $I_1=[a;b],I_2=[c;d]$，若函数 f 在矩形区域 $\Pi=I_1\times I_2$ 上连续，则累次积分

$$H=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \quad 和 \quad G=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

皆存在且彼此相等

证明 考虑辅助函数

$$g(t,y)=\int_a^t f(x,y)dx,\quad t\in[a;b],\quad y\in[c;d]$$

欲证此函数在 Π 上连续。实际上，

$$\begin{aligned}|\Delta g|=&|g(t+\Delta t,y+\Delta y)-g(t,y)|=\left|\int_a^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx-\int_a^t f(x,y)dx\right|\\ \leqslant&\left|\int_a^t (f(x,y+\Delta y)-f(x,y))dx\right|+\left|\int_t^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx\right|\\ \leqslant&(b-a)\max_{x\in I_1}|\Delta_y f(x,y)|+c|\Delta t|\end{aligned}$$

其中 $c=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|$

由于函数 $f(x,y)$ 连续，当 $\Delta y\to 0$ 时 $\max\limits_{x\in I_1}\Delta_y f(x,y)\to 0$。因此当 $(\Delta y,\Delta t)\to(0,0)$ 时 $\Delta g\to 0$，则有 $g(x,t)$ 在 Π 上连续。另外有 $g_t(t,y)=f(x,y)$。则由定理 (2.3)，对于函数

$$G(t)=\int_c^d g(t,y)dy=\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dx$$

有

$$G'(t)=\int_c^d g_t(t,y)dy=\int_c^d f(t,y)dy=h(t)$$

另一方面，函数 $h(t)=\int_c^d f(t,y)dy$ 也连续，则由 Newton-Leibniz 公式有

$$h(t)=\frac{d}{dt}\int_a^t h(x)dx=H'(t)$$

其中

$$H(t)=\int_a^t h(x)dx=\int_a^t dx\int_c^d f(x,y)dy$$

因此 $h(t)=H'(t)=G'(t)$，此外显然有 $G(0)=H(0)=0$。则有 $\forall t\in I_1: G(t)=H(t)$

定义 2.2 (变限常义参变积分)

设在矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上给定函数 $f=f(x,y)$ 与二曲线 $x=\alpha(y),x=\beta(y)$，若 $(\forall y\in[c;d])(\exists J(y))$ 满足

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \tag{2.2}$$

则称该积分为变限常义参变积分。这时矩形区域变为区域 $D=[\alpha(y)\leqslant x\leqslant\beta(y)]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ ♣

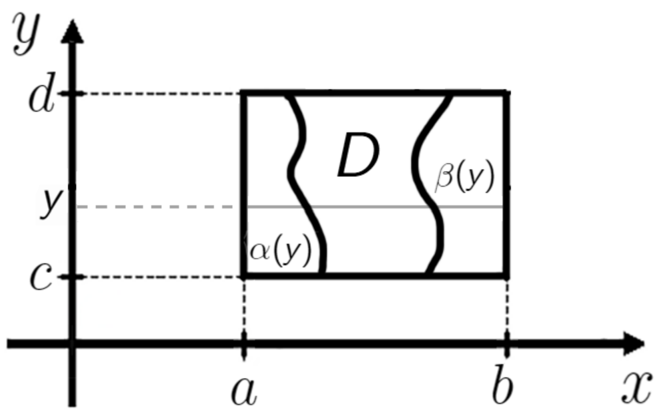

图 2.1: 变限含参变量常义积分

定理 2.4 (变限常义参变积分连续性)

设矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$，若函数 $f\in\mathcal{C}(\Pi)$ 且有函数 $\alpha,\beta\in\mathcal{C}[c;d]$，则有

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\in\mathcal{C}[c;d]$$

♡

证明 固定任意 $y_0\in[c;d]$ 并观察函数

$$J_1(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx,\quad J_2(y)=\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx,\quad J_3(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx \tag{2.3}$$

则显然有

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx=J_1(y)+J_2(y)-J_3(y)$$

仅需证明

$$\exists\lim_{y\to y_0} J_1(y)=J_1(y_0)=J(y_0),\quad \exists\lim_{y\to y_0} J_2(y)=0=\lim_{y\to y_0} J_3(y)$$

由积分 $J_1(y)$ 有常数积分限，则第一个等式由定理 (2.1) 即得，下证后面的等式

将中值定理 (теорема о среднем значении) 应用于积分 $J_2(y)$ 得

$$J_2(y)=f(x^*,y)\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} dx=f(x^*,y)(\beta(y)-\beta(y_0))$$

其中 x^* 位于 $\beta(y)$ 与 $\beta(y_0)$ 之间

由 $\beta(y)$ 连续性有 $(\beta(y)-\beta(y_0)) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} 0$，又 $f(x^*,y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} f(\beta(y_0),y_0)$，则定理得证

定理 2.5 (变限常义参变积分可微性/Euler 公式 (формула Эйлера))

设矩形区域 $\Pi=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$，$f(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_y(x,y)\in\mathcal{C}(\Pi)$，而函数 $\alpha(y),\beta(y)$ 在 $[c;d]$ 上可微，则函数 $J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上可微，并且其导数满足 Euler 公式

$$J'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)dx+\beta'(y)f(\beta(y),y)-\alpha'(y)f(\alpha(y),y)$$

♡

证明 固定任意 $y_0\in[c;d]$，由定理 (2.4) 中式 (2.3) 的 J_1,J_2,J_3，记

$$J(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx-\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx$$

其中

$$J_1(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx,\quad J_2(y)=\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx,\quad J_3(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx$$

注意到 $J_1(y)$ 的积分限与 y 无关，因此（考虑到 f 与 f'_y 的连续性条件）则由可微性定理 (2.3) 得 $J_1'(y)$ 在 y_0 的导数值

$$J_1'(y_0)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y(x,y_0)\,dx$$

由导数定义，对于任意 $J_2'(y)$ 在 y_0 有

$$J_2'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{J_2(y)-J_2(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{J_2(y)}{y-y_0}$$

考虑 $J_2(y)$，由中值定理 (теорема о среднем) 得

$$J_2(y)=f(x^*,y)\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} dx=f(x^*,y)(\beta(y)-\beta(y_0))$$

其中 x^* 位于 $\beta(y)$ 与 $\beta(y_0)$ 之间

这时有

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x^*,y)(\beta(y)-\beta(y_0))}{y-y_0}=f(\beta(y_0),y_0)\cdot\beta'(y_0)$$

同理可证

$$J_3'(y_0)=\alpha'(y_0)f(\alpha(y_0),y_0)$$

由 y 的任意性即得 Euler 公式

例题 2.6 （3719/Euler 公式）设

$$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|\mathrm{d}y$$

其中 $a<b$，$f(x)$ 为可微函数，求 $F''(x)$

解 当 $x\leqslant a$ 时有

$$F(x)=\int_a^b f(y)(y-x)\mathrm{d}y$$

则由 Leibniz 法则有

$$F'(x)=-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

同理当 $x\geqslant b$ 时有

$$F(x)=\int_a^b f(y)(x-y)\mathrm{d}y$$

则由 Leibniz 法则有

$$F'(x)=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y-\int_a^x f(y)y\ \mathrm{d}y+\int_x^b f(y)y\ \mathrm{d}y-x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y$$

当 $a<x<b$ 时有

$$F(x)=\int_a^x f(y)(x-y)\mathrm{d}y+\int_x^b f(y)(y-x)\mathrm{d}y$$

由 Euler 公式则有

$$F'(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y-\int_x^b f(y)\mathrm{d}y$$

综上有

$$F'(x)=\begin{cases}-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y, & x\leqslant a,\\ \int_a^x f(y)\mathrm{d}y-\int_x^b f(y)\mathrm{d}y, & a<x<b\\ \int_a^b f(y)\mathrm{d}y, & x\geqslant b\end{cases}$$

在此基础上计算二阶导数：当 $x\leqslant a$ 时 $F''(x)=0$，当 $a<x<b$ 时 $F''(x)=2f(x)$，当 $x\geqslant b$ 时 $F''(x)=0$。

注 该题目表明，对于被积函数含绝对值的情况，需分类讨论

第 3 章 第一类反常参变积分

定义 3.1 (第一类反常参变积分)

设函数 f 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上给定且对 $\forall y\in[c,d]$ 存在关于 x 的第一类反常积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

都收敛，称其为依赖于参数 y 的第一类反常参变积分 ♣

定理 3.1 (Frullani 积分/Frullani 第一公式)

(3789/Frullani 积分[a]/Frullani 第一公式) 若 $f(x)$ 在 $[0;+\infty)$ 上连续且

$$(\forall A>0):\left(\exists\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right)$$

则成立下列公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}(a>0,b>0)$$

[a]意大利数学家 Giuliano Frullani 在 1821 年发表该积分

♡

证明 取 $\delta>0$，则以下运算中的积分均存在

$$\begin{aligned}\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_\delta^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{a\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{b\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

其中 ξ 在 $a\delta$ 和 $b\delta$ 之间。令 $\delta\to+0$，由 $f(x)$ 于点 $x=0$ 处右连续，即得所求公式

定理 3.2 (Frullani 第二公式/Вторая формула Фруллани)

若 $f(x)\in\mathcal{C}[0,+\infty)$ 且 $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<+\infty$，则有

$$\int_0^{\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=(f(0)-f(+\infty))\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

♡

证明 见附录8.1

定理 3.3 (Frullani 第三公式/Третья формула Фруллани)

若 $f(x)\in\mathcal{C}(0,+\infty)$ 且

$$\left[(\forall A>0)(\exists\int_0^A\frac{f(x)}{x}dx)\right]\wedge\left[\exists\lim_{x\to+\infty}f(x)<+\infty\right]$$

则成立

$$\int_0^{\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=f(+\infty)\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

♡

例题 3.1 (3776,3803,4175/Euler-Poisson 积分) 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

得到 Euler-Poisson 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{3.1}$$

解 极坐标代换得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \pi$$

则该反常二重积分可变换为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

这即为 Euler-Poisson 积分

注 Euler-Poisson 积分也经常记为

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例题 3.2 (3807/Euler-Poisson 积分) 利用 Euler-Poisson 积分求积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x(a>0)$$

解 作代换 $x=\frac{a}{t}$ 则有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}\cdot\frac{a}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

将最后一个积分中的指数函数改写为

$$\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} = \mathrm{e}^{-2a}\cdot\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}$$

然后对该积分作变量代换 $u=x-\frac{a}{x}$, $\mathrm{d}u=\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x$, 则利用 Euler-Poisson 积分 (3.1) 有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

