Fourier 级数

Ряды Фурье

作者：Galois 爱求五次根

组织：深北莫数学学社分析小组

时间：2023/2/22

宗旨：执象而求，咫尺千里

时间是个常数，但对勤奋者来说，是个‘变数’。用‘分’来计算时间的人比用‘小时’来计算时间的人时间多 59 倍——雷巴柯夫

目录

第 1 章 基本概念

Fourier 级数是以杰出的法国数学物理学家 Joseph Fourier(1768-1830) 命名的级数。在 19 世纪早期, Fourier 从事于热传导理论，并且在 1822 年发表了他的巨著《La Thérie Analytique de la Chaleur》，在该巨著中他大量利用现在冠以他的名字的这种级数。实际上 Fourier 只从事三角多项式的研究，历史学家中的多数人的看法似乎为 Fourier 对 Fourier 级数的数学理论所做的贡献几乎没有。不过，这些级数在更早对于 Lenhard Euler(1707-1783), Daniel Bernoulli(1700-1782), Joseph Lagrange (1736-1813) 和其他学者的确是熟知的

1.1 正则性与规范正交系

定义 1.1 (Euclid 空间)

线性空间 $\mathcal{L}$ 称为 Euclid 空间，若对 $\forall f,g\in\mathcal{L}$，存在映射（称为内积、标量积）$(f,g):\mathcal{L}\times\mathcal{L}\mapsto$ 并满足条件：

1) 对称性：$\forall f,g\in\mathcal{L}\Rightarrow(f,g)=(g,f)$
2) 线性性：$\forall f,g\in\mathcal{L},\forall\alpha,\beta\in\Rightarrow(\alpha f\pm\beta g,h)=\alpha(f,h)\pm\beta(g,h)$
3) 正定性：$\forall f\in\mathcal{L}\Rightarrow(f,f)\geqslant 0$，并且 $(f,f)=0\Leftrightarrow f\equiv 0$

♣

定义 1.2 (伪 Euclid 空间/псевдоевклидовое пространство)

线性空间 $\mathcal{L}$ 称为伪 Euclid 空间，若空间 $\mathcal{L}$ 上引入满足条件 1)，2) 的内积，而 $(f,f)=0$ 不仅仅当 f 为零元素时成立

♣

注 任何 Euclid 空间都是伪 Euclid 空间，任何在伪 Euclid 空间成立的命题，在 Euclid 空间中也成立

定义 1.3 (正则点与正则函数/Lebesgue 定义)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的值 $f(x_0)$ 等于在此点的左极限与右极限的和的一半，则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处正则，称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的正则点。

称在区间 I 的每点处都正则的函数 $f(x)$ 为在区间 I 上正则函数。若周期函数在实轴的每个闭区间内仅有有限个间断点且在间断点处正则，则称函数为严格正则函数

若周期函数 $g(x)$ 可表示成

$$g(x)=\int_{\mathfrak{a}}^{x}f(t)dt+g(a)$$

其中 $f(t)$ 为严格正则函数，则称函数 $g(x)$ 为严格逐段光滑函数

♣

例题 1.1 （正则分段连续函数）

$\widehat{C}[a;b]$ 为 $[a;b]$ 上分段连续空间，有有限数量的第一类间断点 (разрыв I-ого рода)$x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a;b]$。在这些点上函数值定义为

$$f(x_i)=\frac{f(x_i-0)+f(x_i+0)}{2}$$

即函数为正则函数。引入标量积如下：

$$(f,g)_{\widehat{C}}=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

则具有这种内积的给定空间为 Euclid 空间

解

1) 对称性：$(f,g)_{\widehat{\mathcal{C}}}=(g,f)_{\widehat{\mathcal{C}}}$ 由

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx$$

即得

2) 线性性：显然有

$$\begin{aligned}(\alpha f\pm\beta g,h)_{\widehat{\mathcal{C}}}&=\int_a^b(\alpha f(x)\pm\beta g(x))h(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)h(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)h(x)dx\\&=\alpha(f,h)_{\widehat{\mathcal{C}}}\pm\beta(g,h)_{\widehat{\mathcal{C}}}\end{aligned}$$

3) 正定性：$(f,f)_{\widehat{\mathcal{C}}}\geqslant 0$，且 $(f,f)_{\widehat{\mathcal{C}}}=0\Leftrightarrow f\equiv 0$。事实上，区间 $[a;b]$ 被点 $x_1,\dots,x_n$ 分为了 $n+1$ 个区间，若端点值分别取左右极限的值，则函数在这些区间上连续。

另一方面，若 $f(x)\in\mathcal{C}[a;b]$，在 $[a;b]$ 有 $f(x)\geqslant 0$ 且 $(\exists x_0\in[a;b]):f(x_0)>0$，则有 $\int_a^b f(x)dx>0$ ，由此得

$$\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}f^2(x)dx=0\right)\Leftrightarrow((\forall x\in[x_{i-1};x_i]):f(x)\equiv 0)$$

则有 $f(x_i-0)=f(x_i+0)=0\Rightarrow f(x_i)=0$ ，因此有

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx=0\right)\Leftrightarrow((\forall x\in[a;b]):f(x)\equiv 0)$$

正定性得证

例题 1.2 伪 Euclid 空间的另一个例子是 $L[a,b]$：区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数空间。事实上，Euclid 空间中内积的前两条性质证明同理，第三条性质不满足。可以考虑这样的函数：在几乎所有的点处取值为 0，而在一点取值为 1。这样的函数（及其平方）积分依旧为 0，即使函数本身在区间 $[a,b]$ 上不恒等于 0

定义 1.4 (无穷维空间)

空间 $\mathcal{L}$ 称为无穷维的，若对 $\forall n\in\mathbb{N}$，总可以找到 n 个空间 $\mathcal{L}$ 中线性无关的元素 ♣

命题 1.1 (Cauchy-Буняковский 不等式)

$\forall f,g$，有

$$(f,g)^2\leqslant(f,f)\cdot(g,g)$$

♠

例题 1.3 （Rademaher[1]函数系）在概率论和函数论中，有 Rademaher 函数系

$$\{\psi_n(x)=\varphi(2^n x)\,;n=0,1,2,\cdots\}$$

其中 $\varphi(t)=\operatorname{sgn}(\sin 2\pi t)$。该函数系为闭区间 $[0;1]$ 上一个正交函数系

例题 1.4 （Haar[2]函数系）Haar 函数系 $\{\chi_{n,k}(x);n=0,1,2,\cdots,k=1,2,2^2,\cdots\}$ 由以下关系式定义：

$$\chi_{n,k}(x)=\begin{cases}1, & \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\\ -1, & \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k}{2^{n+1}}\\ 0, & \text{在}[0;1]\text{ 的其余各点}\end{cases}$$

该函数系为闭区间 $[0;1]$ 上正交函数系

[1]拉德马赫 (H. A. Rademaher, 1892-1969) 德裔美国数学家

[2]哈尔 (A. Haar, 1885-1933) 匈牙利数学家

定义 1.5 (赋范线性空间)

线性空间 $\mathcal{L}$ 称为是赋范的，若对 $\forall f \in \mathcal{L}$，可以引入映射（称为范数）$\|f\|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \mapsto \mathbb{R}$，并满足性质：

1) 三角形不等式：$\forall f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow \|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$
2) $\forall f \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$
3) $\forall f \in \mathcal{L} \Rightarrow \|f\| \geqslant 0$，并且 $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

♣

定义 1.6 (准赋范线性空间)

线性空间 $\mathcal{L}$ 称为是准赋范的 (псевдонормированный)，若对 $\forall f \in \mathcal{L}$，引入的范数函数满足赋范线性空间中的公理 1) 和 2)，公理 3) 不满足，即存在 $f \neq 0$，有 $\|f\| = 0$

♣

定理 1.1

所有 Euclid（准 Euclid）空间都可以通过内积诱导的范数 $(\forall f) : \|f\| = \sqrt{(f,f)}$ 赋范（准赋范）化

♡

注 满足平行四边形准则的内积可以诱导范数

证明 赋范线性空间的公理 3) 通过内积的公理 3) 推出。公理 2) 也成立：

$$\|\alpha \cdot f\| = \sqrt{(\alpha f, \alpha f)} = |\alpha|\sqrt{(f,f)} = |\alpha| \cdot \|f\|$$

三角形不等式也得到满足：

$$\begin{aligned}
&\|f+g\| = \sqrt{(f+g, f+g)} = \sqrt{(f,f) + 2(f,g) + (g,g)} \leqslant \\
&\leqslant \{\text{Cauchy-Буняковский 不等式}\} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{(f,f) + 2\sqrt{(f,f)} \cdot \sqrt{(g,g)} + (g,g)} = \sqrt{(f,f)} + \sqrt{(g,g)} = \|f\| + \|g\|
\end{aligned}$$

定义 1.7 (Minkowski 不等式/неравенство Минковского)

空间 $L[a,b]$ 和 $\widehat{C}[a,b]$ 上的三角形不等式形如

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

称为 Minkowski 不等式

♣

定义 1.8 (角度)

在 Euclid（准 Euclid）空间中引入两个元素的角度的概念：$\phi = (\widehat{f,g})$。定义其余弦值

$$\cos\phi = \frac{(f,g)}{\|f\| \cdot \|g\|}, 0 < \phi < \pi$$

并且有

$$|\cos\phi| = \frac{|(f,g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} \leqslant \{\text{Cauchy-Буняковский 不等式}\} \leqslant \frac{\|f\| \cdot \|g\|}{\|f\| \cdot \|g\|} = 1.$$

♣

定义 1.9 (正交)

两个元素 f 和 g 正交 (ортогональный)，若 $(f,g) = 0$

♣

例题 1.5 在空间 $L[-1,1]$（可积函数空间）上，$|x| \perp \operatorname{sgn} x$，事实上

$$\int_{-1}^{1} |x| \operatorname{sgn} x dx = \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

定义 1.10 (正交组)

元素组 $\{\psi_j\} \in \mathcal{L}$ 称为正交的，若 $\forall j \neq k \Rightarrow (\psi_j, \psi_k) = 0$ ♣

例题 1.6 空间 $L[-\pi, \pi]$ 和 $\widehat{C}[-\pi, \pi]$ 上的向量组 $\{1, \cos kx, \sin kx\}$

定义 1.11 (准 Euclid 空间规范正交系)

设准 Euclid 空间上函数系 $\{\psi_j\}$，若 $(\psi_j, \psi_k) = \delta_j^k$，其中 δ_j^k 为 Kronecker 记号 (символ Кронекера)：

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

则称函数系为规范正交系 (ортонормированная система) ♣

例题 1.7 （准 Euclid 空间规范正交三角函数系）在准 Euclid 空间 $L[-\pi; \pi]$ 与 $[-\pi; \pi]$ 上的三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}, k = 1, 2, 3, \ldots$$

为规范正交系

注 为避免混淆，今后称函数系 $\{1, \cos kx, \sin kx\}$ 为（正交）三角函数系，称

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

为规范正交三角函数系

注 为了简便起见，以下所有定义和命题都使用规范正交系来陈述。实际上，它们对于正交系也是完全成立的。由 Gram[3]-Schmidt[4]正交化即可将正交系化为规范正交系

1.1.1 Bessel 恒等式与 Bessel 不等式

定义 1.12 (准 Euclid 空间偏差)

称准 Euclid 空间上数 $\|f - g\|$ 为 g 与 f 在准 Euclid 空间上偏差 (отклонение элемента g от f) ♣

定理 1.2 (Bessel 恒等式/тождеством Бесселя)

(Bessel[a] 恒等式/тождеством Бесселя) 设 $\{\psi_j\}$ 为任意规范正交系，$n \in \mathbb{N}, c_j \in \mathbb{R}$，则有

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|^2 = (f, f) - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

并且若记 $(f, \psi_k) = f_k$，则有最小偏差

$$\min_{c_k} = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

[a]贝塞尔 (Bessel,Friedrich Wilhelm,1784.7.22-1846.3.17) 德国天文学家，数学家，天体测量学的奠基人之一。在数学研究中提出了 Bessel 函数，讨论了该函数的一系列性质及其求值方法，为解决物理学和天文学的有关问题提供了重要工具 ♡

[3]格拉姆 (J.P. Gram, 1850-1916) 丹麦数学家，他延续了 П. Л. 切比雪夫的研究，揭示了按照正交函数系展开为级数与最佳平方逼近问题之间的联系，正是在这些研究中产生了正交化方法和著名的 Gram 矩阵

[4]施密特 (E. Schmidt, 1876-1959) 德国数学家。他为了研究积分方程而研究了 Hilebert 空间的几何学，并用欧氏几何学语言描述了它

证明 由定义即有

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k\right\|^2&=\left(f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k,f-\sum_{j=1}^{n}c_j\psi_j\right)\\&=(f,f)-\left(f,\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k\right)-\left(f,\sum_{j=1}^{n}c_j\psi_j\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_kc_j\cdot(\psi_k,\psi_j)\\&=(f,f)-2\sum_{k=1}^{n}c_k\left(f,\psi_k\right)+\sum_{k=1}^{n}c_k^2\end{aligned}$$

记 $(f,\psi_k)=f_k$，则有

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k\right\|^2=\|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}(c_k-f_k)^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2$$

再令 $c_k=f_k$ 即得最小偏差估计

定义 1.13 (Fourier 级数)

设 $\{\psi_j\}$ 为准 Euclid 空间上任意规范正交系 (ортонормированная система)，$n\in\mathbb{N}$，且 $(f,\psi_k)=f_k$。则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k\psi_k$ 为函数 f 关于规范正交系 $\{\psi_k\}$ 的 Fourier 级数 (ряд Фурье функции f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$)，称 $f_k=(f,\psi_k)$ 为关于规范正交系 $\{\psi_k\}$ 的 Fourier 级数系数，称 $\sum\limits_{k=1}^{n}f_k\psi_k$ 为关于规范正交系 $\{\psi_k\}$ 的 Fourier 级数的 n 阶部分和