注 针对反常参变积分，需要引入更强的约束，由此使用一致收敛相关的概念

注 由

$$J(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

在区间 (y_1,y_2) 上一致收敛，可以得到函数 $f(x,y)$ 的连续性和一致收敛性

定义 3.2 (第一类反常参变积分一致收敛性)

设函数 f 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上给定，且存在依赖于参数 y 的第一类反常参变积分

$$J(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

若

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)>a)(\forall R\geqslant A(\varepsilon))(\forall y\in[c,d]):\left|\int_R^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

则称该依赖于参数 y 的第一类反常参变积分沿 $[c;d]$ 一致收敛 (равномерно сходящимся по параметру y на $[c;d]$) (或简称在 $[c;d]$ 上一致收敛)，记为

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$$

♣

注 这里的 $y\in[c;d]$ 完全可以替换成 $y\in Y$

注 代替沿区间 $[a;+\infty)$ 的反常积分，当然可以考虑沿区间 $(-\infty;b]$ 或沿全实直线 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 的积分，全部这些情形都可归结为这里所考虑的情形。例如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{0}^{+\infty} f(x,y)dx+\int_{0}^{+\infty} f(-x,y)dx$$

且此积分的收敛理解为两被加项皆收敛的问题，类似的问题在函数级数讨论，下面不再讨论

定理 3.4 (第一类反常参变积分一致收敛 Cauchy 准则)

设函数 f 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上给定且存在依赖于 y 的第一类反常参变积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$，则该依赖于 y 的第一类反常参变积分沿 $[c;d]$ 一致收敛的充要条件为满足 Cauchy 条件：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)>a)(\forall R',R''\geqslant A(\varepsilon))(\forall y\in[c;d]):\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right|<\varepsilon \tag{3.2}$$

♡

证明

必要性：设依赖于 y 的第一类反常参变积分沿 $[c;d]$ 一致收敛，则由定义有

$$(\exists A(\varepsilon)>a)(\forall R\geqslant A(\varepsilon))(\forall y\in[c,d]):\left|\int_{R}^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

特别地，若 R',R'' 为大于 $A(\varepsilon)$ 的任意数，可有

$$\left|\int_{R'}^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\left|\int_{R''}^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

进而由积分的可加性 (свойство аддитивности) 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right|&=\left|\int_{R'}^{+\infty} f(x,y)dx-\int_{R''}^{+\infty} f(x,y)dx\right|\leqslant\\ &\leqslant\left|\int_{R'}^{+\infty} f(x,y)dx\right|+\left|\int_{R''}^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

充分性：设满足 Cauchy 条件，根据一致收敛的 Cauchy 准则则有积分对 $\forall y\in[c;d]$ 收敛。固定任意 $R'=R\geqslant A(\varepsilon)$ 与 $\forall y\in[c;d]$。考虑在 (3.2) 中 R'' 趋近于 $+\infty$ 。则由关于不等式极限过程的定理 (теорема о предельном переходе в неравенстве) 有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)>a)(\forall R\geqslant A(\varepsilon))(\forall y\in[c;d]):\left|\int_{R}^{+\infty} f(x,y)dx\right|\leqslant\varepsilon<2\varepsilon$$

定理 3.5 (第一类反常参变积分一致收敛 Weierstrass 强函数判别法)

设函数 f 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上给定，且对 $\forall y\in[c;d]$ 关于 x 沿 $[a;R]$ 可积，其中 $\forall R\geqslant a$。设函数 $g(x)$ 同样在 $[a;R]$ 上可积，并且对应的反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛。另设在 Π_∞ 处处满足不等式 $0\leqslant|f(x,y)|\leqslant g(x)$，则依赖 y 的第一类反常参变积分沿 $[c;d]$ 一致收敛（且绝对收敛）

♡

证明 固定 $\forall\varepsilon>0$，则由第一类反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛性有

$$(\exists A(\varepsilon)\geqslant a)(\forall R',R''\geqslant A(\varepsilon)):\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right|\leqslant\int_{R'}^{R''}|f(x,y)|\,dx\leqslant\left|\int_{R'}^{R''} g(x)dx\right|=\int_{R'}^{R''} g(x)dx<\varepsilon$$

则第一类反常参变积分由一致收敛的 Cauchy 准则即得关于 y 在 $[c;d]$ 上一致收敛

推论 3.1

设函数 $\varphi(x,y)$ 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上一致有界，对于 $\forall y\in[c,d]$ 有关于 x 在 $[a;R]$ 上可积，其中 $\forall R>a$。另设函数 $\psi(x)$ 满足 $\int_a^{+\infty}|\psi(x)|dx$ 收敛，则有第一类反常参变积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x,y)\psi(x)dx$ 关于 y 在 $[c;d]$ 上一致收敛

♡

证明 由 φ 在 Π_∞ 上一致有界，则有

$$(\exists M>0)(\forall(x,y)\in\Pi_\infty):|\varphi(x,y)|\leqslant M$$

即有 $|\varphi(x,y)\psi(x)|\leqslant M|\psi(x)|$

由第一类反常积分 $\int_a^{+\infty}|\psi(x)|dx$ 收敛则推出 $\int_a^{+\infty}M|\psi(x)|dx$ 收敛，则当 $f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x), g(x)=M|\psi(x)|$ 时，一致收敛 Weierstrass 判别法的条件满足

例题 3.3 （3788/Weierstrass 强函数判别法）由等式

$$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$$

计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x(a>0,b>0)$$

解 方法一：**Weierstrass** 强函数判别法

设 $0<a<b$，将等式代入积分并交换积分顺序得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y=\int_a^b\,\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

又上式 (3.3) 右边的内层积分在 $0<a<y<b$ 时为

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-xy}\bigg|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{y}$$

则得 (3.3) 的积分值为 $\ln\dfrac{b}{a}$

下证 (3.3) 中积分换序合理性。由定理 (3.11)，只需含参变量 y 的反常参变积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 在 $y\in[a;b]$ 上一致收敛。由在 $y\in[a;b]$ 时有 $\mathrm{e}^{-xy}\leqslant\mathrm{e}^{-ax}$ 成立，则用 e^{-ax} 作为强函数即由一致收敛 Weierstrass 强函数判别法 (3.5) 得证

解 方法二：**Frullani** 积分

本题积分为 Frullani 积分 (3.1) 特例，直接计算即得

例题 3.4 （3753/Weierstrass 强函数判别法充分不必要性）证明第一类反常参变积分

$$I=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

在 $(0<y<1)$ 一致收敛，但不存在其积分为收敛且与参数无关的强函数

解 反证：若存在与参数无关的强函数 $\varphi(x)$，则由

$$0\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\leqslant\varphi(x)\quad(0<y<1,1\leqslant x<+\infty)$$

有仅需对每个 x 取参数 $y=\frac{1}{x}$ 即得 $\varphi(x)\geqslant 1$，显然恒大于等于 1 的函数在 $[1,+\infty)$ 上的积分发散，因此不存在其积分为收敛且与参数无关的强函数

下证积分在 $y\in(0,1)$ 上一致收敛。由被积函数处处大于 0，因此仅需

$$(\varepsilon>0)(\exists M>1)(\forall y\in(0;1)):\int_M^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x<\varepsilon \tag{3.4}$$

作平移代换 $x-\dfrac{1}{y}=t$ 则有

$$\int_M^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}t.$$

由此对于充分小的 $y\in(0;1)$，积分下限小于 0，这时有估计：

$$\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}t=y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)\leqslant y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=y\sqrt{\pi} \tag{3.5}$$

其中最后的等式利用了 Euler-Poisson 积分 (3.1)

因此当 $0<y<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ 时，无论取什么 $M>1$，不等式 (3.4) 总成立。当 $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\leqslant y<1$，由 (3.5)，不妨先取

$M_0 > 1$，使得满足

$$\int_{M_0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u < \varepsilon$$

然后只要取 $M > M_0 + \dfrac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}$，就有 $M - \dfrac{1}{y} \geqslant M - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon} > M_0$。又利用 $y < 1$，则有

$$\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{y^2}}\, \mathrm{d}t = y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u < \int_{M_0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u < \varepsilon$$

综上，积分在 $0 < y < 1$ 上一致收敛

注 该题表明 Weierstrass 强函数判别法仍然只是第一类反常参变积分一致收敛的充分条件，而非必要条件

定理 3.6 (第一类反常参变积分 Dini 判别法/признак Дини)

设函数 $f = f(x,y)$ 在 $\Pi_\infty = [a \leqslant x < +\infty) \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 上连续且非负，第一类反常参变积分 $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 存在，且 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $\forall y \in [c;d]$ 时收敛，$J(y)$ 在 $[c;d]$ 上连续，则第一类反常参变积分 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上一致收敛

♡

证明 考虑函数序列 $J_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)dx$，由函数 f 在 Π_∞ 上连续，则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 在 $[a \leqslant x \leqslant a+n] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ 上连续，则有 $(\forall n \in \mathbb{N}) : J_n(y) \in \mathcal{C}[c;d]$。又 $f(x,y) \geqslant 0$，则对任意 $y \in [c;d]$ 有 $J_n(y) \geqslant 0$ 与 $\{J_n(y)\} \nearrow$。注意对任意 $y \in [c,d]$ 满足

$$|J(y) - J_n(y)| = \left|\int_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon,$$

因为反常积分 $\int_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx$ 收敛。这时序列 $\{J_n(y)\}$ 收敛向 $J(y)$。由函数级数一致收敛的 Dini 判别法则有 $\{J_n(y)\} \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} J(y)$，由定义即有

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall y \in [c;d] \Rightarrow \int_{a+N(\varepsilon)}^{+\infty} f(x,y)dx \;|< \varepsilon$$

现在像 $A(\varepsilon) = a + N(\varepsilon)$，则有 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上一致收敛

定理 3.7 (第一类反常参变积分一致收敛 Dirichlet 判别法/признак Дирихле)

设函数 $f = f(x,y), g = g(x,y)$ 满足：

(1) 当 $x \to +\infty$ 时，$g \overset{[c;d]}{\rightrightarrows} 0$

(2) g 对 $\forall y \in [c,d]$ 关于 x 单调

(3) $(\exists M > 0)(\forall R > a)(\forall y \in [c;d]) : \left|\int_a^R f(x,y)dx\right| \leqslant M$（函数 f 关于 x 的任意部分积分都一致有界）

则有 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

♡

证明 设 $R', R'' > a$，由 Cauchy 条件对 $\int_{R'}^{R''} g(x,y)f(x,y)dx$ 由第二积分中值定理 (вторая теорема о среднем) 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)g(x,y)dx\right| &= \left|g\left(R'+0,y\right)\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx + g\left(R''-0,y\right)\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right| \\ &\leqslant M\cdot\left(\left|g\left(R'+0,y\right)\right| + \left|g\left(R''-0,y\right)\right|\right)\end{aligned}$$