若 $\{l_i\}$ 为准 Euclid 空间中的正交系，则称数 $\left\{\dfrac{\langle f,l_i\rangle}{\langle l_i,l_i\rangle}\right\}$ 为 f 关于正交系 $\{l_i\}$ 的 Fourier 系数，称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\langle f,l_k\rangle}{\langle l_k,l_k\rangle}l_k$ 关于正交系 $\{l_i\}$ 的 Fourier 级数，称 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\langle f,l_k\rangle}{\langle l_k,l_k\rangle}l_k$ 关于正交系 $\{l_i\}$ 的 Fourier 级数的 n 阶部分和

♣

推论 1.1 (Fourier 级数极值性质)

在 Euclid 空间（赋范线性空间、内积空间、线性空间、Hilbert Space、无穷维函数空间等）中任意元素 f 的关于规范正交系 $\{\psi_k\}$ 的 Fourier 级数 n 阶部分和为其最佳逼近（即有最小偏差）

♡

定理 1.3 (Bessel 不等式)

设 f 为准 Euclid 空间 E 上元素，则任意规范正交系 $\{\phi_k\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\leqslant\|f\|^2$$

♡

证明 [证明一：非严格证明] 由 Bessel 恒等式 (1.2) 有 $(\forall n\in\mathbb{N}):\sum\limits_{k=1}^{n}f_k^2\leqslant\|f\|^2$。由 $f_k^2\geqslant 0$ 且 n 阶部分和上有界，则有部分和序列必收敛，则数值级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^2$ 收敛，则由 $n\to\infty$ 极限过程得证所需不等式

证明 [证明二：严格证明] 由 Bessel 恒等式 (1.2) 有 $(\forall n\in\mathbb{N}):\sum\limits_{k=1}^{n}f_k^2\leqslant\|f\|^2$，即 $\|f\|^2$ 为 n 阶部分和序列一个上界。由 $f_k^2\geqslant 0$ 有部分和序列单调递增且 n 阶部分和上有界，则由 Weierstrass 定理有部分和序列收敛，则数值级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^2$ 收敛。由确界原理，可设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^2$ 上确界为 A，由上确界定义有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbf{N}):A-\varepsilon<\sum_{k=1}^{N}f_k^2\leqslant A$$

而由单调性有

$$(\forall n > N): A - \varepsilon < \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant A$$

则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n > N): A - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant A$$

即部分和序列收敛到上确界 A，这时由上确界定义有 $A \leqslant \|f\|^2$，则有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = A \leqslant \|f\|^2$$

即得所需不等式

注 对于三角函数系，Bessel 不等式具有以下形式：

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x) dx$$

注 对于函数系 $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$，Bessel 不等式具有以下形式：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x) dx$$

在可积函数空间 $L[-\pi,\pi]$ 中，函数 f 在三角函数系下的 Fourier 级数，形如

$$\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k'}{\sqrt{\pi}} \cos kx + \frac{f_k''}{\sqrt{\pi}} \sin kx\right)$$

其中

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad f_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad f_k'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

注 三角函数系下的 Fourier 级数通常有不同的表现形式：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_0 = \frac{2f_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{f_k'}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{f_k''}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

此时的 Bessel 不等式：

$$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((f_k')^2 + (f_k'')^2\right) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

变成

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

1.1.2 闭正交系与完备正交系

三角函数系以及其他一些具体的正交函数系在 $\mathcal{R}_2[-\pi;\pi]$ 中的完备性，最早是由 Lyapunov[a]明确证明的。而在隐式表述下，具体三角函数系的完备性问题已经出现在 Dirichlet 研究三角函数收敛性的著作中。对于三角函数系，与完备性等价的 Parseval 等式早在 18 世纪末至 19 世纪初就被 Parseval 发现了。

一般情形下的正交函数系完备性问题以及它们在数学物理问题中的应用为 Steklov[b]的主要研究对象之一，而正交函数系的完备性（及封闭性）的概念本身也是由他引入数学的。值得一提的是，Steklov 在研究

完备性问题时积极使用了函数的积分平均法，经常称这种方法为 Steklov 平均法

[a]李雅普诺夫 (A.M. Ляпунов, 1857-1918) 俄罗斯数学家和力学家，切比雪夫学派的杰出代表，运动稳定性理论的创始人。他成功地研究了数学和力学的不同领域

[b]斯捷克洛夫 (B. A. Стеклов, 1864-1926) 俄罗斯数学家，是由切比雪夫创立的彼得堡数学学派的代表，苏联数学物理学派的奠基人。俄罗斯科学院数学研究所以他的名字命名。1882 年入学莫斯科大学

定义 1.14 (准 Euclid 空间闭规范正交系)

设准 Euclid 空间上 $\{\psi_k\}$ 为规范正交系，若准 Euclid 空间上任意元素 f 满足

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n\in\mathbb{N})(\exists c_1,\dots,c_n):\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k\right\|<\varepsilon$$

则称正交系为准 Euclid 空间上闭规范正交系 ♣

定理 1.4 (Parseval 等式/равенство Парсеваля)

(Parseval[a]等式/равенство Парсеваля) 在准 Euclid 空间上对于闭规范正交系有恒等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2=\|f\|^2$$

[a]帕塞瓦尔 (M.A. Parseval, 1755-1836) 法国数学家，在 1799 年发现了三角函数系的 Parseval 等式 ♡

证明 固定任意 $\varepsilon>0$，由准 Euclid 空间上闭规范正交系定义与 Bessel 恒等式 (1.2) 有

$$(\exists n\in\mathbb{N})(\exists c_1,\dots,c_n):\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2\leqslant\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k\right\|^2<\varepsilon^2=\varepsilon'$$

这时有

$$(\forall m\geqslant n):\|f\|^2-\sum_{k=1}^{m}f_k^2\leqslant\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k\right\|^2<\varepsilon'$$

由 Bessel 恒等式 (1.2) 有 $0\leqslant\|f\|^2-\sum\limits_{k=1}^{m}f_k^2$，则有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n\in\mathbb{N})(\forall m\geqslant n):0\leqslant\|f\|^2-\sum_{k=1}^{m}f_k^2<\varepsilon'$$

可记为 $\|f\|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^2$

定理 1.5 (Parseval 不等式)

在准 Euclid 空间上对于闭规范正交系有不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\leqslant\|f\|^2$$

♡

定理 1.6 (准 Euclid 空间闭正交系 Fourier 级数最佳逼近性)

若准 Euclid 空间 $\mathcal{L}$ 上规范正交系 $\{\psi_k\}$ 为闭规范正交系，则有

$$\forall f\in\mathcal{L}:\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}f_k\psi_k\right\|_{\mathcal{L}}=0$$

♡

证明 由 Bessel 恒等式 (1.2) 取极限过程 $n\to\infty$，与 Parseval 等式 (1.4) 有

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}f_k\psi_k\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

则定理得证

定理 1.7 (Lyapunov 等式/равенство Ляпунова)

设准 Euclid 空间正交三角函数系

$$F_0=\{f_k(x)\}=\left\{\frac{1}{2},\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\right\}$$

则有准 Euclid 空间上 f 满足 Lyapunov 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

证明 若把 F_0 中函数 $f_1(x)=\dfrac{1}{2}$ 换为 $h_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则把 F_0 变为 F_2，即得函数系 $F_2=\{h_k(x)\}$，其中若 $k=1$ 则 $h_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，若 $k=2n$ 则 $h_k(x)=h_{2n}(x)=\cos nx$，而若 $k=2n+1$，则 $h_k(x)=h_{2n+1}(x)=\sin nx$，则函数 $f(x)$ 关于 F_2 的 Fourier 系数 c_k 与 a_k,b_k 满足 $a_0=c_1\sqrt{2},a_k=c_2k,b_k=c_{2k+1},k=1,2,\cdots$，此时 Parseval 等式 (1.4) 改写为

$$(g,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}c_k^2$$

则仅需证

$$(f,f)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$$

其中

$$c_k=(f,f_k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)f_k(x)dx,f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

而当 $k\geqslant 1$ 时 $f_{2k}(x)=\cos kx$，$f_{2k+1}(x)=\sin kx$

由 Bessel 恒等式 (1.2) 有

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\|f\|^2-\|f_n\|^2=\|f-f_n\|^2$$

由定理 (1.6)，当 $n\to\infty$ 时 $\|f-f_n\|\to 0$，则有

$$\|f\|^2=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$$

这即是 Lyapunov 等式

注 该定理一并证明了规范正交三角函数系 F_0 为闭规范正交系

注 在 $L[-\pi;\pi]$ 上函数 f 关于规范正交三角函数系的 Fourier 级数有形式

$$\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_k'}{\sqrt{\pi}}\cos kx+\frac{f_k''}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right)f_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$f_k'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx,\quad f_k''=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$$

注 在可积函数空间 $L[-\pi,\pi]$ 上，成立：

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}f_k\psi_k\right\|_L=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k\psi_k(x)\right)^2dx}$$

因此，在空间 $L[-\pi,\pi]$ 中的范数的意义下收敛等价于该函数的 Fourier 级数的平均收敛

定义 1.15 (准 Euclid 空间完备规范正交系)

设准 Euclid 空间上有规范正交系 $\{\psi_k\}$ 与元素 f，若

$$(\forall k\in\mathbb{N}):f\perp\psi_k\Rightarrow f\equiv 0$$

则称规范正交系 $\{\psi_k\}$ 为准 Euclid 空间上完备规范正交系

定理 1.8 (Euclid 空间闭规范正交系完备性)

Euclid 空间 $\mathcal{L}$ 上任意闭规范正交系 $\{\psi_k\}$ 均完备

证明 对任意 $f\in\mathcal{L}$，设 $(\forall k\in\mathbb{N}):f_k=(f,\psi_k)=0$，由规范正交系闭性则有 Parseval 等式 (1.4)，$\|f\|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^2=0$，则由 Euclid 空间正定性有 $f\equiv 0$，闭规范正交系完备性得证

定理 1.9 (Euclid 空间关于完备规范正交系的 Fourier 级数唯一性)

对于 Euclid 空间 $\mathcal{L}$ 上的完备规范正交系，不同元素 f 与 g 不能所有 Fourier 系数全等

证明 设 $(\forall k\in\mathbb{N}):f_k=g_k$，则有 $(f-g)_k=0$，即元素 $(f-g)$ 与规范正交系 $\{\psi_k\}$ 所有元素正交，则由完备性有 $(f-g)\equiv 0\Leftrightarrow f\equiv g$

1.2 Fourier 三角级数

1.2.1 三角多项式与形式三角级数

定义 1.16 (三角多项式与三角级数)

称形如

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的函数 $T_n(x)$ 为 n 阶三角多项式

称形如

$$\sum=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的函数级数为形式三角级数。若考虑任意的函数 $x=\varphi(t)$ 来代替自变量 x，则仍称这样得到的形式函数级数为三角级数。

若存在函数 $f(x)$ 使得形式三角级数 $\sum$ 的一切系数 a_k 和 b_k 都可由形如

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,k=\overline{0;n},\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x,k=\overline{1;n}$$

的 Euler-Fourier 公式表示（称 Euler-Fourier 公式表示的系数为 Euler-Fourier 系数），则称此形式三角级数 $\sum$ 为函数 $f(x)$ 的 Fourier 三角级数（此处公式中的积分可以为反常积分）

注 在三角多项式的零阶单项式 $\frac{a_0}{2}$ 中，系数 a_0 带上一个数值因子 $\frac{1}{2}$ 的原因即是为了满足 Euler-Fourier 公式的统一形式

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\cos kx\mathrm{d}x,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\sin kx\mathrm{d}x$$

其中 $k=0,1,\cdots,n$

注 注意，没有要求函数 $f(x)$ 的 Fourier 三角级数当 x 的值代人时收敛。作为例子，在 1930 年 Kolmogorov[5]

[5]柯尔莫戈洛夫 (A.H. Колмогоров, 1903-1987) 苏联数学家，其著作遍及概率论、数理统计学、函数论、泛函分析、拓扑学、逻辑学、微分

给出一个 Lebesgue 可积函数，其 Fourier 级数对所有的 x 发散，而且存在 $L[-\pi;\pi]$ 上的连续函数 $f(x)$，使得对所有的有理数 x，$f(x)$ 的 Fourier 三角级数发散。显然，总可改变 $f(x)$ 在任意有限点的值产生许多不同的新函数而不改变 Euler-Fourier 公式表示的积分，因此不改变 Fourier 三角级数。然而，若 $f(x)$ 的 Fourier 三角级数对 $L[-\pi;\pi]$ 中的所有 x 收敛，则它最多收敛到一个函数。因此若关于函数没有某些进一步的假设（例如连续性），则函数不是由 Fourier 级数唯一确定的

定义 1.17 (准 Euclid 空间 Fourier 三角级数部分和)

形式上记准 Euclid 空间上 Fourier 三角级数部分和为

$$S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

其中对于 $k=0,1,\cdots,m$，系数 a_k 和 b_k 为函数 f 的 Euler-Fourier 系数 ♣

定义 1.18 (准 Euclid 空间上均方根)

称准 Euclid 空间 $\mathcal{L}$ 上函数 f 与其 Fourier 三角级数部分和的差为

$$\|f-S_n\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n|^2(x)dx}$$

为函数的均方根 ♣

性质 (准 Euclid 空间上 Fourier 三角级数平均收敛性)

准 Euclid 空间 $\mathcal{L}$ 上 f 的任意 Fourier 三角级数在均方根意义下 (в среднеквадратичном) 收敛到其本身

$$f(x)\underset{\mathcal{L}}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

其中对于 $k=0,1,\cdots,m$，系数 a_k 和 b_k 为函数 f 的 Euler-Fourier 系数

证明 若任意准 Euclid 空间 $\mathcal{L}$ 中的正交系 $\{\psi_k\}$ 为闭正交系，则 $\forall f\in\mathcal{L}$ 的关于 $\mathcal{L}$ 上范数的 Fourier 级收敛到数 f。由 Lyapunov 等式 (1.7) 即有三角正交系为闭正交系

性质 (准 Euclid 空间上 Fourier 三角级数逐项积分性)

准 Euclid 空间 $\mathcal{L}$ 上 f 的 Fourier 三角级数可逐项积分

证明 由函数级数平均收敛逐项积分定理，则在均方根意义下收敛的函数级数可逐项积分

性质 (正交三角函数系完备性)

正交三角函数系在 Euclid 空间 $\widehat{\mathrm{C}}[-\pi;\pi]$ 中完备，在准 Euclid 空间 $L[-\pi;\pi]$ 上不完备

证明 观察函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

显然 $f(x)\in L[-\pi;\pi]$。同理对于三角函数系的任意 ψ_k 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\psi_k(x)dx=0$$

但这时 $f(x)\neq 0$

性质 两个在 $[-\pi;\pi]$ 上分段连续 (кусочно-непрерывная) 的不同函数 f 与 g 的所有 Fourier 系数不能全等

证明 由定理 (1.9) 即得，对于 Euclid 空间 $\mathcal{L}$ 上的完备正交系，二不同函数 f 与 g 的所有 Fourier 系数不能全等

方程以及数学的各方面应用

1.2.2 Dirichlet 核与 Fejér 核

引理 1.1 (周期函数积分性质)

设 f 为周期为 2π 的周期 (периодическая) 函数，在 $\mathbb{R}$ 可积，则对任意周期长度的闭区间满足

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

♡

证明 由基本的积分运算有

$$\int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi-\alpha}^{-\pi}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{\pi-\alpha}f(x)\mathrm{d}x=\{t=x+2\pi\}=$$
$$=\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\underbrace{f(t-2\pi)}_{=f(t)}\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{\pi-\alpha}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

则引理得证

令函数 f 是周期为 2π 的周期函数，其 Fourier 三角级数为

$$S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

命题 1.2 (Fourier 三角级数部分和 Dirichlet 核表示)

对周期为 2π 的函数的 Fourier 三角级数部分和成立

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\underbrace{\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\text{Ядро Дирихле}}dt$$

♠

证明 取函数 $f(y)$ 的 Euler-Fourier 系数即有

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos ky\mathrm{d}y,k=\overline{0;n},\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ky\mathrm{d}y,k=\overline{1;n}$$

则由引理 (1.1) 有

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(\cos ky\cdot\cos kx+\sin ky\cdot\sin kx)}_{\cos k(y-x)}\right)dy=\left\{\begin{array}{c}t=y-x\\dt=dy\end{array}\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt$$

另外由

$$2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos kt=\sin\left(\frac{k+1}{2}\right)t-\sin\left(\frac{k-1}{2}\right)t,k=1,\ldots,n$$
$$2\sin\frac{t}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos kt=-\sin\frac{t}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

有 $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$，命题所需等式即证

注 称 $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ 为 Dirichlet 核 (Ядро Дирихле)

注 类似例题 (??) 仍可以利用 Euler 公式计算得

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx+i\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right)$$

进而由积化和差公式即得同样的公式

推论 1.2

记 Dirichlet 核 $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$，则有

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t$$

♡

定义 1.19 (Fourier 三角级数 Cesaro 平均值)

称表达式

$$\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,f)+S_1(x,f)+\cdots+S_{n-1}(x,f)}{n}$$

为 Fourier 三角级数的 Cesaro 平均值

♣

命题 1.3 (Fourier 三角级数 Cesaro 平均值 Fejér 核表示)

对 Fourier 三角级数 Cesaro 平均值成立公式

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin^2\frac{tn}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

♠

证明 利用引理 (1.2) 与 Fourier 三角级数 Cesaro 平均值定义有

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt$$

注意到

$$2\sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\sin\frac{t}{2} = \cos tk - \cos t(k+1)$$

这时

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\sin\frac{t}{2} = 1-\cos tn = 2\sin^2\frac{tn}{2}$$

则有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(t\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sin^2\frac{tn}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

最终有

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin^2\frac{tn}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

所需公式得证

注 称 $\dfrac{\sin^2\frac{tn}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}$ 为 Fejér[6]核 (ядро Фейера)

推论 1.3

记 $F_n(t) = \dfrac{\sin^2\frac{tn}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}$，则对 Fourier 三角级数 Cesaro 平均值成立公式

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)\mathrm{d}t$$

♡

[6] Lipót Fejér(1880.2.9-1959.10.15) 德国数学家。主要研究方向为谐波分析，Fourier 级数及其奇点

命题 1.4

关于 Fejér 核与 Dirichlet 核满足等式

$$\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt = 1, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D(t)dt = 1$$

证明 设 $f(x)=1$，观察其 Fourier 三角级数部分和，对于 Euler-Fourier 系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$$

则有 $S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} = 1 \Rightarrow \sigma_n(x,f) = 1$。由此有

$$\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 1, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = 1$$

由 Fejér 核与 Dirichlet 核定义即得所需估计

定理 1.10 (Fejér 局部定理/локальная теорема Фейера)

设函数 f 为 2π 周期的沿任意有限闭区间可积的函数。设存在有限极限 $f(x_0 \pm 0)$，Fourier 三角级数 Cesaro 平均值在该点收敛到单边极限 (односторонних пределов) 的和的一半，形式化即

$$\sigma_n(x_0, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

证明 利用 Fejér 核的偶性，则有

$$\frac{1}{\pi n}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = \frac{1}{2}$$

由

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall t \in \overset{\circ}{V}_\delta(0)) : \left(|f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

并且利用 Fejér 核表示 $\frac{1}{2}$ 得

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_n(x_0,f) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\right| = \\
=&\left|\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t) F_n(t)dt + \frac{1}{\pi n}\int_{0}^{\pi} f(x_0+t) F_n(t)dt - \right.\\
&\left. - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0} f(x_0-0) F_n(t)dt - \frac{1}{\pi n}\int_{0}^{\pi} f(x_0+0) F_n(t)dt\right| \\
\leqslant& \frac{1}{\pi n}\int_{0}^{\pi} |f(x_0+t) - f(x_0+0)| F_n(t)dt + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0} |f(x_0+t) - f(x_0-0)| F_n(t)dt = \\
=&\left|\sigma_n(x_0,f) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\right| = \\
=& \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x_0+t) - f(x_0-0)| F_n(t)dt + \frac{1}{\pi n}\int_{-\delta}^{0} |f(x_0+t) - f(x_0-0)| F_n(t)dt + \\
&+ \frac{1}{\pi n}\int_{0}^{\delta} |f(x_0+t) - f(x_0+0)| F_n(t)dt + \frac{1}{\pi n}\int_{\delta}^{\pi} |f(x_0+t) - f(x_0+0)| F_n(t)dt
\end{aligned}$$

下估计最后的四个积分 I_1, I_2, I_3, I_4。考虑 I_1，由 f 可积，则 f 有界，则有

$$|f(x_0+t) - f(x_0-0)| \leqslant |f(x_0+t)| + |f(x_0-0)| \leqslant 2M$$

而 Fejér 核有如下估计

$$\left|\sin^2 \frac{nt}{2}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

则有 $|I_1| \leqslant C\cdot\frac{1}{n}, C\in\mathbb{R}$，但可以找到 N 满足对于任意 $n\geqslant N$ 有 $\frac{\varepsilon}{4}$

对于 I_2 估计为

$$\begin{aligned}|I_2| &\leqslant \frac{1}{\pi n}\int_{-\delta}^{0}\left|f\left(x_0+t\right)-f\left(x_0-0\right)\right|F_n(t)dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int_{-\delta}^{0}F_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}F_n(t)dt=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

同理估计 I_3 与 I_4，则有 $|I_1|+|I_2|+|I_3|+|I_4|<\varepsilon$，定理得证

定理 1.11

设函数 f 为 2π 周期的可积函数，若其 Fourier 三角级数在点 x_0 处收敛，且 f 连续，则有

$$S_n\left(x_0,f\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\left(x_0\right)$$

另外，若函数 f 在点 x_0 处有第一类间断，则有

$$S_n\left(x_0,f\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{f\left(x_0+0\right)+f\left(x_0-0\right)}{2}$$

♡

证明 设 $S_n\left(x_0,f\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ A。则由 Cesaro 算术平均法正则性，有 $\sigma_n\left(x_0,f\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$。但由 Fejér 局部定理 (1.10) 有 $\sigma_n\left(x_0,f\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\left(x_0\right)\left(\sigma_n\left(x_0,f\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\left(f\left(x_0-0\right)+f\left(x_0+0\right)\right)\right)$

1.2.3 Fejér 定理与 Weierstrass 逼近定理

定理 1.12 (Fejér 定理)

函数 $f(x)\in\mathcal{C}[-\pi;\pi]$ 且 $f(-\pi)=f(\pi)$ 充要条件为 $\sigma_n(x,f)\overset{[-\pi,\pi]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$

♡

证明

必要性：设 $\sigma_n(x,f)\overset{[-\pi;\pi]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$。由 $(\forall n\in\mathbb{N}):\sigma_n(x,f)\in\mathcal{C}[-\pi,\pi]$，则有 $f\in\mathcal{C}[-\pi;\pi]$。另外，$\sigma_n(-\pi,f)\underset{n\to\infty}{\to} f(-\pi), \sigma_n(\pi,f)\underset{n\to\infty}{\to} f(\pi)$，而由周期性有 $\sigma_n(x,f)$ 满足 $\sigma_n(-\pi,f)=\sigma_n(\pi,f)$

充分性：首先将 2π 周期的函数 $f(x)$ 延拓为 $[-\pi;\pi]$ 上函数，则有函数在 $[-\pi;\pi]$ 上一致收敛性。固定任意 $\varepsilon>0$，由此有

$$(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall t)(0<|t|<\delta(\varepsilon)):|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon$$

需证

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n\geqslant N)(\forall x\in[-\pi;\pi]):|\sigma_n(x,f)-f(x)|<\varepsilon$$

利用估计 (1.4) 写出 $f(x)$ 有

$$f(x)=f(x)\cdot 1=f(x)\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

利用该记法则有

$$\begin{aligned}|\sigma_n(x,f)-f(x)| &= \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))F_n(t)dt\,|\leqslant\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|F_n(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi n}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|F_n(t)dt+\frac{1}{\pi n}\int_{\delta<|t|<\pi}|f(x+t)-f(x)|F_n(t)dt\end{aligned}$$

将第一个积分表示为 I_1，将第二个积分表示为 I_2。利用连续性与估计 (1.4) 有估计

$$|I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\pi n} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(t)dt \underset{F_n(t)\geqslant 0}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, dt}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2}$$

下估计 I_2：

$$|I_2| = \frac{1}{\pi n} \left| \int_{\delta<|t|<\pi} \right| f(x+t) - f(x) \,|F_n(t)dt|$$

由 $f(x) \in \mathcal{C}[-\pi;\pi]$（使用周期性延拓 (доопределение)），则有 $[-\pi;\pi]$ 有界性，即 $(\exists M>0)(\forall x \in [\pi;\pi]: |f(x)| \leqslant M$，则有

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant |f(x+t)| + |f(x)| \leqslant 2M$$

估计 Fejér 核有

$$\left|\sin^2 \frac{nt}{2}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{2\sin^2 \frac{\delta}{2}}\right|$$

则有

$$|I_2| \leqslant \frac{2M}{\pi} \cdot \frac{1}{2\sin^2 \frac{\delta}{2}} \cdot \frac{1}{n} \int_{\delta<|t|<\pi} dt = \frac{C}{n}, C \in \mathbb{R}$$

则意味着总可以选择 n 使该表达式不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$，则有 $|\sigma_n(x,f) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

定义 1.20 (三角多项式)

三角多项式是 sin 与 cos 的有限线性组合

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

♣

定理 1.13 (Weierstrass 三角多项式逼近定理)

设 $f(x) \in \mathcal{C}[-\pi;\pi]$ 且满足 $f(-\pi) = f(\pi)$，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists T_n(x))(\forall x \in [-\pi;\pi]) : |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$$

其中 $T_n(x)$ 为带 Euler-Fourier 系数的三角多项式

♡

证明 仅需设 $\sigma_n(x,f)$ 为所需三角多项式，则由 Fejér 定理 (1.12) 即有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in [-\pi;\pi]) : |\sigma_n(x,f) - f(x)| < \varepsilon$$

注 $T_n(x)$ 对于每个 ε 单独表示，一般情况下，不可能同时找到所有满足 $\varepsilon > 0$ 的 $T_n(x)$

推论 1.4 (三角函数系闭性)

三角函数系在准 Euclid 空间 $L[-\pi;\pi]$ 上为闭正交系

♡

证明 下分为三步证明

$$(\forall f \in L[-\pi;\pi])(\forall \varepsilon > 0)(\exists T(x)) : \|f(x) - T(x)\|_L = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 dx} < \varepsilon$$

1. 构造分段连续函数 f_1 使得 $\|f - f_1\|_L < \frac{\varepsilon}{3}$，由 f 可积则存在划分 $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi$ 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \underline{S}(f) < \frac{\varepsilon^2}{18M}$$