由当 $x \to +\infty$ 时 $g \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} 0$，则

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A(\varepsilon))(\forall y \in [c;d])(\forall R', R'' > A(\varepsilon)) : (|g\left(R'+0,y\right)| < \frac{\varepsilon}{2M}) \wedge (|g\left(R''-0,y\right)| < \frac{\varepsilon}{2M})$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A(\varepsilon))(\forall y \in [c;d])(\forall R'' > R' > A(\varepsilon)) : \left|\int_{R'}^{R''} g(x,y)f(x,y)dx\right| < M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$$

满足一致收敛的 Cauchy 准则

定理 3.8 (第一类反常参变积分一致收敛 Abel 判别法/признак Абеля)

设函数 $f=f(x,y),g=g(x,y)$ 满足:

(1) 当 $x\to+\infty$ 时, 关于 y 有 $\int_a^\infty f(x,y)dx \overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

(2) 函数 g 关于 x 单调有界

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

证明 设 $\sup_{x,y}|g(x,y)|=M\neq 0$ (否则 $M=0$ 命题平凡), 由积分 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 一致收敛的 Cauchy 条件有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon))(\forall y\in[c;d])(\forall R'<\xi<R''):(\left|\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2M})\wedge(\left|\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2M})$$

然后利用第二中值定理有

$$\begin{aligned}\int_{R'}^{R''} f(x,y)g(x,y)dx\ |=&\left|g\left(R'+0,y\right)\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx+g\left(R''-0,y\right)\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right|\\ \leqslant&\left|g\left(R'+0,y\right)\right|\cdot\left|\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx\right|+\left|g\left(R''-0,y\right)\right|\cdot\left|\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

则满足 Cauchy 准则

推论 3.2 (第一类反常参变积分一致收敛 Abel-Dirichlet 判别法)

设函数 $f(x,y)$ 定义在集合 $\Pi_\infty=X\times Y$ 上, 其中 $X=[a;+\infty),Y=[c;d]$ 且 $f(x,y)=\alpha(x,y)\beta(x,y)$, 设 $\beta(x,y)$ 对于任意固定的 $y\in Y$ 关于 x 单调。若满足下列任意一组条件:

(A) Abel 判别法:

1) 积分 $\int_a^\infty \alpha(x,y)\mathrm{d}x$ 在 Y 上一致收敛

2) 函数 $\beta(x,y)$ 在 Π_∞ 上一致有界

(D) Dirichlet 判别法:

1) 积分 $\int_a^t \alpha(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $\{(t,y)|[a;t]\times Y\}$ 上一致有界, 其中 $t\geqslant a$

2) 当 $x\to\infty$ 时, 函数 $\beta(x,y)$ 在 Y 上一致收敛到 0

则第一类反常参变积分 $J(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛

注 条件的 Y 可以变为 $[c;+\infty]$, 判别法依然成立

例题 3.5 (3760/第一类反常参变积分一致收敛 Abel-Dirichlet 判别法) 研究积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

在区间 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上的一致收敛性

解 方法一: (**Abel** 判别法)

由 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 对于 x 单调, 又从 $0\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha x}\leqslant 1$ 知它关于 $x\in[0,+\infty)$ 和 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致有界, 则由一致收敛 Abel 判别法即得就可推出积分关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛

解 方法二: (**Dirichlet** 判别法)

由对任意的 $0\leqslant b<b'$ 有

$$\left|\int_b^{b'}\sin x\ \mathrm{d}x\right|=|\cos bx-\cos b'x|\leqslant 2$$

而 $\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}$ 关于 x 单调, 又从 $0<\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}<\frac{1}{x}$ 有, 当 $x\to+\infty$ 时, 它关于参变量 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛于 0, 因此由一致收敛 Dirichlet 判别法有积分关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛

定理 3.9 (第一类反常参变积分连续性)

设函数 $f=f(x,y)$ 在 $\Pi_{\infty}=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，而第一类反常参变积分 $J(y)=\int_a^{\infty}f(x,y)dx\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，则有 $J(y)\in\mathcal{C}[c;d]$

证明 观察函数序列 $J_n(y)=\int_a^{a+n}f(x,y)dx$，根据常义参变积分的连续性定理 (2.1) 则有 $(\forall n\in\mathbb{N}):J_n\in\mathcal{C}[c;d]$。下证 $J_n(y)\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}J(y)$

由条件 $J(y)=\int_a^{\infty}f(x,y)dx\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，即

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)>a)(\forall y\in[c;d])(\forall R):\left[R\geqslant A(\varepsilon)\Rightarrow\left|\int_R^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\varepsilon\right]$$

另外显然有

$$|J(y)-J_n(y)|=\left|\int_{a+n}^{+\infty}f(x,y)dx\right|$$

则由 $\forall n\geqslant N(\varepsilon)=[A(\varepsilon)-a]+1$ 与 $\forall y\in[c;d]:|J(y)-J_n(y)|<\varepsilon$ 得 $J_n(y)\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}J(y)$。由关于一致收敛函数序列和的连续性定理，命题即证

例题 3.6 (3755/Dirichlet 积分一致收敛性) 证明 Dirichlet 积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

满足命题 (a) 在不含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a;b]$ 上一致收敛; (b) 在每一个包含数值 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a;b]$ 上非一致收敛

解 (a) 由对于 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 有

$$\left|\int_M^{M'}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x\right|=\frac{|\cos\alpha M-\cos\alpha M'|}{\alpha}\leqslant\frac{2}{a}$$

另一方面有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，且与参变量 α 无关，则由一致收敛 Dirichlet 判别法即证

(b) 将积分记为 $I(\alpha)$，则有 $I(0)=0$。对于 $\alpha>0$，作变量代换 $\alpha x=t$ 即得

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

则对于 $b>0$，函数 $I(\alpha)$ 在 $[0;b]$ 左端点不连续，则由第一类反常参变积分连续性定理 (3.9) 得，积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0;b]$ 上不一致收敛，同时推出积分在 $(0;b]$ 上不一致收敛

注 经常错误地对于 $\alpha>0$ 作上述代换 $\alpha x=t$ 之后，从等式

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

的右边积分与参变量 α 无关，就认为左边的积分对所有的 $\alpha>0$ 一致收敛。该题表明反常参变积分在作了与参变量有关的变量代换之后，一致收敛性可能发生变化

定理 3.10 (第一类反常参变积分可微性/Leibniz 法则)

设函数 $f=f(x,y)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $\Pi_{\infty}=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，若积分 $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，而第一类反常积分 $J(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在 $y\in[c;d]$ 上某个点收敛，则 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 存在导数且满足公式

$$J'(y)=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

证明 对于序列 $J_n(y)=\int_a^{a+n}f(x,y)dx$ 的每一项都满足常义参变积分的可微性定理 (2.3)，则由 Leibiniz 法则

有 $J_n'(y)=\int_a^{a+n} f_y'(x,y)dx$。由条件 $\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$ 根据一致收敛 Cauchy 准则有

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)\geqslant a)(\forall R_2>R_1>A)(\forall y\in[c;d]):\left|\int_{R_1}^{R_2} f_y'(x,y)\right|<\varepsilon$$

注意

$$\left|J_{n+p}'(y)-J_n'(y)\right|=\left|\int_{a+n}^{a+n+p} f_y'(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

若取 $R_1=a+n, R_2=a+n+p$，则根据一致收敛 Cauchy 准则有 $\{J_n'(y)\}\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

注意到 $J(y)$ 在导数点的收敛性推出 $\{J_n(y)\}$ 在导数点的逐点收敛性 (поточечная сходимость)，由此 $|J(y)-J_n(y)|=\left|\int_{a+n}^{+\infty} f(x,y)dx\right|$ 满足函数序列逐点微分定理 (теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности) 的条件，则有

$$J'(y)=\left(\lim_{n\to\infty} J_n(y)\right)'=\lim_{n\to\infty} J_n'(y)=\lim_{n\to\infty}\int_a^{a+n} f_y'(x,y)dx=\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$$

例题 3.7 (3786/Dirichlet 积分) 证明 Dirichlet 积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

当 $\alpha\neq 0$ 时有导数，但不能利用 Leibniz 法则计算

解 作代换 $\alpha x=y$，利用 $I(1)=\dfrac{\pi}{2}$，并考虑 $I(\alpha)$ 为奇函数，即得

$$I(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \alpha<0\end{cases}$$

亦即 $I(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$，由此当 $\alpha\neq 0$ 时有 $I'(\alpha)=0$

若利用 Leibniz 法则，则所得的积分

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\mathrm{d}x$$

对任意 α 均发散

注 类似地，函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 的和函数于 x 不等于 2π 的整数倍的所有点处可导，但不能通过逐项求导得到。该题表明一致收敛性仅是保证反常参变积分（或函数项级数的和函数）可导及 Leibniz 法则成立的充分条件，亦即是否在积分号下求导的关键在于观察 $\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)\mathrm{d}x$ 的性质

定理 3.11 (第一类反常参变积分可积性/积分换序第一定理)

设 $f=f(x,y)$ 在 $\Pi_\infty=[a\leqslant x<+\infty)\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，而第一类反常参变积分 $J(y)=\int_a^{\infty} f(x,y)dx\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，则 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上 Riemann 可积，且可交换积分号，如公式 (3.6)

$$\int_c^d J(y)dy=\int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \tag{3.6}$$

♡

证明 由第一类反常参变积分连续性定理 (3.9) 有 $J(y)\in\Re[c;d]$，则公式 (3.6) 仅需证

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)\geqslant a)(\forall R\geqslant A)(\forall y\in[c;d]):\left|\int_c^d J(y)dy-\int_a^R dx\int_c^d f(x,y)dy\right|<\varepsilon$$

由常义参变积分可积性定理 (2.2) 有

$$\int_a^R dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^R f(x,y)dx$$

这时有

$$\left|\int_c^d J(y)dy-\int_c^d dy\int_a^R f(x,y)dx\right|=\left|\int_c^d dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|$$

另外可有

$$\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows\right)\Rightarrow\left|\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{d-c}$$

则

$$\left|\int_c^d J(y)dy-\int_a^R dx\int_c^d f(x,y)dy\right|<\varepsilon$$

定理得证

推论 3.3 (非负积分换序第一定理)

若函数 $f=f(x,y)\in\mathcal{C}(\Pi_\infty)$ 且在其上非负，第一类反常参变积分 $J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c;d]$ 上每个点收敛，而 $J(y)\in\mathcal{C}[c;d]$，则满足公式 (3.6)

证明 由 $J(y)$ 在 $[c;d]$ 上一致收敛 Dini 判别法与定理 (3.11) 即证

命题 3.1 (积分换序第一定理)