其中 $\underline{S}(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ 为 Darboux 下和（нижняя сумма Дарбу），则 $m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$

观察函数

$$f_1(x)=\begin{cases} m_k, & x\in(x_{k-1},x_k),k=\overline{1,n} \\ 0, & x=x_k,k=\overline{0,n}\end{cases}$$

则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_1(x)dx=\sum_{k=1}^{n} m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx=\underline{S}(f)$$

则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))\,dx<\frac{\varepsilon^2}{18M}$$

考虑到

$$\|f(x)-f_1(x)\|_L=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))^2\,dx}$$

则估计范数有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))^2\,dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))\left(|f(x)|+|f_1(x)|\right)<\frac{\varepsilon^2}{9}$$

即得 $\|f-f_1\|_L<\dfrac{\varepsilon}{3}$

2. 现构造一个连续函数 $g(x)$ 使得 $\|g-f_1\|_L<\dfrac{\varepsilon}{3}$。设 $g(x)\in\mathcal{C}[-\pi;\pi]$。由定义 $f_1(x)$ 为一组不连通线段，在所有这些线段的末端后退一个充分小的 δ，并将获得的点连接起来，用 $B(x_i)$ 表示前面得到的点 x_i 的邻域，则有

$$\begin{aligned}\|g-f_1\|_L^2&=\int_{-\pi}^{\pi}(g(x)-f_1(x))^2\,\mathrm{d}x\\&=\overbrace{\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x_i)}(g(x)-f_1(x))^2\mathrm{d}x}^{<\frac{\varepsilon^2}{9}}+\overbrace{\int\limits_{[-\pi;\pi]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x_i)}(g(x)-f_1(x))^2\,\mathrm{d}x}^{0}<\frac{\varepsilon^2}{9}\end{aligned}$$

则有 $\|g-f_1\|_L<\dfrac{\varepsilon}{3}$

3. 由 Weierstrass 三角多项式逼近定理 (1.13)，则存在三角多项式 $T_n(x)$ 满足

$$(\forall x\in[-\pi;\pi]):|g(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$$

则有

$$\|g-T_n\|_L^2=\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-T_n(x)|^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{2\pi\cdot 9}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{\varepsilon^2}{9}$$

则有 $\|g-T_n\|_L<\dfrac{\varepsilon}{3}$

结合上述证明与三角不等式则有

$$\|f-T_n\|_L\leqslant\|f-f_1\|_L+\|f_1-g\|_L+\|g-T_n\|_L<\varepsilon$$

即得三角函数系为闭正交系

注 作为推论显然有在 Euclid 空间 $\widehat{\mathrm{C}}[-\pi;\pi]$ 上为闭正交系

注 实际上，在 Lyapunov 等式 (1.7) 处已经得到了更强的结论，这里仅作为 Weierstrass 三角多项式逼近定理 (1.13) 的应用

定理 1.14 (Weierstrass 代数多项式逼近定理)

若 $f \in \mathcal{C}[a;b]$，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A(x))(\forall x \in [a;b]) : |A(x) - f(x)| < \varepsilon$$

其中 $A(x)$ 为代数多项式。

定理又称：代数多项式的连续函数逼近定理 теорема о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами

证明 设 $t = \pi\dfrac{x-a}{b-a}$，则构造了映射 $[a;b] \to [0;\pi]$。这时有

$$x = t\frac{b-a}{\pi} + a, \quad f(x) = f\left(t\frac{b-a}{\pi} + a\right) = \varphi(t)$$

将 $\varphi(t)$ 由 $[0,\pi]$ 均匀地延拓到 $[-\pi;\pi]$，则满足 $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$。则根据 Weierstrass 三角多项式逼近定理 (1.13) 有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists T(t))(\forall t \in [-\pi;\pi]) : |\varphi(t) - T_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

其中 $T(t)$ 为三角多项式

反之，三角多项式 $T(t)$ 可以通过 Taylor 级数的部分和序列 $Q_n(t)$ 任意近似，其为一个代数多项式。令 $|T(t) - Q_n(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，则有

$$|\varphi(t) - Q_n(t)| \leqslant |\varphi(t) - T(t)| + |T(t) - Q_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

由 $t = \pi\dfrac{x-a}{b-a}$，则有一个关于 x 的代数多项式 $Q_n(t) = Q_n\left(\pi\dfrac{x-a}{b-a}\right) = A(x)$。最后对 $f(x)$ 使用映射 $\varphi(t) \mapsto f(x)$ 则得

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in [a;b])(\exists A(x)) : |f(x) - A(x)| < \varepsilon$$

其中 $A(x)$ 为代数多项式

定理 1.15 (Carleson 定理)

（Carleson[a]定理）若函数 f 由 Lebesgue 意义表示积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$，则该函数的 Fourier 三角级数在 $[-\pi;\pi]$ 几乎处处收敛

[a] 里纳特 · 卡尔松 (Lennart Carleson,1928.3.18 -) 瑞典数学家。其主要著作涉及现代分析的各个领域。1992 年因 “其在傅立叶分析、复分析、拟共形映射及动力系统理论方面的基础性贡献” 获得沃尔夫奖，2006 年又因 “其在调和分析和光滑动力系统方面深刻和重大的贡献” 而获得 Abel 奖

注 该定理表明在 $[-\pi;\pi]$ 上 Riemann 可积的函数 f 在 $[-\pi;\pi]$ 上几乎处处收敛。事实上，若函数 f 由 Riemann 意义表示积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$，则其由 Riemann 意义表示积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$。但这时存在由 Lebesgue 意义表示 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$，则 Carleson 定理成立

1.3 Fourier 三角级数一致收敛性

1.3.1 一致收敛性与光滑性

定义 1.21 (分段连续导数)

设函数 f 定义在 $[-\pi;\pi]$ 上，若于该区间所有内点都有 $\exists f'$（允许其中有限数量的点仅有有限左极限或有限右极限，且有 $\lim\limits_{x\to-\pi+0} f'(x), \lim\limits_{x\to\pi-0} f'(x)$），则称函数 f 在 $[-\pi;\pi]$ 上有分段连续导数 (кусочно-непрерывная производная)

若函数 $f^{(n-1)}$ 在该区间上有分段连续函数，则称函数 f 在 $[-\pi;\pi]$ 上有 $n>1$ 阶分段连续导数 (кусочно-непрерывная производная порядка $n>1$)

定理 1.16 (Fourier 三角级数一致收敛充分条件)

设 $f\in\mathcal{C}[-\pi;\pi], f(-\pi)=f(\pi)$，若 f 在 $[-\pi;\pi]$ 上有分段连续导数，则 f 的 Fourier 三角级数在 $[-\pi;\pi]$ 上一致收敛，且函数级数

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|\,|\cos nx|+|b_n|\,|\sin nx|\right)$$

在 $[-\pi;\pi]$ 上一致收敛，其中对于 $k=0,1,\cdots$，系数 a_k 和 b_k 为函数 f 的 Euler-Fourier 系数

证明 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|\cdot|\cos nx|+|b_n|\cdot|\sin nx|\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$$

下证该序列收敛

令 α_n,β_n 为 f' 的 Euler-Fourier 系数（在间断点处进一步定义），则有

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx=\left.\frac{f(x)\cdot\cos nx}{\pi}\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=nb_n$$

同理有 $\beta_n=-na_n$，由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n}$$

由 $\left(|\alpha_n|-\frac{1}{n}\right)^2\geqslant 0$，则有 $\frac{|\alpha_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(|\alpha_n|^2+\frac{1}{n^2}\right)$。显然，数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。此外由 Parseval 等式 (1.4) 有函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2\right)$ 收敛到函数 f' 的范数。则利用前面的估计与函数级数 Weierstrass 强级数判别法，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n}$ 收敛

引理 1.2 (Fourier 三角级数光滑性引理)

设 $f\in C^{(m)}([-\pi;\pi])$，且 $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi), j=0,1,\cdots,m$，且 f 在闭区间 $[-\pi;\pi]$ 上有分段连续的 $m+1$ 阶导数，则有函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^m\left(|a_k|+|b_k|\right)$ 收敛，其中 a_k,b_k 为 f 的 Euler-Fourier 系数

证明 设 α_k,β_k 为 $f^{(m+1)}(x)$ 的 Euler-Fourier 系数，则有

$$|\alpha_k|+|\beta_k|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m+1)}(x)\cos kxdx\right|+\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m+1)}(x)\sin kxdx\right|$$

对右边部分积分 $m+1$ 次，则有

$$|\alpha_k|+|\beta_k|=k^{m+1}\left(|a_k|+|b_k|\right)$$

但这时 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^m\left(|a_k|+|b_k|\right)\equiv\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{k}$，该级数由定理 (1.16) 收敛

定理 1.17 (光滑函数 Fourier 三角级数逐项微分)

设 $f\in C^{(m)}([-\pi;\pi])$，且 $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi), j=0,1,\cdots,m$，且 f 在闭区间 $[-\pi;\pi]$ 上有分段连续的 $m+1$ 阶导数，则该函数的 Fourier 级数可以逐项微分 m 次。此外，m 重微分得到的级数在 $[-\pi;\pi]$ 上一致收敛到对应的导数

证明 微分 f 的 Fourier 级数 s 次，其中 $s=\overline{1,m}$，并用模级数估计

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^s\left(|a_k|\cdot\left|\cos\left(kx+\frac{\pi s}{2}\right)\right|+|b_k|\cdot\left|\sin\left(kx+\frac{\pi s}{2}\right)\right|\right)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k^m\left(|a_k|+|b_k|\right)$$

由引理 (1.2)，该函数级数收敛。由定理 (1.16)，原级数收敛。再利用函数级数逐项微分定理 (??) 即有微分形式的正确性

1.3.2 连续模与 Riemann 局部化原理

注 (Riemann 局部化原理证明)

为了更多地得到关于 Fourier 级数系数的性质与估计，引入连续模的概念，顺便证明重要的 Riemann 局部化原理 (1.19)。实际上，Riemann 局部化原理 (1.19) 也可以利用 Riemann 引理 (1.18) 直接证明。

不过值得一提的是，两种证明都是建立在 Fourier 三角级数部分和 Dirichlet 核表示定理 (1.2) 上的

定义 1.22 (连续模)

设函数 f 在区间 $[-\pi;\pi]$ 上连续，则称

$$\omega(\delta,f)=\sup_{\substack{x',x''\in[-\pi,\pi]\\|x'-x''|<\delta}}\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|=\sup_{\substack{x,h+x\in[-\pi,\pi]\\|h|<\delta}}|f(x+h)-f(x)|$$

为函数 f 在区间 $[-\pi;\pi]$ 上连续模 (модуль непрерывности)

此外，假设函数 f 为 2π 周期的函数且在区间 $[-\pi-\delta;\pi+\delta]$ 上对于某个 δ 有可积性，则称

$$\sup_{\substack{x+h\in[-\pi,\pi]\\|h|<\delta}}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x+h)|dx=\widehat{\omega}(\delta,f)$$

为连续积分模 (интегральный модуль непрерывности) ♣

注 若函数 f 仅在 $[-\pi;\pi]$ 上连续，由 Cantor 定理有函数 f 在 $[-\pi;\pi]$ 上一致连续。又由 $\delta\to0+0$，则其连续模趋于零

然而若没有额外的条件，关于 $\omega(\delta,f)$ 与 $\widehat{\omega}(\delta,f)$ 趋向于零的速率是不知道的

引理 1.3 (连续模收敛基本性质)

设函数 f 为 2π 周期的周期函数且在任意有限闭区间可积，则有 $\lim\limits_{\delta\to0+0}\widehat{\omega}(\delta,f)=0$ ♡

证明 需证

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon))(\forall h)(0<|h|<\delta(\varepsilon)):\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x+h)|dx<\varepsilon$$

利用三角函数系闭性定理 (1.4) 的前两步有 $(\exists g(x)\in\mathcal{C}[-\pi,;\pi]):g(-\pi)=g(\pi)$ 且

$$\|f-g\|_L=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx}<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$$

这时利用三角不等式有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x+h)|dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|dx+\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-g(x+h)|dx+\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+h)-f(x+h)|dx$$

记不等式右部三个积分为 I_1,I_2,I_3，注意到

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-g(x+h)|dx\leqslant\omega(\delta,g)\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi\omega(\delta,g)$$

由于 $g(x)\in\mathcal{C}[-\pi;\pi]$，则由 Cantor 定理有估计 $I_2<\dfrac{\varepsilon}{3}$

对于 I_3 有

$$I_3=\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+h)-f(x+h)|dx=\{y=x+h\}=\int_{-\pi+h}^{\pi+h}|g(y)-f(y)|dy=\int_{-\pi}^{\pi}|g(y)-f(y)|dy$$

因为 f 由条件有 2π 周期，则仍需估计 I_1。利用 Cauchy-Schwarz-Буняковского 不等式（令 $u(x)=|f(x)-g(x)|$，$v(x)=1$），有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|dx\leqslant\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx}\cdot\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx}=\frac{\varepsilon}{3}$$

综上则有 $I_1+I_2+I_3<\varepsilon$，所需即证

引理 1.4 (连续模一致收敛基本性质)

设 f 与 g 为 2π 周期的周期函数且在任意有限闭区间上可积，并设 x 为任意点，函数 $F_x(t)=f(x+t)g(t)$ 以 x 为参数，则函数 F 的连续积分模关于 x 在 $[-\pi;\pi]$ 上当 $\delta\to 0+0$ 一致收敛到 0，即

$$\widehat{\omega}(\delta,F)\underset{\delta\to 0^+}{\overset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows}}0$$

证明 首先，估计 $\hat{\omega}(\delta,F)$ 中包含的差的模 $|F_x(t+h)-F_x(t)|$

$$\begin{aligned}|F_x(t+h)-F_x(t)|&=|f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t)|\\&=|f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t+h)+f(x+t)g(t+h)-f(x+t)g(t)|\\&\leqslant|g(t+h)|\cdot|f(x+t+h)-f(x+t)|+|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|\end{aligned}$$

由 f 与 g 可积性有有界性，则有 $|g(t+h)|,|f(x+t)|\leqslant M$ 。又注意到

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)-f(x+t)|dt=\{y=x+t\}\\=&\int_{-\pi+t}^{\pi+t}|f(y+h)-f(y)|dy=\int_{-\pi}^{\pi}|f(y+h)-f(y)|dy\end{aligned}$$

这时对 $\forall x$ 满足

$$\widehat{\omega}(\delta,F)=\sup_{\substack{t,t+h\in[-\pi,\pi]\\|h|<\delta}}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t+h)-F(t)|dt\leqslant M\widehat{\omega}(\delta,f)+M\widehat{\omega}(\delta,g)$$

而由引理1.3（f 与 g 跟 x 无关）$\widehat{\omega}(\delta,f)\underset{\delta\to 0+0}{\longrightarrow}0$ 且 $\widehat{\omega}(\delta,g)\underset{\delta\to 0+0}{\longrightarrow}0$

引理 1.5 (连续模 Fourier 级数估计)

设 f 为 2π 周期的周期函数且在任意有限闭区间上可积，则其 Fourier 级数满足不等式

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\leqslant\frac{1}{2\pi}\widehat{\omega}\left(\frac{\pi}{n},f\right)$$

证明 由 Euler 公式有 $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ ，特别有 $e^{i\pi}=-1$。这时观察 a_n+ib_n，则有

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt+\frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{int}dt}_{I_1}=\left\{t=y+\frac{\pi}{n}\right\}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}f\left(y+\frac{\pi}{n}\right)e^{iny}dy=\underbrace{-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(y+\frac{\pi}{n}\right)e^{iny}dy}_{I_2}$$

其中 $e^{int}=e^{in(y+\frac{\pi}{n})}=e^{iny}\cdot e^{i\pi}=e^{iny}$，因为 f 由条件有 2π 周期，且 e^{iny} 根据 Euler 公式也有 2π 周期

将 a_n+ib_n 表示为 I_1 与 I_2 的和的一半，因为 $a_n+ib_n=I_1=I_2\Rightarrow a_n+ib_n=\frac{I_1+I_2}{2}$

$$a_n+ib_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}\left(f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right)dt$$

则有

$$|a_n + ib_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{int}\right| \cdot \left|f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right| dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\widehat{\omega}\left(\frac{\pi}{n}, f\right)$$

其中最后一步不等式由 $\left|e^{int}\right| = 1$ 得到

注 该引理指出 $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$，$|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$，则该引理的不等式给出了 Fourier 级数系数的估计值

注 证明过程仅使用了 Euler 公式的形式，实际上可以去掉

推论 1.5 (含参 Fourier 三角级数一致收敛第一类充分条件)

设函数 f 为 2π 周期的周期函数，且在任意有限闭区间上可积，$g(t)$ 在 $[-\pi;\pi]$ 上可积，则函数 $F_x(t) = f(x+t)g(t)$ 的 Fourier 三角级数的 Euler-Fourier 系数

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos nt dt, \quad b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin nt dt$$

当 $n \to \infty$ 时关于 x 在 $[-\pi;\pi]$ 上一致收敛到 0

证明 将 g 的 2π 周期的周期性延拓到整个数轴，则由引理 (1.4) 有 $\widehat{\omega}(\delta, F) \underset{\delta\to 0^+}{\overset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows}} 0$，而由引理 (1.5) 则有

$$\sqrt{a_n^2(x) + b_n^2(x)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\widehat{\omega}\left(\frac{\pi}{n}, F\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

注意到 $|a_n(x)|, |b_n(x)| \leqslant \sqrt{a_n^2(x) + b_n^2(x)}$，则所需即证

推论 1.6 (含参 Fourier 三角级数一致收敛第二类充分条件)

设函数 f 为 2π 周期的周期函数，且在任意有限闭区间上可积，$g(t)$ 在 $[-\pi;\pi]$ 上可积，则

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin t\left(n + \frac{1}{2}\right) dt \underset{\delta\to 0^+}{\overset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows}} 0$$

证明 显然有

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t = \sin\frac{t}{2}\cos nt + \cos\frac{t}{2}\sin nt$$

则有

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt dt$$

考虑将推论 (1.5) 应用于这些积分，将第一个积分中函数 $g(t)\cdot\sin\frac{t}{2}$ 作为 $g(t)$，并将第二个积分中函数 $g(t)\cdot\cos\frac{t}{2}$ 作为 $g(t)$ 即可

推论 1.7 (含参 Fourier 三角级数一致收敛充分条件)

设函数 f 为 2π 周期的周期函数，且在任意有限闭区间上可积，而 δ 为满足 $0 < \delta < \pi$ 的固定数，且有

$$\widehat{c}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

$$c_n^+(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant t\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

$$c_n^-(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\leqslant t\leqslant -\delta} f(x+t)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

则函数序列 $\widehat{c}_n(x), c_n^+(x), c_n^-(x)$ 当 $n \to \infty$ 时关于 x 在 $[-\pi;\pi]$ 上一致收敛到 0

证明 由推论 (1.6)，则对函数序列 $\widehat{c}_n(x)$ 引入函数 $g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \delta \leqslant |t| \leqslant \pi, \\ 0, & |t| < \delta \end{cases}$

对函数序列 $c_n^+(x)$ 引入函数 $g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \delta\leqslant t\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant t<\delta.\end{cases}$

对函数序列 $c_n^-(x)$ 引入函数 $g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & -\pi\leqslant t\leqslant-\delta\\ 0, & -\delta<t\leqslant\pi.\end{cases}$

则由这些函数均在 $[-\pi;\pi]$ 上可积即证

定理 1.18 (Riemann 引理)

设 $g(x)$ 为周期 2π 的周期函数，且 $(\exists\delta>0)(x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)):g(x)=0$，则函数 $g(x)$ 的 Fourier 级数固定点 x_0 处收敛到零

证明 设函数 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 由等式 $2f_1(y)=g\left(x_0+y\right)\cot\dfrac{y}{2}$ 和 $f_2(y)=\dfrac{1}{2}g\left(x_0+y\right)$ 定义。由函数 $\cot\dfrac{y}{2}$ 在任何形如 $y=2k\pi$（k 为整数）的点的 δ 邻域之外连续，而函数 $g\left(x_0+y\right)$ 在此邻域内为零，则 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 都为周期 2π 的周期函数。因此则有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(x_0+y\right)D_n(y)dy&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}g\left(x_0+y\right)\cot\frac{y}{2}\sin nydy+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}g_0(x+y)\cos nydy\\&=b_n\left(f_1\right)+a_n\left(f_2\right)\end{aligned}$$

其中 $b_n\left(f_1\right)$ 和 $a_n\left(f_2\right)$ 分别为函数 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 的 Euler-Fourier 系数。由于对这两个函数有 Parseval 等式 (1.4)，则当 $n\to\infty$ 时 $b_n\left(f_1\right)\to 0, a_n\left(f_2\right)\to 0$，由此则由 Fourier 三角级数部分和 Dirichlet 核表示定理 (1.2) 即有函数 $g(x)$ 的 Fourier 级数在固定点 x_0 处收敛到零

定理 1.19 (Riemann 局部化原理/принцип локализации Римана)

设函数 f 为 2π 周期的周期函数，且在任意有限闭区间上可积，则 Fourier 三角级数在固定点 x 处收敛性仅取决于其参数在该点的任意小的 δ 邻域 $\mathrm{U}_\delta(x)$ 中的值

证明 [证明一：利用含参 Fourier 三角级数一致收敛充分条件 (1.7)] 由 Fourier 三角级数部分和 Dirichlet 核表示定理 (1.2)，即有 Fourier 三角级数 n 阶部分和

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)D_n(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}f(x+t)D_n(t)dt$$

注意到，第一个积分的收敛性仅取决于 $\mathrm{U}_\delta(x)$ 的参数 f 的值，第二个积分根据推论 (1.7) 当 $n\to\infty$ 时趋近于零，定理得证

证明 [证明二：利用 Riemann 引理 (1.18] 定理等价于若函数 g 的 Fourier 三角级数部分和在点 x_0 处的值收敛到数 α，而函数 h 与 g 在点 x_0 的某 δ 邻域中重合，则当 $n\to\infty$ 亦有函数 h 的 Fourier 三角级数的部分和在点 x_0 处的值收敛到数 α

考虑差 $r(x)=f(x)-h(x)$ 也为周期 2π 的周期函数，由对于一切 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有 $r(x)=0$，则函数 $r(x)$ 在点 x_0 处满足 Riemann 引理 (1.18)，则当 $n\to\infty$ 时有

$$S_n(x_0,r)=S_n(x_0,g)-S_n(x_0,h)\to 0$$

而由于当 $n\to\infty$ 时 $S_n(x_0,g)\to\alpha$，则当 $n\to\infty$ 时 $S_n(x_0,h)\to\alpha$，定理得证

1.3.3 Hölder 类与 Dini-Lipschitz 类

定义 1.23 (Hölder 类)

设函数 $f \in \mathcal{C}[-\pi;\pi]$，若 $\omega(\delta, f) = \underline{O}(\delta^\alpha)$，亦即

$$(\exists M > 0)(\exists \delta > 0): \sup_{|x_1 - x_2| < \delta} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M\delta^\alpha$$

则称函数属于 α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ 阶 Hölder 类 (класс Гёльдера с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$)，记为 $f \in \mathcal{C}^\alpha[-\pi;\pi]$。特别地，当 $\delta \to 0+0$ 时有 $\omega(\delta, f) = \bar{o}(1)$

注 (Hölder 类)

若 f 有有界导数，亦即 $(\exists M > 0): |f'(x)| \leqslant M$，则由 Lagrange 有限增量定理有 $|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''| \leqslant M\delta$，则在考虑区间上有 $f(x) \in \mathcal{C}^1$

定理 1.20 (Hölder 类 Fourier 三角级数一致收敛充分条件)

设 $f \in \mathcal{C}^\alpha[-\pi, \pi]$ 且 $f(-\pi) = f(\pi)$，则 $S_n(x, f) \underset{n\to\infty}{\overset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows}} f(x)$

证明 记 $M = \sup\limits_{|x'-x''|<\delta} \dfrac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}$，则将 2π 周期的函数 f 延拓到 $\mathbb{R}$，则有 $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R})$。这时有估计

$$S_n(x, f) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \leqslant$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt + \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) D_n(t) dt + \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x) D_n(t) dt = I_1 + I_2 + I_3$$

其中积分 I_2 和 I_3 由推论 (1.7) 当 $n \to \infty$ 时收敛到 0，即有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall x \in [-\pi;\pi]): \left[\left(|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}\right) \wedge \left(|I_3| < \frac{\varepsilon}{3}\right)\right]$$

而对于 I_1 有估计

$$|I_1| \leqslant M \int_{-\delta}^{\delta} |t|^\alpha |D_n(t)| dt \leqslant M \int_{-\delta}^{\delta} |t|^\alpha \frac{\pi}{2\pi|t|} dt \leqslant \frac{M}{2} \int_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha-1} dt = M\frac{\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$$

则有 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall x \in [-\pi;\pi]): |S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon$

注 称 $M = \sup\limits_{|x'-x''|<\delta} \dfrac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}$ 为 Hölder 常数 (константа Гёльдера)

定理 1.21

设 $f \in \mathcal{C}^\alpha[a;b]$ 其中 $[a;b] \subset [-\pi;\pi]$，则 $S_n(x, f) \underset{n\to\infty}{\overset{[a+\delta, b-\delta]}{\rightrightarrows}} f(x)$，其中 $\delta \in \left[0; \dfrac{b-a}{2}\right]$

定义 1.24 (分段 Hölder 条件)

若 $[-\pi;\pi] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}; x_k]$ 且函数 $f \in \mathcal{C}^{\alpha_k}[x_{k-1}; x_k]$，则称函数在 $[-\pi;\pi]$ 上分段 Hölder (或称满足分段 Hölder 条件)。即在每个区间段 $[x_{k-1}; x_k]$ 函数属于 α_k 阶 Hölder 类

命题 1.5 (分段 Hölder 条件)

若 f 在 $\mathbb{R}$ 上分段 Hölder，则下列命题成立：

1) 在任意有限区间段上 $S_n(x, f)$ 平均收敛到 f (由三角系闭性)

2) $(\forall x_0 \in \mathbb{R}): S_n(x_0, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{f}(x_0)$

3) 在所有满足 Hölder 条件的所有区间段上有 $S_n(x, f) \overset{[x_{k-1}; x_k]}{\rightrightarrows} f(x)$

定义 1.25 (Dini-Lipschitz 类)

若连续函数 f 满足当 $\delta \to 0+0$ 时有

$$\omega(\delta, f) = \bar{o}\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}\right)$$

亦即

$$\lim_{\delta\to 0+0} \omega(\delta, f) \cdot \ln\frac{1}{\delta} = 0$$

则称连续函数 f 属于 $[-\pi;\pi]$ 上 Dini-Lipschitz 类 (классу Дини-Липшица)

注 (Dini-Lipschitz 类)