若 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty, c\leqslant y\leqslant d$ 内连续，积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in[c;d]$ 上一致收敛，则有

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

命题 3.2 (积分换序第二定理)

若 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty, c\leqslant y<+\infty$ 内连续，且满足以下三个条件：
(1) 以 y 为参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in[c,+\infty)$ 内的任意有限区间上一致收敛
(2) 以 x 为参变量的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 内的任意有限区间上一致收敛
(3) 在 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y$ 之中至少有一个收敛，则有

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

推论 3.4

若 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上非负连续，且以下两个含参变量积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 分别在 $x\geqslant a$ 和 $y\geqslant c$ 时连续，则有

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

定理 3.12 (第一类反常参变积分对参数可积性/积分换序第二定理)

设 $f=f(x,y)$ 在 $\{(x,y)\mid x\geqslant a, y\geqslant c\}$ 上非负且连续，设第一类反常参变积分 $J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 对 $\forall y\geqslant c$ 都收敛，且其定义的函数连续。另设第一类反常参变积分 $K(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 对 $\forall x\geqslant a$ 都收敛，且其定义的函数连续。则若下列两个积分

$$\int_a^{+\infty} K(x)dx=\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy,\quad \int_c^{+\infty} J(y)dy=\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

中的一个收敛，则有第二个积分收敛且两个积分相等

证明 不妨设 $\int_c^{+\infty} J(y)dy$ 收敛，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall y\geqslant c)(\exists A(\varepsilon)\geqslant a)(\forall R\geqslant A(\varepsilon)):\left|\int_c^{+\infty} J(y)dy-\int_a^R dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right|<\varepsilon$$

注意第二个积分满足前面积分换序第一定理 (3.11) 的条件，则有

$$\int_a^R dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty} dy\int_a^R f(x,y)dx$$

这时有

$$\begin{aligned}&\left|\int_c^{+\infty} J(y)dy-\int_c^{+\infty} dy\int_a^R f(x,y)dx\right|=\left|\int_c^{+\infty} dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|\\&=\left|\int_c^{\widetilde{R}} dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx+\int_{\widetilde{R}}^{+\infty} dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|\\&\leqslant\left|\int_c^{\widetilde{R}} dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|+\left|\int_{\widetilde{R}}^{+\infty} dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|\end{aligned}$$

由 Dini 判别法有 $J(y)\overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$，因此有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A(\varepsilon)\geqslant a)(\forall R\geqslant A(\varepsilon))(\forall y\in[c;\widetilde{R}]):\left|\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2(\tilde{R}-c)}$$

则有

$$\left|\int_c^{\widetilde{R}} dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由假设 $\int_c^{+\infty} J(y)dy\to$，则可有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\widetilde{R}(\varepsilon)\geqslant c):\left|\int_{\widetilde{R}}^{+\infty} dy\int_R^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

则有

$$\left|\int_c^{+\infty} J(y)dy-\int_a^R dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由对称性，定理得证

第 4 章 第二类反常参变积分

定义 4.1 (第二类反常参变积分)

设函数 $f(x,y)$ 在 $=[a\leqslant x<b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 定义且有界，并对 $\forall y\in[c,d]$ 都有第二类反常积分 (несобственный интеграл второго рода) $\int_a^b f(x,y)dx$ 收敛，则

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x,y)dx$$

则称 $\int_a^b f(x,y)dx$ 为依赖于 y 的第二类反常参变积分 (несобственный интеграл второго рода, зависящего от параметра)

♣

定义 4.2 (第二类反常参变积分一致收敛性)

设函数 $f(x,y)$ 在 $=[a\leqslant x<b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$ 定义且有界，并有依赖于 y 的第二类反常参变积分 $\int_a^b f(x,y)dx$，若满足

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall\alpha,0<\alpha<\delta(\varepsilon))(\forall y\in[c;d]):\left|\int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

则称该依赖于 y 的第二类反常参变积分在 $[c;d]$ 上一致收敛，简称该第二类反常参变积分在 $[c;d]$ 上一致收敛

♣

注 注意，第二类反常参变积分均可以通过代换变为第一类反常参变积分，因为前面的定理都对第二类反常参变积分成立

定理 4.1 (变量变换将第二型反常参变积分变成第一型反常参变积分)

$$\begin{bmatrix} x=b-\frac{1}{t}\\ dx=\frac{dt}{t^2}\end{bmatrix}\Rightarrow \lim_{\alpha\to 0+0}\int_a^{b-\alpha} f(x,y)dx=\lim_{\alpha\to 0+0}\int_{1/(b-a)}^{1/\alpha}\frac{f\left(b-\frac{1}{t},y\right)}{t^2}dt$$

♡

定理 4.2 (第二类反常参变积分性质)

设函数 $f(x,y)$ 在 $P=X\times Y$ 上连续，其中 $X=(a;b],Y=[c;d]$，且 a 为第二类反常参变积分 $g(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 奇点，则下列命题成立

1) 若积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛，则函数 $g(y)$ 在 Y 上连续，且有

$$\int_c^d g(y)dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

2) 若积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 收敛，偏导函数 $f_y(x,y)$ 在 P 上连续，而积分 $\int_a^b f'_y(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛，则 $g'(y)$ 存在且

$$g'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx$$

♡

例题 4.1 （3727/动奇点情形）设

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续，证明：当 $0<\alpha<a$ 时有

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,\mathrm{d}x$$

解 作代换 $x=\alpha t$，得有固定奇点 $t=1$ 的第二类反常参变积分

$$I(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$$

其中 $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ 绝对可积而 $\varphi(\alpha t)$ 连续可微，则由 Leibniz 法则有

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{t\varphi'(\alpha t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$$

换回原来的变量 x 得

$$\begin{aligned}
I'(\alpha)&=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{x\varphi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}\\
&=\frac{1}{2\alpha}[-2\sqrt{\alpha-x}\cdot\varphi(x)]\bigg|_{x=0}^{x=\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{x\varphi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}\\
&=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}(\alpha-x+x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

注 注意题设积分有奇点 $x=\alpha$，同时奇点的位置随着参变量 α 变化。这时不能直接使用 Euler 公式，需考虑换元

第 5 章 反常积分与极限交换

5.1 反常积分号下取极限和含参变量的返常积分的连续性

定理 5.1

设 $f(x,y)$ 是依赖于参变量 $y\in Y$ 的函数族，并且至少在反常的意义下在区间 $a\leqslant x<\omega$ 上可积，且 $\mathfrak{B}_Y$ 是 Y 中的基。如果满足以下两个条件：

a) 对任何 $b\in]a,\omega[$, 在 $[a,b]$ 上关于基 $\mathfrak{B}_Y$ 有

$$f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x),$$

b) 积分 $\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛，那么，极限函数 φ 在 $[a,\omega[$ 上在反常意义下可积，且成立等式

$$\lim_{\mathfrak{B}_Y}\int_a^\omega f(x,y)dx=\int_a^\omega\varphi(x)dx$$

$$\begin{tikzcd}
F_b(y):=\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx \arrow[r, Rightarrow, "\substack{b\to\omega\\ b\in[a,\omega[}"'] \arrow[d, "\mathfrak{B}_Y"'] & \displaystyle\int_a^\omega f(x,y)dx=:F(y) \arrow[d, "\mathfrak{B}_Y"] \arrow[dl, dashed, no head] \\
\displaystyle\int_a^b\varphi(x)dx \arrow[r, "\substack{b\to\omega\\ b\in[a,\omega[}"'] & \displaystyle\int_a^\omega\varphi(x)dx
\end{tikzcd}$$

证明 左边的垂直极限过程从条件 a) 和在常义积分号下取极限的定理（参考函数项级数两个极限过程的交换定理）推出。上边的水平极限过程是条件 b) 的表示

根据两个极限过程的交换定理，由此推出，位于对角线下的极限存在且相等

右边的垂直极限是已经证明了的等式 (8) 的左端，而下边的水平极限按定义给出位于等式 (8) 的右端的反常积分

推论 5.1

设对每个实参变量的值 $y\in Y\subset\mathbb{R}$，实值函数 $f(x,y)$ 是非负的，且在区间 $a\leqslant x<\omega$ 上连续。如果满足以下条件：

a) $f(x,y)$ 随 y 的增加而单调增加，在 $[a,\omega[$ 上趋于函数 $\varphi(x)$

b) $\varphi\in C([a,\omega[,\mathbb{R})$

c) 积分 $\int_a^\omega\varphi(x)dx$ 收敛

那么等式

$$\lim_{\mathfrak{B}_Y}\int_a^\omega f(x,y)dx=\int_a^\omega\varphi(x)dx$$

成立

证明 由 Dini 定理得到，在每个区间 $[a,b]\subset[a,\omega[$，有 $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$

从不等式 $0\leqslant f(x,y)\leqslant\varphi(x)$ 和一致收敛性的 Weierstrass 强函数检验法推出，$f(x,y)$ 在区间 $a\leqslant x<\omega$ 上的积分关于参变量 y 是一致收敛的

定理5.1的两个条件均被满足，因此，等式成立

定理 5.2 (含参变量反常积分关于参变量的连续性定理)

如果

a) 函数 $f(x,y)$ 在集合 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y\leqslant d\right\}$ 上连续

b) 积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛，那么函数 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续

证明 从条件 a) 推出, 对任何 $b\in[a,\omega[$，常义积分

$$F_b(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在 $[c,d]$ 上连续

从条件 b) 知，在 $[c,d]$ 上，当 $b\in[a,\omega[,b\to\omega$ 时，$F_b(y)\rightrightarrows F(y)$，由此就推出，函数 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续

5.2 含参变量反常积分的微分法

定理 5.3

如果 a) 函数 $f(x,y),f_y'(x,y)$ 在集合 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y\leqslant d\right\}$ 上连续

b) 积分 $\Phi(y)=\int_a^\omega f_y'(x,y)dx$ 在集合 $Y=[c,d]$ 上一致收敛

c) 积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 至少在一点 $y_0\in Y$ 收敛，那么积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在$\boxed{\mathrm{F}}$个集合 Y 上一致收敛，同时，函数 $F(y)$ 在 Y 上可微且有

$$F'(y)=\int_a^\omega f_y'(x,y)dx$$

证明 由条件 a)，对任何 $b\in[a,\omega[$，函数

$$F_b(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在区间 $c\leqslant y\leqslant d$ 有定义且可微，按 Leibniz 法则，有

$$\left(F_b\right)_y'(y)=\int_a^b f_y'(x,y)dx$$

由条件 b)，依赖于参变量 $b\in[a,\omega[$ 的函数族 $\left(F_b\right)_y'(y)$，当 $b\in[a,\omega[,b\to\omega$ 时，在 $[c,d]$ 上一致收敛到函数 $\Phi(y)$