Dini-Lipschitz 类的概念为 Hölder 类的推广，则若 $f \in \mathcal{C}^{\alpha}[-\pi;\pi]$，即有

$$0 \leqslant \omega(\delta, f)\ln\frac{1}{\delta} \leqslant M\delta^{\alpha}\ln\frac{1}{\delta} \underset{\delta\to 0+0}{\longrightarrow} 0$$

定理 1.22 (Dini-Lipschitz 定理/Dini-Lipschitz 类 Fourier 三角级数一致收敛充分条件)

设 $f \in \mathcal{C}[-\pi;\pi], f(-\pi) = f(\pi)$ 且 f 属于 $[-\pi;\pi]$ 上 Dini-Lipschitz 类，则 $S_n(x, f) \underset{n\to\infty}{\overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows}} f(x)$

注 该定理的条件对于利用 $\omega(\delta, f)$ 来判定一致收敛是最终的，即（在 $L[-\pi;\pi]$ 上）没有这样的函数不属于 $[-\pi;\pi]$ 上 Dini-Lipschitz 类，但却一致收敛

注 从定义可以看出 Dini-Lipschitz 类包含了相对于上述对数无穷小的函数，但若函数至少与这个对数相当，则该定理不成立。特别地，有作为例子的函数 f 指出，当 $\delta \to 0+0$ 时有 $\omega(\delta, f) = \underline{O}\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}\right)$ 且其 Fourier 三角级数在处处稠密集 $[-\pi;\pi]$ 上发散

1.4 Fourier 三角级数逐点收敛性

1.4.1 Hölder 条件与 Lipschitz 条件

定义 1.26 (Hölder 条件)

若函数 f 对指数 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$ 在点 x 满足下列条件：

$1)\exists f(x+0) < \infty$

$2)(\exists M, \delta > 0)(\forall t)(0 < t < \delta) : |f(x+t) - f(x+0)| \leqslant M \cdot |t|^{\alpha}$

则称函数在点 x 右侧满足 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件 (условие Гёльдера)（或称满足右侧 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件）

对称地，若函数 f 对指数 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$ 在点 x 满足下列条件：

$1)\exists f(x-0) < \infty$

$2)(\exists M, \delta > 0)(\forall t)(-\delta < t < 0) : |f(x+t) - f(x-0)| \leqslant M \cdot |t|^{\alpha}$

则称函数在点 x 左侧满足 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件（或称满足左侧 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件）

定理 1.23 (Fourier 三角级数逐点收敛 Hölder 条件判别法)

设函数 f 为 2π 周期的周期函数，且在任意有限闭区间上可积，若 f 在点 x_0 右侧满足 $\alpha_1(0 < \alpha_1 \leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件且在点 x_0 左侧满足 $\alpha_2(0 < \alpha_2 \leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件，则其 Fourier 三角级数在点 x_0 处收敛到

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

证明 对于 Fourier 三角级数部分和与所需极限估计差得

$$S_n(f,x_0)-\widetilde{f}(x_0)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+t)\,D_n(t)dt-\widetilde{f}(x_0)\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt$$

$$=\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}\left(f(x_0+t)-\widetilde{f}(x_0)\right)D_n(t)dt}_{I_1}+\underbrace{\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}f(x_0+t)\,D_n(t)dt}_{I_2}-\underbrace{\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\widetilde{f}(x_0)\,D_n(t)dt}_{I_3}$$

则由推论 (1.7) 有 $I_2=\widehat{c}_n(x_0)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0; I_3\sim\widehat{c}_n(x_0)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$，则有估计

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N):\left(|I_2|<\frac{\varepsilon}{3}\right)\wedge\left(|I_3|<\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

下估计 I_1 有

$$l_1=\int_{-\delta}^{\delta}\left(f(x_0+t)-\widetilde{f}(x_0)\right)D_n(t)dt=$$

$$=\int_{-\delta}^{\delta}f(x_0+t)\,D_n(t)dt-\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}D_n(t)dt$$

其中 Dirichlet 核满足 $D_n(t)=D_n(-t)$，则有

$$\int_{-\delta}^{\delta}D_n(t)dt=2\int_{-\delta}^{0}D_n(t)dt=2\int_{0}^{\delta}D_n(t)dt$$

则有

$$l_1=\int_{-\delta}^{0}\left(f(x_0+t)-f(x_0-0)\right)D_n(t)dt+\int_{0}^{\delta}\left(f(x_0+t)-f(x_0+0)\right)D_n(t)dt$$

估计 Dirichlet 核，由当 $t\in(0;\pi)$ 时 $\sin\frac{t}{2}\geqslant\frac{t}{\pi}$，则有

$$|D_n(t)|=\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\pi\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\leqslant\frac{\pi}{2|t|\pi}$$

另外，由 f 在点 x_0 右侧满足 $\alpha_1(0<\alpha_1\leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件且在点 x_0 左侧满足 $\alpha_2(0<\alpha_2\leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件有

$$(\exists M_1,\delta_1>0)(\forall t)(0<t<\delta_1):|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqslant M_1t^{\alpha_1}$$
$$(\exists M_2,\delta_2>0)(\forall t)(-\delta_2<t<0):|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\leqslant M_2|t|^{\alpha_2}$$

下设 $M=\max\{M_1,M_2\},\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 且 $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$，则有

$$(\forall t)(0<t<\delta):|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqslant Mt^{\alpha}$$
$$(\forall t)(-\delta<t<0):|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\leqslant M|t|^{\alpha}$$

因此使用 Dirichlet 核的估计与 Hölder 条件估计 I_1 得

$$I_1\leqslant M\int_{-\delta}^{0}|t|^{\alpha}\frac{\pi}{2\pi|t|}dt+M\int_{0}^{\delta}t^{\alpha}\frac{\pi}{2\pi t}dt=M\int_{0}^{\delta}t^{\alpha-1}dt=M\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}$$

则有

$$\left|S_n(f,x_0)-\widetilde{f}(x_0)\right|\leqslant|I_1|+|I_2|+|I_3|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

定理即证

注 （Fourier 三角级数与收敛和偏差估计）下记

$$\begin{aligned}
r_n = S_n(x,f) - f(x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0+y) - f(x_0)) D_n(y)dy \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(f(x_0+y) + f(x_0-y) - 2f(x_0)) D_n(y)dy \\
&= 2\int_0^{\pi} \varphi(y) D_n(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(y)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(y)\left(\cot\frac{y}{2}\sin ny + \cos ny\right)dy
\end{aligned}$$

其中 $\varphi(y) = \dfrac{1}{2}(f(x_0+y) + f(x_0-y) - 2f(x_0))$ 并作为 y 的函数，$\varphi(y)$ 为 2π 周期的周期函数，$\varphi(0) = 0$ 且函数 $\varphi(y)$ 在点 $y = 0$ 处连续

定理 1.24 (Fourier 三角级数逐点收敛 Dini 判别法)

设对某 $\delta > 0$，存在第二类反常积分

$$B_\delta = \int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy$$

则函数 f 的 Fourier 三角级数部分和 $S_n(x,f)$ 在点 $x = x_0$ 处收敛到值 $f(x_0)$ ♡

证明 不妨设 $0 < \delta < \pi$，由积分

$$B_\delta = \int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy$$

收敛，则有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists h = h(\varepsilon) > 0) : B_h = \int_0^h \frac{|\varphi(y)|}{y}dy < \varepsilon$$

从对偏差 $r_n = S_n(x,f) - f(x_0)$ 估计的积分表示中得等式 $r_n = r_{n1} + r_{n2} + r_{n3}$，其中

$$\begin{aligned}
r_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(y)\left(\cot\frac{y}{2}\sin ny + \cos ny\right)dy \\
r_{n1} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{h} \varphi(y)\cot\frac{y}{2}\sin ny dy \\
r_{n2} &= \frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} \varphi(y)\cot\frac{y}{2}\sin ny dy \\
r_{n3} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(y)\cos ny dy
\end{aligned}$$

由推论 (1.7)，当 $n \to \infty$ 时有 $r_{n2} \to 0$ 和 $r_{n3} \to 0$，则对于一切足够大的 n 有 $|r_{n2}| < \varepsilon$ 和 $|r_{n3}| < \varepsilon$。而对于 r_{n1}，注意到若 $0 < y < h < \pi$ 则有 $\sin\dfrac{y}{2} \geqslant \dfrac{y}{\pi}$ 有

$$|\varphi(y)|\frac{\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}} \leqslant \frac{\pi|\varphi(y)|}{y}$$

则有

$$|r_{n1}| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^h \varphi(y)\cot\frac{y}{2}\sin ny dy\right| \leqslant \int_0^h \frac{|\varphi(y)|}{y}dy < \varepsilon$$

因此 $(\forall n > n_0(\varepsilon)) : |r_n| < 3\varepsilon$。由数 $\varepsilon > 0$ 的任意性，则当 $n \to \infty$ 时有 $r_n \to 0$，即在点 x_0 处 Fourier 三角级数收敛到值 $f(x_0)$

定义 1.27 (Lipschitz 条件)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 某 δ 邻域中满足

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant L|x-x_0|^{\alpha}$$

其中 $L>0$ 为某个常数。则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 α 阶 Lipschitz 条件。特别地，当 $\alpha=1$，简称为 Lipschitz 条件

当此条件在闭区间 $[x_0,x_1]$ 的一切点处都成立时，称函数 $f(x)$ 属于 Lipschitzα 类，称 L 为 Lipschitz 常数。♣

定理 1.25 (Fourier 三角级数逐点收敛 Lipschitz 条件判别法)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 α 阶 Lipschitz 条件，则其 Fourier 三角级数在此点收敛到 $f(x_0)$ ♡

证明 实际上，当 $|y|<\delta$ 时有

$$|\varphi(y)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f(x_0+y)-f(x_0)|+|f(x_0-y)-g(x_0)|\right) \leqslant L|y|^{\alpha}$$

由此得

$$B_\delta=\int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy \leqslant L\int_0^\delta y^{\alpha-1}dy=\frac{L}{\alpha}\delta^\alpha<+\infty$$

则 Fourier 三角级数逐点收敛 Dini 判别法 (1.24) 条件成立，则函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛到 $f(x_0)$

1.4.2 Jordan 判别法与 Dirichlet 判别法

引理 1.6

记 $H_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\cos 2\pi kx=1+2\cos 2\pi x+\cdots+2\cos 2\pi nx$，则当 $0<\delta\leqslant\frac{1}{2}$ 时满足

$$\left|\int_\delta^{\frac{1}{2}} H_n(x)dx\right|=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} H_n(x)dx\right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1+(2n+1)^2\sin^2\pi\delta}}$$

♡

证明 函数 $H_n(x)$ 以 1 为周期且为偶函数，则有

$$\int_\delta^{\frac{1}{2}} H_n(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} H_n(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} H_n(x)dx=A$$

令 $a=\pi(2n+1)$，则有

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\frac{\sin ax}{\sin\pi x}dx=-\frac{1}{a}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\frac{d\cos ax}{\sin\pi x}=-\frac{1}{a}\left(\frac{\cos ax}{\sin\pi x}\Big|_{\frac{2}{3}}^{1-\delta}-\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\cos ax d\left(\frac{1}{\sin\pi x}\right)\right)$$

由函数 $\sin\pi x$ 在积分区间上单调递减，则函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}$ 在积分区间上单调递增，则 $\varphi'(x)>0$。此外有 $|\cos ax|\leqslant 1$ 且当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时 $\cos ax=\cos\dfrac{\pi}{2}(2n+1)=0$，则有

$$\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\cos ax d\left(\frac{1}{\sin\pi x}\right)\right|=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\cos ax\varphi'(x)dx\right| \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\varphi'(x)dx=\frac{1}{\sin\pi\delta}-1$$

再考虑到

$$\left|\frac{\cos ax}{\sin\pi x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\pi\delta}$$

则有

$$|A| \leqslant \frac{2}{a\sin\pi\delta}$$

另外，由函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0;\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减且 $\pi\delta<\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$\frac{\sin\pi\delta}{\pi\delta}\geqslant\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi},\frac{\pi\delta}{\sin\pi\delta}\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sin\pi\delta}\leqslant\frac{1}{2\delta}$$

进而有

$$|A|\leqslant\frac{2}{a2\delta}=\frac{1}{a\delta}=\frac{1}{\pi(2n+1)\delta}$$

现若 $\dfrac{1}{(2n+1)\pi}\leqslant\delta\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 $|A|\leqslant 1$，而若 $0<\delta<\dfrac{1}{(2n+1)\pi}$，则由 $|T_n(x)|\leqslant 2n+1$ 有

$$|A|=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}T_n(x)dx\right|=\left|\frac{1}{2}-\int_0^{\delta}T_n(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{2}+\delta(2n+1)<\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}<1$$

于是利用对于任意的 $x>0$ 和 $y>0$ 成立明显的不等式

$$\min\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)<\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

得到估计式

$$|A|<\min\left(1,\frac{2}{a\sin\pi\delta}\right)\leqslant\frac{4}{\sqrt{1+a^2\sin^2\pi\delta}}$$

引理即证

定理 1.26 (Fourier 三角级数逐点收敛 Jordan 判别法)

设函数 $f(x)$ 为 2π 周期的周期函数，$0<\delta<\pi$，若在点 x_0 的 δ 邻域内函数 $f(x)$ 有界变差，则 $f(x)$ 的 Fourier 三角级数在点 x_0 处收敛到 $f(x_0)$

证明 由 $\varphi(y)$ 为有界变差函数，则可将其表示为 $\varphi(y)=\varphi_1(y)-\varphi_2(y)$，其中 $\varphi_1(y)$ 和 $\varphi_2(y)$ 都为不减非负函数。可认为 $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$ 且函数 $\varphi_1(y)$ 和 $\varphi_2(y)$ 皆在点 $y=0$ 处连续。实际上，单调函数在每点处都有单侧极限。于是在点 $y=0$ 处两个函数的右极限相同，从每个函数都减掉这个公共的极限值，即得两个新的函数，只需把它们在 $y=0$ 处的值取成零即可满足上述一切条件。因此有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists h=h(\varepsilon)>0):[(0\leqslant\varphi_1(h)<\varepsilon)\wedge(0\leqslant\varphi_2(h)<\varepsilon)]$$

另外，可以认为 $h<\delta$

对于函数 $g(x)$ 的 Fourier 三角级数在点 x_0 处的余项成立表达式

$$r_n=2\int_0^{\pi}\varphi(y)D_n(y)dy=r_{n1}+r_{n2}$$

其中

$$r_{n1}=2\int_0^{h}\varphi(y)D_n(y)dy,r_{n2}=2\int_h^{\pi}\varphi(y)D_n(y)dy$$

不失一般性，可设 $\varphi(y)=\varphi_1\langle y)$，即 $\varphi(y)$ 为不减非负函数。由引理 (1.6) ，当 $n\to\infty$ 时 $r_{n2}\to 0$，因此仅需证 $|r_{nI}|<c\varepsilon$，其中 $c>0$ 为常数

注意到 $0\leqslant\varphi(h)<\varepsilon$，则对积分 r_{n1} 使用第二中值定理得

$$r_{n1}=2\varphi(h)\int_{\xi}^{h}D_n(y)dy=4\pi\varphi(h)\int_{\frac{\xi}{2\pi}}^{\frac{h}{2\pi}}H_n(x)dx$$

其中函数 $H_n(x)$ 在引理 (1.6) 中定义 ($H_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\cos 2\pi kx=1+2\cos 2\pi x+\cdots+2\cos 2\pi nx$)。由 $0<\delta<\pi$，则 $0<\dfrac{h}{2\pi}\leqslant\dfrac{\delta}{2\pi}<\dfrac{1}{2}$。因此使用引理 (1.6) 估计最后一个积分得 $|r_{n1}|\leqslant 2\varphi(h)\cdot 4<8\varepsilon$，定理即证

定理 1.27 (Fourier 三角级数逐点收敛 Dirichlet 判别法)

设严格正则函数 $f(x)$ 为 2π 周期的周期函数，若 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi;\pi]$ 上分段单调，则其 Fourier 三角级数处处收敛到 $f(x)$

♡

注 函数 $f(x)$ 分段单调性指，整个闭区间 $[-\pi;\pi]$ 可分成有限个小区间，函数在每个这样的小区间内部单调。特别地，逐段单调的有界函数为有界变差函数，因此该判别法为 Jordan 判别法 (1.26) 的直接推论

第 2 章 Fourier 积分与 Fourier 变换

2.1 基本概念

定义 2.1 ($L_1(\mathbb{R})$ 类)

若函数 f 满足下列条件：

1)f 在任意有限区间上 Riemann 可积

2) 反常积分

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$$

收敛

则称 f 属于 $L_1(\mathbb{R})$ 类

♣

例题 2.1 $L_1(\mathbb{R})$ 类函数示例：

$$f(x)=e^{-|x|}\in L_1(\mathbb{R}),\ f(x)=e^{-x^2}\in L_1(\mathbb{R}),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & |x|>1,\\ 0, & |x|\leqslant 1\end{cases}\in L_1(\mathbb{R})$$

定理 2.1 (Fourier 像基本引理/основная лемма об образе Фурье)

若 $f\in L_1(\mathbb{R})$，则反常积分

$$\widehat{f}(y)=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}f(x)dx$$

收敛，称为 Fourier 像或 Fourier 变换，其中 $\widehat{f}(y)$ 在 $\forall y\in\mathbb{R}$ 上连续且 $\exists \lim\limits_{|y|\to\infty}|\widehat{f}(y)|=0$

♡

证明 收敛性：由 $\left|e^{iyx}\right|=1$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{iyx}f(x)\right|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\to$$

由条件 $f\in L_1(\mathbb{R})$，则由 Weierstrass 比较判别法有 $\hat{f}(y)$ 收敛

连续性：固定 $\forall\varepsilon>0$ 和 $\forall y\in\mathbb{R}$，只需证明

$$(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall\Delta y:|\Delta y|<\delta):|\widehat{f}(y+\Delta y)-\widehat{f}(y)|<\varepsilon$$

即可

考虑差

$$|\widehat{f}(y+\Delta y)-\widehat{f}(y)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ix(y+\Delta y)}-e^{ixy}\right)f(x)dx\right|$$

由于积分 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx$ 在固定的 $\varepsilon>0$ 上的收敛性，则 $(\exists A\in\mathbb{R})$ 有

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|dx+\int_{A}^{+\infty}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.1}$$

注意到

$$(\forall x)(\forall y)(\forall\Delta y):\left|e^{ix(y+\Delta y)}-e^{ixy}\right|\leqslant\left|e^{ix(y+\Delta y)}\right|+\left|e^{ixy}\right|=2$$

固定闭区间 $[c;d]$ 且满足 $y,y+\Delta y\in[c;d]$。由 $e^{ixy}\in\mathcal{C}([-A;A]\times[c;d])$，由 Contor 定理，该函数在该集合上也一致连续，则由一致连续定义有

$$(\exists\delta(\varepsilon))(\forall|\Delta y|)(|\Delta y|<\delta):\left|e^{ix(y+\Delta y)}-e^{ixy}\right|<\frac{\varepsilon}{3M}$$

则有

$$\left|\int_{-A}^{A}\left(e^{ix(y+\Delta y)}-e^{ixy}\right)f(x)dx\right|\leqslant\int_{-A}^{A}\left|e^{ix(y+\Delta y)}-e^{ixy}\right|\cdot|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3M}\cdot M=\frac{\varepsilon}{3}$$

极限存在性：由定义有

$$\lim_{|y|\to\infty}|\widehat{f}(y)|=0\Longleftrightarrow\left[(\forall\varepsilon>0)(\exists B(\varepsilon))(\forall|y|\geqslant B):|\widehat{f}(y)|<\varepsilon\right]$$

固定 $\varepsilon>0$，并且取从不等式 (2.1) 成立时的 A。将其中的被积函数乘上 $\left|e^{ixy}\right|=1$，则有

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{3}&>\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|dx+\int_{A}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{-A}\left|e^{ixy}\right||f(x)|dx+\int_{A}^{+\infty}\left|e^{ixy}\right||f(x)|dx\\&\geqslant\left|\int_{-\infty}^{-A}e^{ixy}f(x)dx\right|+\left|\int_{A}^{+\infty}e^{ixy}f(x)dx\right|\end{aligned}$$

因此仅需证

$$(\exists B(\varepsilon))(\forall y:|y|\geqslant B(\varepsilon)):\left|\int_{-A}^{A}e^{ixy}f(x)dx\right|<\frac{2\varepsilon}{3}$$

由 $f\in L_1(\mathbb{R})$，则 $f\in\mathcal{R}[-A;A]$，则根据 Darboux 理论有对于任意固定 $\varepsilon>0$ 存在 $[-A;A]$ 的划分 $\tau:-A=x_0<x_1<\cdots<x_n=A$ 满足

$$0\leqslant\overline{S}_\tau-\int_{-A}^{A}f(x)dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

观察函数 $f_\tau(x)=\begin{cases}M_k, & x\in(x_{k-1},x_k),\\0, & x=x_k,\end{cases}$，其中 $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1};x_k]}f(x)$，对于该函数满足

$$\int_{-A}^{A}f_\tau(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}M_kdx=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k=\overline{S}_\tau$$

现考虑

$$\left|\int_{-A}^{A}e^{ixy}f(x)dx\right|=\left|\int_{-A}^{A}e^{ixy}\left(f(x)-f_\tau(x)\right)dx+\int_{-A}^{A}e^{ixy}f_\tau(x)dx\right|\tag{2.2}$$

注意到

$$\int_{-A}^{A}\left(f_\tau(x)-f(x)\right)dx=\overline{S_\tau}-\int_{-A}^{A}f(x)dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

并且由除有限数量的点 x_k（由 $f_\tau(x)$ 定义）$f_\tau(x)-f(x)\geqslant 0$，则有

$$\int_{-A}^{A}\left|f_\tau(x)-f(x)\right|dx=\int_{-A}^{A}\left(f_\tau(x)-f(x)\right)dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

由 $f\in L_1(\mathbb{R})$，则 $f\in\Re[-A;A]$，则从 Darboux 理论可知，对于任意固定的 $\varepsilon>0$ 都有一个闭区间 $[-A;A]$ 的划分 $\tau:-A=x_0<x_1<\cdots<x_n=A$ 满足

$$0\leqslant\overline{S}_\tau-\int_{-A}^{A}f(x)dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

观察函数 $f_\tau(x)=\begin{cases}M_k, & x\in(x_{k-1};x_k)\\0, & x=x_k\end{cases}$，其中 $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1};x_k]}f(x)$，对于该函数满足

$$\int_{-A}^{A}f_\tau(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}M_kdx=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k=\overline{S}_\tau$$

回到式 (2.2) 则有

$$\left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)dx\right| \leqslant \int_{-A}^{A} \underbrace{\left|e^{ixy}\right|}_{=1} \cdot |f(x)-f_\tau(x)|\, dx + \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f_\tau(x)dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{k=1}^{n} M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot \left|\frac{e^{ixy}}{iy}\right|_{x_{k-1}}^{x_k}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^{n} \Big| M_k \Big| \cdot 2\frac{1}{|y|} < \frac{2\varepsilon}{3}$$

由 $|y| \geqslant B(\varepsilon)$，则可取足够大的 $B(\varepsilon)$ 使最后一个表达式任意小

注 在文献中 Fourier 变换 (преобразование Фурье) $\widehat{f}(y)$ 有时也表示为 $[\widehat{f}(x)](y)$，称其中 y 为虚变量

推论 2.1

设 $f \in L_1(\mathbb{R})$，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\lambda x) f(x)dx = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda x) f(x)dx = 0$$

♡

证明 由 Fourier 像基本引理得 (2.1) 得，取 $\lambda = |y|$ 并使用 Euler 公式即得 $e^{ix\lambda} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x$

定义 2.2 (Fourier 展开)

设函数 $f \in L_1(\mathbb{R})$ ，若

$$\exists \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)dy = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)d\xi\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\widehat{f}(y)dy$$

则称函数在点 x 可以 Fourier 展开

♣

注 Fourier 积分可以看作从函数的 Fourier 像计算该函数解析式的 Fourier 逆变换

定理 2.2

若函数 $f \in L_1(\mathbb{R})$，并且在点 x 处左侧满足指数为 α_1 的 Hölder 条件，在点 x 的右侧满足指数为 α_2 的 Hölder 条件（其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$），则极限

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)dy \tag{2.3}$$

存在，且等于 $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$

♡

证明

Step 1：极限 (2.3) 中的累次积分不好处理，故将其拆分表示成单次积分的形式，证明

$$I_\lambda(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)d\xi\right)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt \tag{2.4}$$

根据基本引理，可知 $\widehat{f}(y) \overset{[-\lambda,\lambda]}{\rightrightarrows}$，即

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists A_0(\varepsilon)>0)\,(\forall A: A\geqslant A_0) \Rightarrow \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)d\xi - \int_{-A}^{A} e^{i\xi y} f(\xi)d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{2\lambda}\cdot 2\pi$$

考虑二者的差值：

$$\left|I_\lambda(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left(\int_{-A}^{A} e^{i\xi y} f(\xi)d\xi\right)dy\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)d\xi - \int_{-A}^{A} e^{i\xi y} f(\xi)d\xi\right)dy\right| <$$

$$< \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \left|e^{-ixy}\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2\lambda}\cdot 2\pi dy = \varepsilon$$

因此，可得

$$\left|I_\lambda(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ixy}\left(\int_{-A}^{A}e^{i\xi y}f(\xi)d\xi\right)dy\right|<\varepsilon$$

根据含参变量的积分的可积性定理，可以交换第二个积分式中两个积分运算的顺序，从而存在和两重积分等价的累次积分

$$\left|I_\lambda(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}f(\xi)d\xi\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{iy(\xi-x)}dy\right|<\varepsilon$$

借助 Euler 公式，有

$$I_\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{iy(\xi-x)}dy=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\lambda}^{\lambda}(\cos y(\xi-x)+i\sin y(\xi-x))dy$$

根据积分区间 $[-\lambda,\lambda]$ 的对称性和函数的奇偶性

$$I_\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cdot 2d\xi\int_{0}^{\lambda}\cos y(\xi-x)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cdot\frac{\sin\lambda(\xi-x)}{\xi-x}d\xi=$$
$$=\{\xi-x=t\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\cdot\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

辅助等式 (2.4) 得证

Step 2：接下来需要证明

$$\exists\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

回忆 Dirichlet 积分：

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

因此

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

现在，根据最后一个等式，计算差值

$$\left|I_\lambda(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}(f(x+t)-f(x-0))\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}(f(x+t)-f(x+0))\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right|.$$

由于满足 Hölder 条件，取 $\delta_0>0,\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\},M=\max\{M_1,M_2\}$，满足

$$(0<|t|<\delta_0):|f(x+t)-f(x\pm 0)|<|t|^\alpha\cdot M$$

使得点 x 左、右侧的 Hölder 条件同时得到满足。再取 $\delta<\delta_0$，并将积分差值分成 5 部分：

$$\left|I_\lambda(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|=$$
$$=\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\delta}^{0}(f(x+t)-f(x-0))\frac{\sin\lambda t}{t}dt}_{l_1}+\underbrace{\int_{0}^{\delta}(f(x+t)-f(x+0))\frac{\sin\lambda t}{t}dt}_{l_2}+$$
$$+\underbrace{\int_{\delta\leqslant|t|<\infty}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt}_{V_3}+\underbrace{f(x-0)\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}dt}_{l_4}+\underbrace{f(x+0)\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt}_{l_5}|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left(|I_1|+|I_2|+|I_3|+|I_4|+|I_5|\right)$$