由条件 c)，当 $b\in[a,\omega[,b\to\omega$ 时，$F_b\left(y_0\right)$ 有极限

由此推出，当 $b\in[a,\omega[,b\to\omega$ 时，函数族 $F_b(y)$ 本身在 $[c,d]$ 上一致收佥到极限函数 $F(y)$。同时函数 F 在区间 $c\leqslant y\leqslant d$ 上可微且成立等式 $F'(y)=\Phi(y)$ 完成证明

5.3 含参变量反常积分的积分法

定理 5.4

如果 a) 函数 $f(x,y)$ 在集合 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y\leqslant d\right\}$ 上连续

b) 积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛

那么函数 F 在 $[c,d]$ 上可积且有等式

$$\int_c^d dy\int_a^\omega f(x,y)dx=\int_a^\omega dx\int_c^d f(x,y)dy \tag{5.1}$$

证明 对于 $b\in[a,\omega[$，根据条件 a) 和关于常义积分的命题，可得

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \tag{5.2}$$

利用条件 b) 和关于积分号下取极限的定理，在等式 (5.2) 左端令 $b\to\omega,b\in[a,\omega[$ 取极限便得到等式 (5.1) 的左端。而等式 (5.1) 的右端按反常积分的定义就是等式 (5.2) 右端当 $b\to\omega,b\in[a,\omega[$ 时的极限。于是，由条件 b)，当 $b\to\omega,b\in[a,\omega[$ 时，从 (5.2) 式得出等式 (5.1)

推论 5.2

如果

a) 函数 $f(x,y)$ 在集合 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续

b) $f(x,y)$ 在 P 上非负

c) 积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 作为 y 的函数在区间 $[c,d]$ 上连续

那么等式 (5.1) 成立

♡

证明 从条件 a) 推出，对任何 $b\in[a,\omega[$，积分

$$F_b(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在区间 $[c,d]$ 上关于 y 是连续函数

从条件 b) 推出当 $b_1\leqslant b_2$ 时 $F_{b_1}(y)\leqslant F_{b_2}(y)$

根据 Dini 定理和条件 c) 可推出，在 $[c,d]$ 上，当 $b\to\omega,b\in$ $[a,\omega[$ 时，$F_b\rightrightarrows F$

于是，定理5.4的条件满足，因而在所考虑的情况下，等式 (5.1) 成立

例题 5.1 (Dirichlet 积分)

计算 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

解 回到积分

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx \tag{5.3}$$

已证其在 $0\leqslant y<+\infty$ 上连续且一致收敛。

特别地，由此推出

$$\lim_{y\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx \tag{5.4}$$

指出，当 $y>0$ 时，有

$$F'(y)=-\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-xy}dx \tag{5.5}$$

因为积分 (5.5) 在任何一个形如 $\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant y_0>0\}$ 的集合上一致收敛

积分 (5.5) 容易通过被积函数的原函数计算而得到

$$F'(y)=-\frac{1}{1+y^2},\quad \text{当}y>0\text{时}$$

由此推出

$$F(y)=-\arctan y+c,\quad \text{当}y>0\text{时} \tag{5.6}$$

当 $y\to+\infty$ 时，从关系式 (5.3) 可以看出，$F(y)\to 0$，因此从 (5.6) 式推出 $c=\frac{\pi}{2}$，现在从 (5.4)，(5.6) 式得到 $F(0)=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2} \tag{5.7}$$

注意，在推导等式 (5.7) 时用到的关系式“当 $y\to+\infty$ 时，$F(y)\to 0$”不是定理的直接结果，因为当

$y \to +\infty$ 时，$\frac{\sin x}{x} e^{-xy} \rightrightarrows 0$ 只在形如 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant x_0 > 0\}$ 的区间上成立，而在形如 $0 < x < x_0$ 的区间上一致收敛性不成立，这是因为当 $x \to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x} e^{-xy} \to 1$。但当 $x_0 > 0$ 时：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$$

从而，如果给定 $\varepsilon > 0$，那么首先选择 x_0 足够接近零，使当 $x \in [0, x_0]$ 时有 $\sin x \geqslant 0$，且对任何 $y > 0$：

$$0 < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

然后固定 x_0，根据定理，只要让 y 趋于 $+\infty$，便可使在区间 $[x_0, +\infty[$ 上的积分按绝对值小于 $\varepsilon/2$

5.4 双奇点情况下的积分法

定理 5.5

如果 a) 函数 $f(x, y)$ 在集合 $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant y < \widetilde{\omega}\right\}$ 上连续

b) 两个积分

$$F(y) = \int_a^{\omega} f(x, y) dx, \quad \Phi(x) = \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x, y) dy$$

中的第一个关于 y 在任何区间 $[c, d] \subset [c, \widetilde{\omega}[$ 上一致收敛，而第二个关于 x 在任何区间 $[a, b] \subset [a, \omega[$ 上一致收敛

c) 两个累次积分

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^{\omega} |f|(x, y) dx, \int_a^{\omega} dx \int_c^{\widetilde{\omega}} |f|(x, y) dy$$

中至少有一个存在

那么，等式

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^{\omega} f(x, y) dx = \int_a^{\omega} dx \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x, y) dy \tag{5.8}$$

成立

证明 为确定起见，设 c) 中两个累次积分中的第二个积分存在

由于条件 a) 和条件 b) 中的第一个，根据命题定理5.4可得，对任何 $d \in [c, \widetilde{\omega}[$，函数 f 满足等式 (5.1)

如果证明了当 $d \to \widetilde{\omega}, d \in [c, \widetilde{\omega}[$ 时，等式 (5.1) 的右端趋于关系式 (5.8) 的右端，那么等式 (5.8) 也就获证，因为这时按反常积分定义，其左端也将存在，而且就是等式 (5.1) 左端的极限

令

$$\Phi_d(x) := \int_c^d f(x, y) dy.$$

对任意固定的 $d \in [c, \widetilde{\omega}]$，函数 Φ_d 有定义，且由 f 的连续性知，其在区间 $a \leqslant x < \omega$ 上是连续的

由条件 b) 的第二条知，在任何区间 $[a, b] \subset [a, \omega[$ 上，当 $d \to \widetilde{\omega}, d \in [c, \widetilde{\omega}[$ 时，$\Phi_d(x) \rightrightarrows \Phi(x)$

因为 $|\Phi_d(x)| \leqslant \int_c^{\widetilde{\omega}} |f|(x, y) dy =: G(x)$，而积分 $\int_a^{\omega} G(x) dx$，亦即条件 c) 中第二个积分，按假定是收敛的，根据一致收敛性的 Weierstrass 强函数检验法推出，积分 $\int_a^{\omega} \Phi_d(x) dx$ 关于参变量 d 一致收敛于是，能推出

$$\lim_{\substack{d \to \tilde{\omega}^{\omega} \\ d \in \in, \bar{\omega}|}} \int_a^{\omega} \Phi_d(x) dx = \int_a^{\omega} \Phi(x) dx$$

证明完毕

推论 5.3

如果 a) 函数 $f(x,y)$ 在集合 $P=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y<\tilde{\omega}\right\}$ 上连续
b) $f(x,y)$ 在 P 上非负
c) 两个积分

$$F(y)=\int_a^{\omega} f(x,y)dx,\quad \Phi(x)=\int_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$$

分别是区间 $[a,\omega[, [a,\tilde{\omega}[$ 上的连续函数
d) 两个累次积分

$$\int_c^{\tilde{\omega}} dy\int_a^{\omega} f(x,y)dx,\quad \int_a^{\omega} dx\int_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$$

之中至少有一个存在，那么另一个累次积分也存在，并且它们相等 ♡

注 在积分区间的两个端点都具有奇异性的积分可归结为两个积分的和，它们中的每一个仅在一端点具有奇异性。这就使这里证明的定理和推论能适用于在区间 $]\omega_1,\omega_2[\subset\mathbb{R}$ 上的积分的情况。显然，在这种情况下，以前在区间 $[a,b]\subset[a,\omega[$ 成立的那些条件，现在应当在区间 $[a,b]\subset]\omega_1,\omega_2[$ 成立

例题 5.2 （Euler-Possion 积分）

利用交换两个反常积分的次序证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{5.9}$$

这是有名的欧拉-泊松积分

解 首先注意，当 $y>0$ 时

$$J:=\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=y\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}dx$$

以及等式 (5.9) 的积分值不随把积分理解为半开区间 $[0,+\infty[$ 上的积分或开区间 $]0,+\infty[$ 上的积分而改变。于是

$$\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}dy\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}dx=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=J^2$$

这时关于 y 的积分是在开区间 $]0,+\infty[$ 上取的

正如将要验证的，在这个累次积分中，交换关于变量 x 和 y 的积分次序是合理的，因此

$$J^2=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty} ye^{-\left(1+x^2\right)y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

由此立刻得到 (5.9)

现在证明交换积分次序的合理性

函数

$$\int_0^{+\infty} ye^{-\left(1+x^2\right)y^2}dy=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$$

当 $x\geqslant 0$ 时连续，而函数

$$\int_0^{+\infty} ye^{-\left(1+x^2\right)y^2}dx=e^{-y^2}\cdot J$$

当 $y>0$ 时连续。结束上述推论和注记完成证明

第 6 章 Euler 积分

定义 6.1 (Euler 定义的 Γ 函数)

称函数

$$\Gamma(s)=\frac{1}{se^{\gamma s}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}$$

为 Euler 的 Γ 函数，其中 $s\neq 0,-1,-2,\cdots$ 为任意实数（可以把定义扩充到复数），γ 为欧拉常数，即

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0.577\cdots$$

由估计

$$|\ln b_n|=\left|\ln\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}\right)\right|=\left|\frac{s}{n}-\ln\left(1+\frac{s}{n}\right)\right|<\frac{s^2}{n^2}$$

则定义 Γ 函数的无穷乘积对于任何 $s\neq 0,-1,-2,\cdots$ 绝对收敛

♣

命题 6.1 (Euler 公式)

下列公式成立：

$$\Gamma(s)=s^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

♠

证明 由定义 Γ 函数的无穷乘积在自己的定义域的任意点处都绝对收敛，则有

$$\begin{aligned}\Gamma(s)&=s^{-1}\lim_{m\to\infty}e^{-s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right)}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}\\&=s^{-1}\lim_{m\to\infty}m^{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}=s^{-1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\\&=s^{-1}\lim_{m\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-s}\\&=s^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\end{aligned}$$

定理 6.1 (Euler-Gauss 公式)