接下来，分别估计这 5 个积分

从 $|I_3| = \left|\int_{\delta\leqslant|t|<\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right|$ 开始，考虑辅助函数

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)}{t}, & |t| \geqslant \delta \\ 0, & |t| < \delta \end{cases}$$

因为 $f \in L_1(\mathbb{R})$，所以 $g \in L_1(\mathbb{R})$。再根据基本引理的推论，有

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\sin\lambda t dt = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|<\infty} g(t)\sin\lambda t dt = 0,$$

由于 $(|t| \geqslant \delta) : g(t) = \frac{f(x+t)}{t}$，因此 $|I_3| < \frac{\varepsilon}{5}$

接下来估计 $|I5|$

$$|I_5| = \left|f(x+0)\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right| = \{\lambda t = x\} = \left|f(x+0)\int_{\delta\lambda}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx\right| \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

因此，$|I_5| < \frac{\varepsilon}{5}$，$|I_4|$ 也可以同样地估计。接下来估计 $|I_2|$:

$$|I_2| = \left|\int_0^{\delta}(f(x+t)-f(x+0))\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right| \leqslant \int_0^{\delta}|f(x+t)-f(x+0)|\cdot\frac{|\sin\lambda t|}{t}dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\delta}\frac{M\cdot t^{\alpha}}{t}dt = \frac{M\cdot\delta^{\alpha}}{\alpha}$$

仅需选取合适的 δ，以便最后一个表达式小于 $\frac{\varepsilon}{5}$（注意：此时 $\delta < \delta_0$）。对 $|I_1|$ 的估计相同。结果可得

$$\left|I_\lambda(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}\right) = \frac{\varepsilon}{\pi} = \varepsilon'$$

定理得证

定义 2.3 (Fourier 逆变换)

将函数 $f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ 分解成 Fourier 积分的形式：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}\widehat{f}(y)dy$$

从 Fourier 像求出函数的过程，称为 Fourier 逆变换

♣

在上述情况下，Fourier 像的表达式

$$\widehat{f}(y) = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}f(x)dx$$

称为**直接 Fourier 变换 (прямый преобразование Фурье)**

定义 2.4 (余弦 Fourier 直接和逆变换)

当函数 f 是偶函数时

$$\widehat{f}(y) = 2\int_0^{+\infty}\cos(yx)f(x)dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(yx)\widehat{f}(y)dy$$

分别称为 Fourier 余弦的直接变换和 Fourier 余弦的逆变换 (прямый и обратный косинус-преобразование Фурье)

♣

定义 2.5 (正弦 Fourier 直接和逆变换)

当函数 f 是奇函数时

$$\widehat{f}(y) = 2\int_0^{+\infty}\sin(yx)f(x)dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin(yx)\widehat{f}(y)dy.$$

分别称为 Fourier 正弦的直接变换和 Fourier 正弦的逆变换 (прямый и обратный синус-преобразование

Фурье)

2.2 Fourier 重级数与与 Gibbs 现象

接下来考虑二元函数。假设在区域 $\mathbb{R}^2$ 上给定二元函数 $f(x;y)$，并且函数 f 关于变量 x 与 y 都是周期函数且周期都等于 2π，并且函数 f（在常以或反常意义下）在方块 $\mathbf{Q}=[-\pi;\pi]\times[-\pi;\pi]$ 上可积

将函数 $f(x;y)$ 看作是关于变量 x 的函数，那么有

$$f(x;y)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(y)e^{inx},\ \text{где}\ c_n(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi;y)e^{-in\xi}d\xi$$

反过来，函数 $c_n(y)$ 也可以展开成级数的形式

$$c_n(y)\sim\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_{n,m}e^{imy}\text{，其中}$$

$$c_{n,m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c_n(\eta)e^{-im\eta}d\eta=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi;\eta)e^{-i(n\xi+m\eta)}d\xi d\eta$$

由此可得：

$$f(x;y)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_{n,m}e^{imy}\right)e^{inx}=\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}c_{n,m}e^{i(nx+my)}$$

定义 2.6 (二元函数的实形式 Fourier 级数)

合并共轭项

$$f(x;y)\sim\sum_{n,m=0}^{+\infty}\lambda_{n,m}\cdot(a_{n,m}\cos nx\cos my+b_{n,m}\cos nx\sin my+$$
$$+c_{n,m}\sin nx\cos my+d_{n,m}\sin nx\sin my)$$

其中

$$\lambda_{n,m}=\begin{cases}1/4,\text{当}n=m=0,\\1/2,\text{当}n=0,m\neq 0,\text{或}m=0,n\neq 0,\\1,\quad\text{当}n\neq 0\text{且}m\neq 0\end{cases}$$

$$a_{n,m}=\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbf{Q}}f(\xi;\eta)\cos n\xi\cos m\eta\ d\xi d\eta$$
$$b_{n,m}=\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbf{Q}}f(\xi;\eta)\cos n\xi\sin m\eta\ d\xi d\eta$$
$$c_{n,m}=\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbf{Q}}f(\xi;\eta)\sin n\xi\cos m\eta\ d\xi d\eta$$
$$d_{n,m}=\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbf{Q}}f(\xi;\eta)\sin n\xi\sin m\eta\ d\xi d\eta$$

通过研究其部分和 $S_{n,m}(x;y)$，解决重 Fourier 级数的收敛性问题，得到类似 Dirichlet 积分的积分表达式

$$S_{n,m}(x;y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbf{Q}}f(x+u;y+v)\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\cdot\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)v\right)}{\sin\frac{u}{2}\cdot\sin\frac{v}{2}}dudv$$

注 满足以下条件，二元函数 $f(x;y)$ 肯定可以在点 $(x;y)$ 处展开成 Fourier 级数：

- 偏导数 f'_x 和 f'_y 几乎处处存在且有界
- 在点 (x,y) 的邻域内，存在函数 $f(x,y)$ 的二阶混合导数，且在该点连续

接下来，通过一个例子表明，一个函数的 Fourier 级数不一定能精确刻画函数的展开式，这就是将研究的 Gibbs 现象——在间断点的邻域内，（存在第一类间断点的）不连续函数的 Fourier 级数不收敛到原函数的展开

表达式

注 详情建议参考 Wikipedia：address

符号函数

$$f(t) = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & 0 < t \leqslant \pi \end{cases}$$

把函数的 2π 周期延拓到整个实数轴 $\mathbb{R}$ 上，考虑函数 $f(t) = \operatorname{sgn}(\sin t)$，并在区间 $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ 上研究函数的性质，由于该函数为奇函数，则其展开式中，Fourier 级数只包含正弦，即 $\forall a_k = 0$，那么

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ktdt = \frac{2}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi k}, & k = 2n-1 \\ 0, & k = 2n \end{cases}$$

展开成 Fourier 级数，可得：

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt = \lim_{N\to\infty} S_N(t) = \frac{4}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

从图??中可以看出，Fourier 级数的部分和函数 $S_N(t)$ 在间断点附近上下振荡。接下来研究：当 $N \to \infty$ 时，其

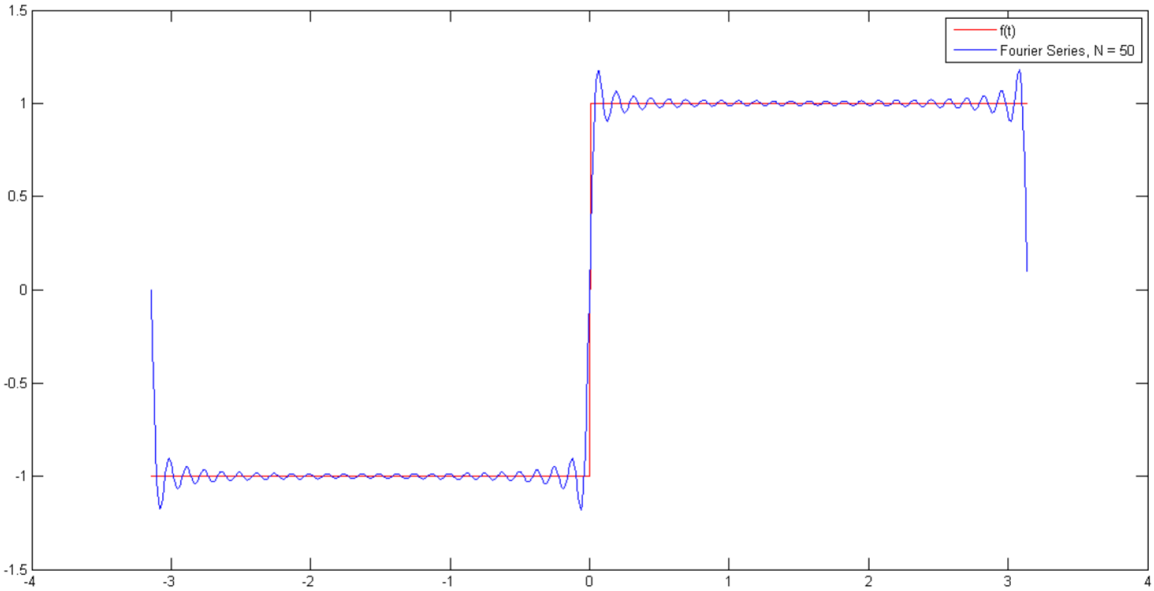

图 2.1: 当 $N = 50$ 时，在间断点 $t = 0$ 的邻域内，函数及其 Fourier 级数部分和函数的图像

极值大小（在哪些点部分和函数 $S_N(t)$ 与原函数偏差最大）

为此首先借助 Euler 公式和几何（等比）序列的求和公式求导数（几何序列的首项为 e^{it}，分母为 e^{2it}）：

$$\begin{aligned} \frac{dS_N(t)}{dt} &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(2n-1)t = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N} e^{i(2n-1)t} = \\ &= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(e^{it}\frac{e^{i2Nt}-1}{e^{2it}-1}\right) = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(e^{iNt}\frac{e^{iNt}-e^{-iNt}}{e^{it}-e^{-it}}\right) \end{aligned}$$

这里借助 $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\right)$ 和 $\sin\alpha = \operatorname{lm}\left(e^{i\alpha}\right)$ 完成推导。现在注意，在最后一个括号中有正弦表达式中的一部分（因为 $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$）

由此可得

$$\frac{dS_N(t)}{dt} = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(e^{iNt}\frac{\sin Nt}{\sin t}\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos Nt\sin Nt}{\sin t} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin 2Nt}{\sin t}$$

因此，所有极值点都满足条件 $\sin 2Nt = 0$（除了 $t = 0$ 点）。当 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时（图像与 $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$ 和 $-\pi \leqslant t \leqslant 0$

上的是绝对对称的)，有

$$t_n = \frac{\pi}{2N} n, n = 1, 2, \ldots, N$$

现在，对 $\frac{dS_N(t_n)}{dt}$ 积分，得到 $S_N(t_n)$ 的积分形式的表达式：

$$S_N(t_n) = \int_0^{t_n} \frac{dS_N(t)}{dt} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{t_n} \frac{\sin 2Nt}{\sin t} dt = \left\{ \begin{array}{c} 2Nt = \tau \\ dt = \frac{d\tau}{2N} \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi N} \int_0^{\pi n} \frac{\sin \tau}{\sin \frac{\tau}{2N}} d\tau$$

当 $N \to \infty$ 时，将被积函数展开成 Taylor 级数，可得

$$\frac{\sin \tau}{\pi N \sin \frac{\tau}{2N}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \tau}{\tau} + \frac{\tau \sin \tau}{12\pi N^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{N^4}\right), N \to \infty$$

回到积分表达式：

$$\frac{1}{\pi N} \int_0^{\pi n} \frac{\sin \tau}{\sin \frac{\tau}{2N}} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi n} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \frac{1}{12\pi N^2} \int_0^{\pi n} \tau \sin \tau d\tau + \underline{O}\left(\frac{n}{N^4}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Si}(\pi n) - \frac{(-1)^n n}{12 N^2} + \underline{O}\left(\frac{n}{N^4}\right)$$

其中 $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 是积分正弦

借助分部积分法，求出当 $x \to \infty$ 时积分正弦的渐近展开表达式

$$\operatorname{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + \underline{O}\left(x^{-4}\right), x \to +\infty$$

现在考虑当 $N \to \infty$ 时，已知的极值 t_n 的运动状态若极值的编号是整数 $n = \alpha N$，其中 $0 < \alpha \leqslant 1$，那么 $t_n = \frac{1}{2}\pi\alpha$，并且有

$$S_N(t_n) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Si}(\pi \alpha N) + \underline{O}\left(N^{-1}\right) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi} \lim_{x \to \infty} \operatorname{Si}(x) = 1$$

换句话说，在函数 f 的不连续点之外，函数对应的 Fourier 级数收敛于自身

如果极值的编号不依赖于 N，那么所有这样的极值，在 $N \to \infty$ 时，其位置与间断点 $t = 0$ 合并，并且考虑到 $S_N(t)$ 的表达式，极值中的最大值当 $n = 1$ 时达到，并等于

$$\max \left\{ \lim_{N \to \infty} S_N(t) \right\} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Si}(\pi) \approx 1.179$$

因此，在通过函数间断点时，函数 $f(\operatorname{sgn} t)$ 的 Fourier 级数的无穷项和函数跳跃幅度比原函数在间断点的跳跃大 17.9% 左右