对于 $s\neq 0,-1,-2,\cdots$ 成立等式

$$\Gamma(s)=\lim_{m\to\infty}P_m(s)$$

其中

$$P_m(s)=\frac{(m-1)!m^{s}}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}$$

♡

证明 由 Euler 公式 (6.1) 得 $\Gamma(s)$ 的表达式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}(1+1)^{s}\cdots\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{1}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{s}{m-1}\right)^{-1}\\&=\lim_{m\to\infty}P_m(s)\end{aligned}$$

定理 6.2 (Gauss 公式)

对于 $s>0$，Euler-Gauss 公式 (6.1) 中

$$P_{m+1}(s)=\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt$$

♡

证明 由换元法与分部积分法有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt=&(m+1)^s\int_0^1(1-x)^m x^{s-1}dx\\=&(m+1)^s\frac{m}{s}\int_0^1(1-x)^{m-1}x^s dx\\=&(m+1)^s\frac{m!}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}\int_0^1 x^{s+m-1}dx\\=&(m+1)^s\frac{m!}{s(s+1)\cdots(s+m)}=P_{m+1}(s)\end{aligned}$$

定义 6.2 (Euler 积分)

称依赖于参数 p 和 q 的函数

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

为 Euler β 函数 (Бета-функцией Эйлера) 或第一类 Euler 积分 (интеграл Эйлера первого рода)

称依赖于参数 p 的函数

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

为 Euler Γ 函数 (Гамма-функцией Эйлера) 或第二类 Euler 积分 (интеграл Эйлера второго рода)

♣

注 （第一类 Euler 积分三角形式与反常形式）在第一类 Euler 积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

中令 $x=\cos^2\varphi$，则有第一类 Euler 积分的三角形式：

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

若作代换 $x=\dfrac{1}{1+u}$，即 $u=\dfrac{1-x}{x}$，则可得第一类 Euler 积分的反常形式

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}\mathrm{d}u$$

性质 （第一类 **Euler** 积分存在性）

注意到当 $p\geqslant 1,q\geqslant 1$ 时第一类 Euler 积分 $B(p,q)$ 没有奇点且对应积分收敛。若 $0<p<1,0<q<1$，则第一类 Euler 积分有

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{B_1(p,q)}+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{B_2(p,q)}$$

由对于某个 C_q 和 C_p 有在 B_1 中 $(1-x)^{q-1}\leqslant C_q$ 与在 B_2 中 $x^{p-1}\leqslant C_p$，则由比较判别法（与 $x^{-\alpha}$ 比较）有当 $p>0$ 时对于任意 q 有 $B_1(p,q)\to$ 。同理有当 $q>0$ 时对于任意 p 有 $B_2(p,q)\to$。

综上，第一类 Euler 积分 $B(p,q)$ 当 $p>0,q>0$ 时收敛

性质 （第二类 **Euler** 积分存在性）

对于第二类 Euler 积分有

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\underbrace{\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx}_{\Gamma_1(p)}+\underbrace{\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx}_{\Gamma_2(p)}$$

由当 $x>0$ 时 $\left|e^{-x}x^{p-1}\right|\leqslant x^{p-1}$，则根据比较判别法，当 $p>0$ 时积分 $\Gamma_1(p)$ 收敛。而由 $(\forall r\in\mathbb{R}):\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^r=0$ 则有积分 $\Gamma_2(p)$ 对于任意 p 均收敛。

综上，第二类 Euler 积分 $\Gamma(p)$ 当 $p>0$ 时收敛

命题 6.2 (第一类 Euler 积分连续性)

第一类 Euler 积分 $B(p,q)$ 当 $p>0,q>0$ 时连续

证明 固定任意 p_0,p_1,q_0,q_1 满足 $0<p_0<p_1<\infty$ 与 $0<q_0<q_1<\infty$。欲证 $B(p,q)\overset{\widetilde{R}}{\rightrightarrows}$，其中 $\widetilde{R}=[p_0\leqslant p\leqslant p_1]\times[q_0\leqslant q\leqslant q_1]$。为此注意 $(\forall t\in(0;1):t^{p-1}(1-t)^{q-1}\leqslant t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}$。但 $\int_0^1 t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}dt\to$，这时由 Weierstrass 判别法有 $B(p,q)\overset{\widetilde{R}}{\rightrightarrows}$。则由第一类反常参变积分连续性定理 (3.9) 有 $B(p,q)$ 在 $\widetilde{R}$ 上连续。由数 p_0,p_1,q_0,q_1 任意性即得 $B(p,q)$ 在整个定义域上连续

命题 6.3 (第二类 Euler 积分连续性)

第二类 Euler 积分 $\Gamma(p)$ 当 $p>0$ 时连续

证明 固定任意 $0<p_0<p_1<\infty$，类似记 $\widetilde{R}=[p_0\leqslant p\leqslant p_1]$。注意 $(\forall t\in[0;1]:e^{-t}t^{p-1}\leqslant e^{-t}t^{p_0-1}$，且 $(\forall t\in[1;\infty):e^{-t}t^{p-1}\leqslant e^{-t}t^{p_1-1}$，这时当 $t\in[0,\infty)$ 有 $e^{-t}t^{p-1}\leqslant e^{-t}\left(t^{p_0-1}+t^{p_1-1}\right)$。但已知 $\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(t^{p_0-1}+t^{p_1-1}\right)dt\to$，则由 Weierstrass 判别法有 $\Gamma(p)\overset{\widetilde{R}}{\rightrightarrows}$ A。类似地，$\Gamma\ (p)$ 在其整个定义域上连续

性质 (第一类 Euler 积分对称性)

$(\forall p,q>0):B(p,q)=B(q,p)$

证明 由定义即有

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\left\{\begin{array}{c}x=1-t\\ dx=-dt\end{array}\right\}=\int_0^1(1-x)^{p-1}x^{q-1}dx=B(q,p)$$

性质 (第一类 Euler 积分化简公式/формула приведения)

对第一类 Euler 积分有公式

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q),\quad B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$$

证明 使用恒等式 $t^p=t^{p-1}-t^{p-1}(1-t)$ 则有

$$\begin{aligned}B(p,q+1)&=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt=\overbrace{\frac{1}{p}t^p(1-t)^q\Big|_0^1}^{=0}+\frac{q}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt\\&=\frac{q}{p}\int_0^1\left(t^{p-1}-(1-t)t^{p-1}\right)(1-t)^{q-1}dt=\frac{q}{p}B(p,q)-\frac{q}{p}B(p,q+1)\end{aligned}$$

则有 $\frac{p+q}{p}B(p,q+1)=\frac{q}{p}B(p,q),B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$，类似证明第二个公式

注 化简公式将 $B(p,q)$ 在 $\forall p,q$ 时的计算化简为 $B(p,q)$ 在 $0<p\leqslant1,0<q\leqslant1$ 时的计算

推论 6.1

对第一类 Euler 积分成立

$$(\forall p>0)(\forall n\in\mathbb{N}):B(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}$$

证明 归纳：当 $n=1$ 时有

$$B(p,1)=\int_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1}{p},B(p,2)=\frac{1}{p+1}B(p,1)=\frac{1}{p(p+1)}$$

设 $B(p,n)=\dfrac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}$，则有

$$B(p,n+1)=\frac{n}{p+n}B(p,n)=\frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)}$$

注 若还有 $p\in\mathbb{N}$，则

$$B(p,n)=\frac{(n-1)!(p-1)!}{(p+n-1)!}$$

因为对于自然数 p 满足

$$\frac{1}{p(p+1)\dots(p+n-1)}=\frac{(p-1)!}{(p+n-1)!}$$

性质 （第二类 Euler 积分化简公式）对第二类 Euler 积分成立

$$(\forall p>0):\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

证明 由定义显然有

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^pdt=\underbrace{-\left.e^{-t}t^p\right|_0^{+\infty}}_{=0}+p\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{p-1}dt=p\cdot\Gamma(p)$$

注 连续应用公式，固定 $n\in\mathbb{N}$ 并取 $p>n-1$，则有

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)=p(p-1)\Gamma(p-1)=\dots=p(p-1)\dots(p-n+1)\Gamma(p-n+1)$$

当 $p=n$ 时则有 $\Gamma(n+1)=n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!\cdot\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=n!$

定理 6.3 (第二类 Euler 积分对参数可微性)

对任意 $0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<+\infty$ 与 $n\in\mathbb{N}$ 第二类 Euler 积分为对参数 n 次可微的，且满足公式：

$$\frac{d^n}{dp^n}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{p-1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{d^n}{dp^n}\left(e^{-t}t^{p-1}\right)dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{p-1}\ln^n tdt$$

♡

证明 注意到

$$\left[\left|e^{-t}t^{p-1}(\ln t)^n\right|\leqslant e^{-t}|\ln t|^n\left(t^{p_0-1}+t^{p_1-1}\right)\right]\wedge\left[\int_0^{+\infty}e^{-t}|\ln t|^n\left(t^{p_0-1}+t^{p_1-1}\right)dt\to\right]$$

则由 Weierstrass 判别法有

$$\int_0^{+\infty}\frac{d^n}{dp^n}\left(e^{-t}t^{p-1}\right)dt\rightrightarrows$$

则满足关于逐项微分的定理的条件，定理得证

例题 6.1 （第二类 Euler 积分图像绘制）由第二类 Euler 积分二阶导数

$$\Gamma^{(2)}(p)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^2dx\geqslant0$$

有第二类 Euler 积分在整个定义域上向下凸。注意到

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=\Gamma(1)=1$$

$$\lim_{p\to\infty}\Gamma(p)=\{\Gamma(p)>n!p>n+1\}=+\infty$$

$$\lim_{p\to0+0}\Gamma(p)=\lim_{p\to0+0}$$

$$\frac{\Gamma(p+1)}{p}=\{\Gamma(p+1)\underset{p\to0+0}{\longrightarrow}\Gamma(1)=1\}=+\infty$$

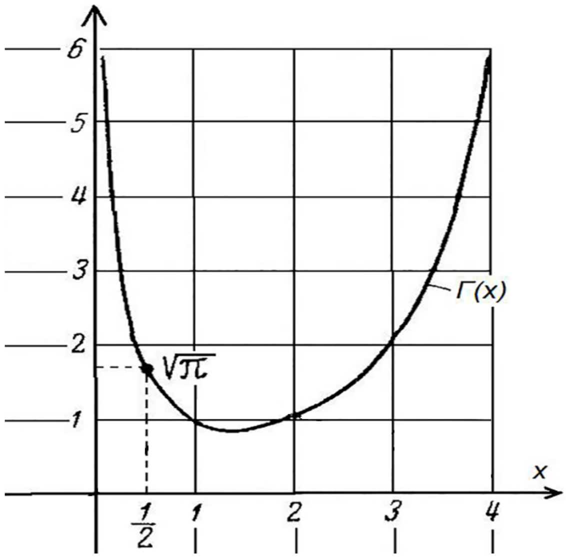

图 6.1: 第二类 Euler 积分图像

定理 6.4 (Dirichlet 公式/формула Дирихле)
对于任意 $p,q>0$ 满足等式:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

♡

证明 观察反常二重积分

$$I(D)=\iint_D e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 为坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 的第一部分

由 $I(D)$ 中被积函数为正，为证明积分收敛性，仅需选择一个单调趋于 D 的序列 $\{D_n\}$ 且数值级数 $\{I(D_n)\}$ 收敛（由非负函数反常多重积分的收敛准则）

设

$$D_n=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant n,\frac{1}{n}\leqslant y\leqslant n\right\}$$

则二重积分 $I(D_n)$ 等于

$$I(D_n)=\int_{\frac{1}{n}}^{n}e^{-x}x^{p-1}dx\cdot\int_{\frac{1}{n}}^{n}e^{-y}y^{q-1}dy$$

则当 $n\to\infty$ 时有 $I(D_n)\to\Gamma(p)\Gamma(q)$。现在选择另一个单调趋于 D 的 $\{D'_n\}$:

$$D'_n=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{n}\leqslant x+y\leqslant n,\frac{1}{n}\leqslant\frac{x}{y}\leqslant n\right\}$$

改变二重积分 $I(D'_n)$ 中变量

$$\{x=u(1-v),y=uv\}\Leftrightarrow\left\{u=x+y,v=\frac{y}{x+y}\right\}$$

由变换的 Jacobi 行列式 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 等于 u 且区域 D'_n 变换到

$$\frac{1}{v}=1+\frac{x}{y}\Longrightarrow 1+\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{v}\leqslant 1+n\Longrightarrow\frac{1}{1+n}\leqslant v\leqslant\frac{n}{n+1}$$

即

$$\Omega_n=\left\{(u,v)\mid \frac{1}{n}\leqslant u\leqslant n,\frac{1}{1+n}\leqslant v\leqslant\frac{n}{1+n}\right\}$$

则有

$$I\left(D_n'\right)=\iint_{\Omega_n} e^{-u}u^{p+q-1}(1-v)^{p-1}v^{q-1}dudv=\int_{1/n}^{n} e^{-u}u^{p+q-1}du\cdot\int_{1/(1+n)}^{n/(1+n)}(1-v)^{p-1}v^{q-1}dv$$

当 $n\to\infty$ 时，积分趋于 $\Gamma(p+q)B(p,q)$，则有 $I(D)=\Gamma(p)\Gamma(q)$ 且 $I(D)=\Gamma(p+q)B(p,q)$

引理 6.1 (Euler 引理)

对于任意实的非整数 s 成立公式

$$\sin\pi s=\pi s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)$$

♡

定理 6.5 (Euler 余元公式)

对于任意实的非整数 s 成立公式

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

♡

证明 从 Euler 公式 (6.1) 和 Euler 引理 (6.1) 得

$$\begin{aligned}\Gamma(1-s)\Gamma(s)=-s\Gamma(-s)\Gamma(s)&=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\\&=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1}=\frac{\pi}{\pi s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)}=\frac{\pi}{\sin\pi s}\end{aligned}$$

例题 6.2 计算第二类 Euler 积分 $\Gamma(\frac{1}{2})$

解 方法一：直接法

由定义有

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^{+\infty}e^{-x}d(\sqrt{x})=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

解 方法二：**Euler** 余元公式

由 Euler 余元公式取 $s=\frac{1}{2}$ 即得 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

定理 6.6 (Legendre 倍元公式)

成立等式

$$\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)$$

♡

证明 构造乘积

$$F_m(s)=\frac{2^{2s-1}P_m(s)P_m\left(s+\frac{1}{2}\right)}{P_{2m}(2s)P_m\left(\frac{1}{2}\right)}$$

写出 $F_m(s)$ 的显式表示，有

$$F_m(s)=\frac{2^{2s-1}(m-1)!m^s(m-1)!m^{s+\frac{1}{2}}\cdot 2s\cdots(2s+2m-1)\cdot\frac{1}{2}\cdots\cdots\left(m-\frac{1}{2}\right)}{(2m-1)!(2m)^{2s}(m-1)!m^{\frac{1}{2}}s\cdots\cdots(s+m-1)\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(s+m-\frac{1}{2}\right)}=1$$

令 $m\to\infty$ 就过渡到等式

$$\frac{2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=1$$

例题 6.3 （3848）计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 xdx$$

解 记积分为 I，则根据第一类 Euler 积分的三角形式有

$$I=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$$

由 Dirichlet 公式有

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

由化简公式有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right]^2}{5!}=\frac{1}{96}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\frac{3\pi}{512}$$

定理 6.7 (Stirling 公式/Stirling's approximation/формула Стирлинга)

设 $\lambda\in\mathbb{N}$，则 $\lambda!$ 满足下列近似估计 (асимптотическая оценка)

$$\lambda!=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\cdot\sqrt{2\pi\lambda}\,(1+\gamma_\lambda)$$

其中 $\gamma_\lambda=\dfrac{1}{12\lambda}+\dfrac{1}{228\lambda^2}-\dfrac{139}{51840\lambda^3}-\dfrac{571}{2448320\lambda^4}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{\lambda^5}\right)$

♡

例题 6.4 （3853）求积分

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^m\,\mathrm{d}x}{(a+bx^n)^p}\quad(a>0,b>0,n>0)$$

及其存在域

解 设 $\dfrac{bx^n}{a+bx^n}=t$，则有

$$x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}},\qquad \mathrm{d}x=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(1-t)^{\frac{1}{n}+1}}\mathrm{d}t$$

代人即得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{b^p}\int_0^{+\infty}\left(\frac{bx^n}{a+bx^n}\right)^p x^{m-np}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{b^p}\int_0^1 t^p\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-p}\frac{t^{\frac{m}{n}-p}}{(1-t)^{\frac{m}{n}-p}}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(1-t)^{\frac{1}{n}+1}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a^pn}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int_0^1 t^{\frac{m+1}{n}-1}(1-t)^{p-\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a^pn}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right)\end{aligned}$$

存在域为 $\dfrac{m+1}{n}>0$ 且 $p-\dfrac{m+1}{n}>0$，即 $0<\dfrac{m+1}{n}<p$

第 7 章 基本数学工具

7.1 积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

7.2 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

7.3 常用初等函数 taylor 级数

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$
$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^n}{n!}+\cdots \qquad (-1<x<1)$$
$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots \qquad (-1<x\leqslant 1)$$
$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$
$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots+\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}+\cdots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

7.4 常用二项式函数 Taylor 级数 (биномиальный ряд)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots + (-1)^n (n+1) x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

第 8 章 附录：证明补充

8.1 Frullani 第二公式

定理 8.1 (Frullani 第二公式/Вторая формула Фруллани)

若 $f(x) \in C[0,+\infty)$ 且 $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < +\infty$，则有

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (\alpha>0,\beta>0)$$

♡

证明

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = \lim_{\epsilon\to0,\Delta\to\infty}\left(\int_\epsilon^A \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx + \int_A^\Delta \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx\right)$$

$$=\left\{\rho(\epsilon,A)<\infty, \frac{f(x)}{x}\in C[\epsilon,A] \Rightarrow \int_\epsilon^A \frac{f(x)}{x}dx = F(A)-F(\epsilon)\right.$$

$$\left.\Rightarrow \int_\epsilon^A \frac{f(\alpha x)}{x}dx = F(\alpha A)-F(\alpha\epsilon)\right\}$$

$$=\lim_{\epsilon\to0,\Delta\to+\infty}\left(F(\alpha A)-F(\alpha\epsilon)-F(\beta A)+F(\beta\epsilon)+\int_A^\Delta \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx\right)$$

$$=\left\{\rho(A,\Delta)<\infty, \frac{f(x)}{x}\in C[A,\Delta] \Rightarrow \int_A^\Delta \frac{f(x)}{x}dx = F(\Delta)-F(A) \Rightarrow \int_A^\Delta \frac{f(\alpha x)}{x}dx = F(\alpha\Delta)\right\}$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0,\Delta\to+\infty}(F(\alpha A)-F(\alpha\epsilon)-F(\beta A)+F(\beta\epsilon)+F(\alpha\Delta)-F(\alpha A)-F(\beta\Delta)+F(\beta A))$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}(F(\beta\epsilon)-F(\alpha\epsilon)) - \lim_{\Delta\to+\infty}(F(\beta\Delta)-F(\alpha\Delta))$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_\alpha^\beta \frac{f(\epsilon x)}{x}dx\right) - \lim_{\Delta\to+\infty}\left(\int_\alpha^\beta \frac{f(\Delta x)}{x}dx\right)$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\left(f(\epsilon\eta)\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx\right) - \lim_{\Delta\to+\infty}\left(f(\Delta\mu)\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\left(\lim_{\epsilon\to+0} f(\epsilon\eta) - \lim_{\Delta\to+\infty} f(\Delta\mu)\right)(\ln(\beta)-\ln(\alpha))$$

$$=\left\{\eta,\mu\in[\alpha,\beta] \Rightarrow \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\eta=0, \lim_{\Delta\to+\infty}\Delta\mu=+\infty, f(x)\in C[0,+\infty]\right.$$

$$\left.\Rightarrow \lim_{\epsilon\to+0} f(\epsilon\eta)=f(0), \lim_{\Delta\to+\infty} f(\Delta\mu)=f(+\infty)\right\}$$

$$=(f(0)-f(+\infty))\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

8.2 Stirling 公式的证明（考试不考）

Теорема. (Формула Стирлинга)

Пусть $\lambda \in \mathbb{N}$. Тогда для $\lambda!$ справедлива следующая **асимптотическая оценка**:

$$\lambda! = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \cdot \sqrt{2\pi\lambda}\,(1+\gamma_\lambda), \qquad (1)$$

где $\gamma_\lambda = \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{228\lambda^2} - \frac{139}{51840\lambda^3} - \frac{571}{2448320\lambda^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^5}\right)$.

Мы выведем данную формулу до $\frac{1}{\lambda^2}$ в γ_λ — получение дальнейших коэффициентов в разложении достаточно трудоёмко, и не привносит каких-либо новых идей в доказательство.

Доказательство.

Выразим факториал через Гамма-функцию и сделаем замену:

$$\lambda! = \Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y} y^{\lambda}\, dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} y = \lambda(1+x) & e^{-y} = e^{-\lambda} e^{-\lambda x} \\ dy = \lambda dx & y^{\lambda} = \lambda^{\lambda}(1+x)^{\lambda} = \lambda^{\lambda} e^{\lambda \ln(1+x)} \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda} e^{-\lambda x} \lambda^{\lambda} e^{\lambda \ln(1+x)} \lambda\, dx = \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^{\lambda}} \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(x-\ln(1+x))}\, dx = \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^{\lambda}} J(\lambda).$$

Здесь для удобства мы обозначили получившийся интеграл как $J(\lambda)$. Обратим теперь внимание на показатель экспоненты. Рассмотрим функцию

$$t = g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x - \ln(1+x)}, & -1 < x < 0, \\ \sqrt{x - \ln(1+x)}, & 0 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Доказательство.

Нам понадобятся несколько ее свойств:

1. $\lim\limits_{x\to -1+0} g(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.
2. Теперь заметим, что $\frac{dg^2(x)}{dx} = 2g(x)g'(x)$. С другой стороны, по определению функции $g(x)$:

$$\frac{dg^2(x)}{dx} = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow \begin{cases} <0, & \text{при } x\in(-1,0), \\ >0, & \text{при } x\in(0,+\infty). \end{cases}$$

Но, аналогично, $g(x) < 0$ при $x \in (-1,0)$ и $g(x) > 0$ при $x \in (0,+\infty)$. Тогда в силу полученного равенства $2g(x)g'(x) = \frac{x}{1+x}$ можно заключить, что $g'(x) > 0$ при $x > -1$, $x \neq 0$. При $x = 0 \Rightarrow g'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из этого мы можем заключить, что $g(x) \uparrow$ при $x > -1$, а значит существует обратная к $g(x)$ функция $\varphi(t) = g^{-1}(t)$.

Доказательство.

3. $g(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-1, 1)$. Действительно, функция $g^2(x)$ имеет следующее разложение в окрестности 0 (с радиусом сходимости 1):

$$g^2(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \underline{O}(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + \underline{O}(x^3).$$

Тогда существует строго положительная при $x > -1$ функция $h(x)$ такая, что

$$g^2(x) = x^2 h(x) \Rightarrow g(x) = x\sqrt{h(x)}.$$

А поскольку $h(x) = \frac{1}{2} + \underline{O}(x)$ является бесконечно дифференцируемой на $(-1, 1)$, то и $g(x)$ бесконечно дифференцируема.

4. $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема в окрестности нуля. Это непосредственно следует из предыдущего пункта, поскольку $g(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности 0.

Доказательство.

Возьмём произвольную точку $a \in (0,1)$. Поскольку $\varphi(t)$ пробегает все значения на $(-1,+\infty)$, $\exists b, c : \varphi(-a) = b$ и $\varphi(a) = c$, т.е. $a = -g(b) = g(c)$. Учитывая, что $g(x) < 0$ при $x \in (-1,0)$ и $g(x) > 0$ при $x \in (0,+\infty)$, а $a \in (0,1)$, получаем, что $b \in (-1,0)$ и $c \in (0,+\infty)$. Тогда

$$J(\lambda) = \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx + \int\limits_{b}^{c} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx =$$

$$= J_1(\lambda) + J_2(\lambda) + J_3(\lambda).$$

Теперь оценим отдельно каждый из трёх интегралов. Начнём с первого. Заметим, что при $-1 < x < b \Rightarrow g(x) < g(b)$ в силу монотонности функции $g(x)$. Тогда при $\lambda > 1 \Rightarrow \lambda g^2(x) > \lambda g^2(b)$ (напоминаем, что $g(x) < 0$ при $-1 < x < b$), а значит $-\lambda g^2(x) < -\lambda g^2(b)$. Отсюда следует, что

$$J_1(\lambda) = \int\limits_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx \leqslant e^{-\lambda g^2(b)} \int\limits_{-1}^{b} dx = e^{-\lambda a^2}(b+1) = \underline{O}(e^{-\lambda a^2}).$$

Доказательство.

Теперь разберемся с третьим интегралом. Здесь используется примерно та же техника. Для начала распишем $e^{-\lambda g^2(x)} = e^{-g^2(x)(\lambda-1)}e^{-g^2(x)}$. Снова в силу монотонности $g(x) > g(c)$ при $x \in (c, +\infty)$. Но на данном интервале функция уже положительна, а значит $g^2(x) > g^2(c) \Rightarrow -\lambda g^2(x) < -\lambda g^2(c) = -\lambda a^2$. Пользуясь этим, можно записать

$$J_3(\lambda) = \int\limits_c^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx = \int\limits_c^{+\infty} e^{-g^2(x)(\lambda-1)}e^{-g^2(x)}\,dx \leqslant e^{-a^2(\lambda-1)}\int\limits_c^{+\infty} e^{-g^2(x)}\,dx.$$

Учитывая тот факт, что $\int\limits_c^{+\infty} e^{-g^2(x)}\,dx \to$, можно ограничить данный интеграл как $\int\limits_c^{+\infty} e^{-g^2(x)}\,dx \leqslant M$. Тогда

$$J_3(\lambda) = e^{-\lambda a^2}e^{a^2}M = M'e^{-\lambda a^2} \Rightarrow J_3(\lambda) = \underline{O}(e^{-\lambda a^2}).$$

Доказательство.

Таким образом, на данный момент мы имеем

$$J(\lambda) = \int\limits_b^c e^{-\lambda g^2(x)}\,dx + \underline{O}(e^{-\lambda a^2}) = J_2(\lambda) + \underline{O}(e^{-\lambda a^2}).$$

Фактически мы пользуемся методом Лапласа: подынтегральная функция в $J(\lambda)$ имеет максимум в точке $x = 0$. Мы разбили область интегрирования на 3 части: в областях, не содержащих точку 0 ($J_1(\lambda)$ и $J_3(\lambda)$), данный интеграл достаточно мал по сравнению с $J_2(\lambda)$. Осталось лишь оценить этот главный интеграл. Это делается чуть менее тривиально.
Для начала сделаем замену, используя обратную функцию:

$$J_2(\lambda) = \int\limits_b^c e^{-\lambda g^2(x)}\,dx = \left\{\begin{array}{c} t = g(x) \\ x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array}\right\} = \int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2}\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство.

Теперь, пользуясь тем, что $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема в окрестности 0, разложим $\varphi'(t)$ в ряд Тейлора:

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + \underline{O}(t^{2n}).$$

Тогда

$$J_2(\lambda) = \int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + \underline{O}(t^{2n}) \right) dt.$$

Заметим теперь, что интегрирование производится по симметричному относительно 0 отрезку $(-a, a)$. Это значит, что при нечётных k соответствующие слагаемые в сумме сократятся, а при чётных удвоятся. Тогда, меняя местами интегрирование и суммирование, получаем

$$J_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot 2 \int\limits_{0}^{a} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\, dt + \underline{O}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} t^{2n}\, dt \right). \qquad (2)$$

Доказательство.

Исследуем интеграл под знаком суммы. Для начала разобьем его на два:

$$\int_0^a e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt - \int_a^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt.$$

Оценим для начала второй из интегралов. Тут все практически аналогично оценке $J_3(\lambda)$:

$$\int_a^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\,dt = \int_a^{+\infty} e^{-t^2(\lambda-1)} e^{-t^2} t^{2k}\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} e^{-a^2(\lambda-1)} e^{-t^2} t^{2k}\,dt.$$

Доказательство.

Получившийся интеграл сходится, а значит его можно ограничить числом M. «Внесем» также в константу M число e^{a^2}. Тогда

$$\int_a^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\, dt = \underline{O}(e^{-\lambda a^2}).$$

Осталось лишь разобраться с последним оставшимся интегралом, который и дает асимптотическую оценку факториала:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\, dt.$$

Сделаем в нём замену:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\, dt. = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda t^2 = x & e^{-\lambda t^2} = e^{-x} \\ t = \sqrt{\dfrac{x}{\lambda}} & t^{2k} = \dfrac{x^k}{\lambda^k} \\ dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x\lambda}} & \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{k-\frac{1}{2}}}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}\, dx.$$

Доказательство.

Теперь, вынося константу $\frac{1}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}$, мы получаем в точности гамма-функцию:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} t^{2k}\, dt = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Воспользуемся той же заменой для оценки $\underline{O}$ в (2):

$$\underline{O}\left(\int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} t^{2n}\, dt\right) = \underline{O}\left(\int_{-\lambda a^2}^{\lambda a^2} \frac{e^{-x} x^{n-\frac{1}{2}}}{2\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right) = \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right).$$

т.к. в скобках имеем простой определенный интеграл, который ограничен. Наконец, собирая в кучу, получаем, что

$$J(\lambda) = J_2(\lambda) + \underline{O}(e^{-\lambda a^2}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot 2 \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\lambda^{k+\frac{1}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right).$$

Доказательство.

Вычислим первые два члена этого ряда. Собственно говоря, чтобы получить формулу, указанную в условии, нужно вычислить не только первые два члена, но и несколько следующих, т.е. последовательно вычисляя члены ряда, можно получать значение факториала со сколь угодно большой точностью. Однако мы ограничимся двумя первыми членами.

Для начала вычислим значения гамма-функции. При $k = 0$ имеем $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ — это значение мы уже вычисляли ранее. При $k = 1 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Что касается производных $\varphi(t)$, то воспользуемся следующим приемом. Выше мы показали, что

$$\frac{dg^2(x)}{dx} = \frac{x}{1+x} = 2g(x)g'(x).$$

Доказательство.

Возьмём последнее равенство и подставим $x = \varphi(t)$. Тогда $g(x) = t$. Напоминаем также, что поскольку $\varphi(t) = g^{-1}(x)$, то $g'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$:

$$\frac{\varphi(t)}{1+\varphi(t)} = 2t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \Leftrightarrow \varphi(t)\varphi'(t) = 2t(1+\varphi(t)).$$

Продифференцируем теперь обе части полученного равенства:

$$(\varphi'(t))^2 + \varphi(t)\varphi''(t) = 2(1+\varphi(t)) + 2t(\varphi'(t)).$$

Теперь подставим $t = 0$. Учитывая, что $\varphi(0) = 0$ (поскольку $g(0) = 0$),

$$(\varphi'(0))^2 = 2 \Rightarrow \varphi'(0) = \sqrt{2}.$$

Дифференцируя последнее равенство, находим $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)$ и т.д.

Доказательство.

Наконец, мы можем вернуться к факториалу:

$$\lambda! = \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^{\lambda}} J(\lambda) = \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^{\lambda}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\lambda^{\lambda+1}}{e^{\lambda}} \left(\frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\lambda^{\lambda}}{e^{\lambda}} \sqrt{2\pi\lambda} \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\lambda} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right).$$

□